

Teoria e Aplicações do Método de Elementos Analíticos

O. D. L. Strack

Departamento de Engenharia Civil - Universidade de Minnesota
strac001@umn.edu

Mariano da Franca Alencar Neto

Departamento de Construção Civil - CEFETCE
mariano@cefetce.br

Edson Wendland

Departamento de Hidráulica e Saneamento – EESC/USP
ew@sc.usp.br

Recebido: 19/01/07 - revisado: 13/03/09 - aceito: 26/08/09

RESUMO

Este artigo é uma revisão da teoria e aplicações do Método dos Elementos Analíticos (*Analytic Element Method – AEM*). O artigo apresenta a formulação básica dos elementos analíticos usados para modelagem bidimensional de campo de escoamento para o caso de aquíferos em regime uniforme. Especial destaque é dado à formulação de elementos lineares usados para modelar rios, drenagens, paredes impermeáveis e zonas de diferentes condutividades hidráulicas. Algumas perspectivas de pesquisa e desenvolvimento são relatadas. Uma seção é especialmente dedicada à implementação computacional contendo alguns programas desenvolvidos tanto comerciais quanto de uso livre. O artigo finaliza com uma breve discussão das principais aplicações dentro e fora do Brasil, concluindo na importância do estudo do Método no contexto da modelagem de águas subterrâneas.

Palavras Chave: Método de Elementos Analíticos, Modelagem de Águas Subterrâneas, Variáveis Complexas.

INTRODUÇÃO

O Método de Elementos Analíticos (*AEM – Analytic Element Method*) é um método computacional baseado na superposição de expressões analíticas. É um modelo exato que, em princípio, pode ser estendido para representar qualquer campo vetorial bi ou tridimensional.

O Método foi desenvolvido em meados dos anos setenta para resolver um problema de águas subterrâneas: a modelagem dos efeitos do canal *Tennessee-Tombigbee* (1976) sobre os aquíferos circunvizinhos. O projeto demandou um modelo para reproduzir o escoamento subterrâneo tanto em escala regional como em escala local (Strack e Haitjema, 1981a, 1981b).

A natureza do método, baseado na superposição de expressões analíticas, possibilita abordar modelos de grande escala, mantendo um alto grau de precisão na pequena escala. Essa propriedade é particularmente utilizada para modelos em escala

estadual ou nacional, como os projetos *NAGRON (Dutch National Groundwater Model)* na Holanda (De Lange, 1996) e o *Twin Cities Metropolitan Groundwater Model* em Minneapolis, Minnesota, Estados Unidos (Seaberg et al., 1997).

O Método de Elementos Analíticos utiliza o teorema de decomposição de *Helmholtz* (Tong et al., 2003), segundo o qual, um campo vetorial que se anule no infinito pode ser dividido em um campo solenoidal (divergente igual a zero) e um irrotacional, podendo haver adicionalmente um campo vetorial harmônico que não contribua nem para o divergente nem para o rotacional. As partes decompostas do campo vetorial são, então, representadas por expressões analíticas apropriadas, objetivando a modelagem de uma característica particular ou aspecto específico do campo vetorial original.

Seguindo a decomposição de *Helmholtz*, cada elemento analítico é escolhido de forma a representar uma descontinuidade numa componente normal ou tangencial de um vetor. A solução para o

problema é formulada de forma que a continuidade do fluxo seja satisfeita.

Condições de contorno, freqüentemente internas, são aplicadas ao longo de linhas ou curvas e são formuladas em termos de saltos ou descontinuidades da variável procurada. As descontinuidades, a partir das condições de contorno, são aproximadas usualmente por polinômios.

Os elementos analíticos que controlam essas descontinuidades são freqüentemente, mas não sempre, formulados pelas Integrais de *Cauchy* ou por Funções de *Legendre*. Aplicações de elementos de contorno e integrais singulares de *Cauchy* não são novidades para problemas na engenharia geotécnica. Aplicações de equações integrais são usadas por Polubarinova-Kochina (1962) e Pilatovski (1966) na determinação de fluxo subterrâneo. O trabalho de Muskhelishvili (1958) contém uma importante discussão sobre a aplicação da integral de *Cauchy* a elementos lineares, estabelecendo as condições necessárias para a modelagem de trechos de rios por segmentos de reta.

Uma diferença entre o Método de Elementos Analíticos e as aplicações existentes de elementos lineares singulares (como no Método de Integrais de Contorno) é que as funções harmônicas são usadas como parte da solução, sendo combinadas com funções que criam divergentes ou rotacionais.

Outra diferença é que os elementos analíticos são considerados como funções independentes com grau de liberdade a serem determinados ao final, em conjunto com as condições específicas.

A terceira diferença é que os elementos analíticos não são necessariamente construídos como integrais de linha.

O método é, em princípio, aplicável para campos vetoriais em geral, porém tem sido quase exclusivamente aplicado para campos de escoamento subterrâneo.

PRINCÍPIOS DO MÉTODO DE ELEMENTOS ANALÍTICOS

A proposta do Método de Elementos Analíticos é descrever um campo vetorial geral, através de expressões analíticas que possam ser sobrepostas. Cada elemento é escolhido ou desenvolvido para reproduzir uma característica específica do campo vetorial. Talvez, a mais importante característica do AEM seja a liberdade que oferece na escolha dos elementos. Esses podem ser desenvolvidos usando

técnicas de transformação conforme, integrais de *Cauchy*, análise de *Fourier*, transformadas de *Laplace*, ou separação de variáveis. O método torna possível, e até mesmo encoraja, procurar e usar novos meios para o desenvolvimento e combinação de funções apropriadas ao problema abordado.

O Método de Elementos Analíticos será formulado para o caso de um campo vetorial bidimensional, seguindo Strack (1999), podendo ser estendido para problemas tridimensionais com o incremento usual de nível de dificuldade.

De acordo com o teorema da decomposição de *Helmholtz* (Tong et al., 2003), um campo vetorial que se anule no infinito pode ser formulado em termos de seu divergente e rotacional. Representando este campo por Q_i , onde $i = 1$ representa a componente x do campo vetorial e $i = 2$ representa a componente y ($x_1 \equiv x$ e $x_2 \equiv y$), o rotacional e o divergente deste campo vetorial podem ser representados como β e $-\gamma$, respectivamente. Assumindo que tais quantidades são conhecidas, o campo vetorial solenoidal (divergente nulo) pode ser representado em termos do rotacional do campo escalar representado pela função de corrente Ψ

$$Q_i = -\varepsilon_{ij} \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \quad (1)$$

em que ε_{ij} é um tensor de segunda ordem.

Similarmente, o vetor irrotacional pode ser representado em termos de gradiente de um potencial escalar Φ

$$Q_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \quad (2)$$

Considerando que o rotacional Q_i é igual a β , a função escalar de corrente Ψ irá satisfazer necessariamente a equação de *Poisson* dada por:

$$\nabla^2 \Psi = \beta \quad (3)$$

Semelhantemente, o laplaciano do potencial Φ necessariamente será igual a γ

$$\nabla^2 \Phi = \gamma \quad (4)$$

O campo vetorial restante, *i.e.*, sem contribuição de β nem de γ , pode ser escrito em termos do gradiente de um potencial ou em termos do rotacional de uma função escalar (ou, eventualmente, como uma combinação de ambas), *i.e.*,

$$\bar{Q}_i = -\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x_i} = -\varepsilon_{ij} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x_j} \quad (5)$$

em que $-\varepsilon_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}$ representa o rotacional e onde o sobrescrito \bar{h} identifica funções harmônicas. O campo vetorial completo pode então ser escrito como a soma desses três campos vetoriais, *i.e.*,

$$Q_i = Q_i^\beta + Q_i^\gamma + \bar{Q}_i \quad (6)$$

Geralmente, o rotacional e o divergente, ou ambos, são desconhecidos *a priori*. Essas quantidades podem, inclusive, depender da própria solução e freqüentemente originam um sistema de equações diferenciais não-lineares. Assim, escolhas apropriadas para as funções que representam o rotacional e o divergente são essenciais para a formulação de um elemento analítico eficiente.

Para o caso de escoamento subterrâneo, o divergente é associado com infiltração (divergente dado), com perdas a serem determinadas (divergente desconhecido *a priori*) ou, em modelos transientes, com mudanças no armazenamento. O rotacional é diferente de zero para os casos de variação da condutividade hidráulica, da elevação da base ou da espessura do aquífero. O rotacional também é diferente de zero para casos de anisotropia da condutividade hidráulica.

ESCOAMENTO DE DUPUIT-FORCHHEIMER EM AQUÍFEROS DE ÚNICA CAMADA

Ao adotar a aproximação de *Dupuit-Forchheimer*, a resistência ao escoamento na direção vertical é negligenciada (Strack, 1989). A aproximação de *Dupuit-Forchheimer* nas áreas onde componentes verticais do escoamento são relativamente grandes, (*e.g.* na vizinhança de poços parcialmente penetrantes) produz soluções precisas em termos da

descarga, mas são apenas aproximadas em termos de cargas hidráulicas. Essa limitação não impede a determinação de linhas de corrente (*stream lines*) tridimensionais em tais modelos (Haitjema, 1995).

Os elementos analíticos que representam as características que afetam o escoamento podem ser retos, curvos ou ainda fechados. A infiltração em aquíferos é modelada como uniforme ou como inicialmente constante, em áreas delimitadas por polígonos (Strack, 1989).

Os elementos analíticos são representados por potenciais complexos, exceto as funções que representam infiltração. Esses potenciais complexos contêm parâmetros que serão determinados na incorporação das condições de contorno do problema, usualmente descontinuidades, *i.e.*, condições que envolvem saltos na componente tangencial ou normal do vetor de descarga ao longo do elemento.

A precisão do modelo é limitada apenas pela precisão e tamanho da memória do computador (Haitjema, 1995).

Na seqüência, são apresentados os elementos lineares mais comuns em modelos de elementos analíticos, iniciando com uma breve introdução sobre os potenciais utilizados.

Potencial de descarga e potencial complexo

O uso do potencial de descarga possibilita unificar as formulações para as regiões confinadas e livres do aquífero, bem como tratar a variação de condutividade hidráulica por pedaços discretos. Já o potencial complexo permite a utilização da teoria das funções complexas no domínio bidimensional.

Utilizando-se o sistema de coordenadas cartesianas x, y no plano horizontal e admitindo-se que o vetor descarga específica q , para uma dada direção i obedece à lei de *Darcy*, tem-se para o caso bidimensional isotópico:

$$\begin{aligned} q_x &= -K \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ q_y &= -K \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{aligned} \quad (7)$$

em que K é a condutividade hidráulica e ϕ é a carga piezométrica.

O vetor de descarga (Q), com componentes Q_x e Q_y , representa a descarga total em uma dada direção. As simplificações de *Dupuit-Forchheimer* im-

põem que o vetor de descarga específica seja uniforme sobre toda a espessura do aquífero, de forma que os componentes Q_x e Q_y podem ser escritos como $Q_x = hq_x$ e $Q_y = hq_y$, sendo h a espessura saturada do aquífero.

Definindo-se o potencial de descarga (Φ) para aquíferos livres como:

$$\Phi = \frac{1}{2}Kh^2 = \frac{1}{2}K(\phi - b)^2; \quad \phi \leq H \quad (8)$$

e para aquíferos confinados como:

$$\Phi = KH(\phi - b) - \frac{1}{2}KH^2; \quad \phi \geq H \quad (9)$$

onde b é a cota da base do aquífero em relação a um nível arbitrário de referência, tem-se que a espessura saturada do aquífero (h) é igual a $\phi - b$ para escoamento livre e H para escoamento confinado, sendo H a espessura do aquífero (Figura 1).

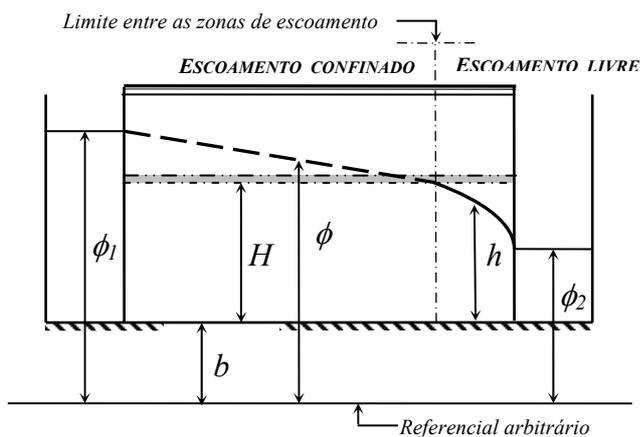


Figura 1 - Indicação das variáveis em aquífero livre e confinado, entre as cargas hidráulicas ϕ_1 e ϕ_2 .

Note que a constante $\frac{1}{2}KH^2$, presente na Equação (9), é escolhida de forma que os potenciais sejam válidos na interface entre a parte livre e a confinada.

Podem-se expressar os componentes do vetor de descarga, tanto para aquíferos livres como confinados, como:

$$Q_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (10)$$

$$Q_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

O símbolo γ é introduzido para representar uma taxa de extração por unidade de área, γ é positivo para extração e negativo para infiltração. O divergente do vetor de descarga é igual ao negativo de γ , i.e.,

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -\gamma \quad (11)$$

Assim, o potencial de descarga (Φ) satisfaz a equação de Poisson,

$$\nabla^2 \Phi = \gamma \quad (12)$$

Pode-se, ainda, definir o potencial complexo Ω ,

$$\Omega = \Phi + i\Psi \quad (13)$$

existente para elementos analíticos em campos solenoidais. A parte imaginária do potencial complexo Ψ é a função de corrente (*stream function*). Observa-se que o uso do potencial complexo permite definir as equipotenciais e as funções de fluxo do escoamento no mesmo processo de cálculo.

Elemento ponto de injeção ou extração (poço)

Seja W [L^3T^{-1}] a taxa de injeção ou extração em um ponto no aquífero, locado na coordenada complexa z_p . Define-se a descarga na direção radial Q_r [L^2T^{-1}] como vazão por unidade de comprimento de um círculo de raio r ao redor do ponto de injeção/extração:

$$Q_r = -\frac{W}{2\pi r} \quad (14)$$

Considerando a Lei de Darcy em termos do potencial de descarga, equação (10), então,

$$Q_r = -\frac{d\Phi}{dr} \quad (15)$$

Igualando as expressões e integrando, o potencial de descarga devido ao poço pode ser escrito como:

$$\Phi_p = \frac{W}{2\pi} \ln r + c_p \quad (16)$$

As linhas de corrente radiais a partir do ponto de injeção/extração em coordenadas polares (θ, r) serão dadas por:

$$\Psi = \frac{W}{2\pi} \theta \quad (17)$$

Unificando as equações em termos do potencial complexo, tem-se:

$$\Omega(z) = \frac{W}{2\pi} \ln(z - z_p) + c_p \quad (18)$$

O potencial de descarga é representado, então, pela parte real $\Phi = \Re\{\Omega\}$, e as linhas de corrente pela parte imaginária $\Psi = \Im\{\Omega\}$ do potencial complexo.

Elementos lineares

Um ponto fundamental do AEM é o potencial complexo para elementos lineares, obtido a partir da integral singular de *Cauchy* (Strack, 1989). São exemplos de elementos lineares: linha dupla (*line doublet*), linha dipolo (*line dipole*) e linha de extração ou injeção (*line source or line sink*).

O potencial complexo para linha dupla pode ser visto como o resultado de uma dupla camada de fontes e sumidouros distribuídos ao longo de uma linha e exibe uma descontinuidade na componente tangencial do escoamento, tendo a componente normal contínua. Nota-se que uma descontinuidade na componente tangencial do escoamento corresponde a uma descontinuidade no potencial de descarga.

O potencial complexo para uma linha dipolo é um caso especial, pois corresponde a uma descontinuidade na componente normal do escoamento e a componente tangencial permanece contínua. A parte imaginária do potencial complexo, a função de corrente, apresenta um salto através da linha.

As linhas de extração podem ser vistas como uma distribuição de poços ao longo da linha e provocam descontinuidade na parte imaginária sem

causar descontinuidade na parte real do potencial complexo.

O elemento-linha genérico, em termos de coordenadas complexas, $z = x + iy$, segue em linha reta de $z = z_1$ até $z = z_2$. Para parametrização, é utilizada a variável complexa local Z , definida em termos de z :

$$Z = X + iY = \frac{z - \frac{1}{2}(z_2 + z_1)}{\frac{1}{2}(z_2 - z_1)} \quad (19)$$

Assim, o elemento linear é parametrizado para $-1 \leq X \leq 1$; $Y = 0$ no plano Z .

Linha dupla

Linhas duplas são usadas em modelos de elementos analíticos para simular descontinuidades nas propriedades do aquífero como o verificado no efeito de paredes impermeáveis sobre o escoamento (Figura 2).

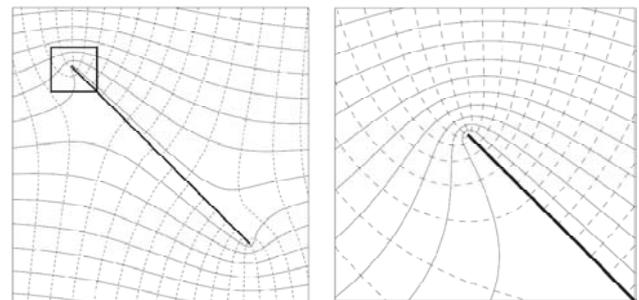


Figura 2 - Rede de escoamento em torno de uma barreira impermeável (campo de escoamento uniforme da esquerda para a direita). Linhas tracejadas são equipotenciais e linhas contínuas são linhas de corrente.

A linha dupla cria uma descontinuidade na componente tangencial do vetor de descarga e no potencial, apresentando a propriedade:

$$\Omega^+ - \Omega^- = \lambda(Z); \quad \Im\lambda(X) = 0 \quad (20)$$

em que \Im representa a parte imaginária e os sobrescritos referem-se ao lado positivo e negativo do elemento, *i.e.*, os lados de aproximação nas direções positiva e negativa de Y , respectivamente. Observa-se que a função $\lambda(Z)$ representa a descontinuidade

da carga hidráulica ao longo do elemento linear e será aproximada por um polinômio de coeficientes reais

$$\lambda(Z) = \sum_{j=0}^n a_j Z^j \quad \Im a_j = 0 \quad (21)$$

Os coeficientes a_j podem ser determinados pela construção de um sistema de equações, uma vez que as condições de contorno internas são especificadas. Este processo é descrito em detalhes por Strack (1989). A precisão da aproximação pode ser aumentada significativamente pela distribuição de pontos de controle em uma locação de poços ou pelo uso do princípio da sobre-especificação (*over-specification*) introduzida por Jankovic (1997).

O potencial complexo que satisfaz a equação (20) é analítico, tendo a forma (Strack, 1989):

$$\Omega(Z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{\lambda(\Delta)}{Z-\Delta} d\Delta \quad (22)$$

$$\Omega(Z) = \frac{\lambda(\Delta)}{2\pi i} \ln\left(\frac{Z-1}{Z+1}\right) + \frac{p(Z)}{2\pi i}$$

em que Δ representa uma coordenada local na forma da equação (19), que é integrada ao longo do elemento. A função $p(Z)$ é definida como uma correção polinomial para o campo distante, sendo um polinômio de ordem $n-1$. A função Ω na equação (22) exibe uma descontinuidade ao longo de $-1 \leq X \leq 1$; $Y = 0$. Quando Z aproxima-se do elemento pelo lado positivo (*i.e.*, $Y = 0^+$), tem-se:

$$Z = X + i0^+$$

$$\Omega^+(Z) = \frac{\lambda(X)}{2\pi i} \left\{ \ln\left(\frac{1-X}{1+X}\right) + i\pi \right\} + \frac{p(X)}{2\pi i} \quad (23)$$

e quando Z se aproxima pelo lado negativo, tem-se:

$$Z = X + i0^-$$

$$\Omega^-(Z) = \frac{\lambda(X)}{2\pi i} \left\{ \ln\left(\frac{1-X}{1+X}\right) - i\pi \right\} + \frac{p(X)}{2\pi i} \quad (24)$$

e, portanto

$$\Omega^+(Z) - \Omega^-(Z) = \lambda(X) \quad -1 \leq X \leq 1. \quad (25)$$

Nota-se que o valor do potencial Φ para uma linha dupla, conforme as equações (23) e (24) tanto do lado positivo quanto do negativo, é, em módulo, igual à metade do salto $\lambda(X)$:

$$\Phi^+(X) = \frac{1}{2} \lambda(X) \quad \Phi^-(X) = -\frac{1}{2} \lambda(X) \quad (26)$$

Linha dipolo

Linhas dipolo são usadas para modelagem de características de sistemas de descarga zero, tais como drenagens ou fissuras com material permeável.

O potencial complexo para uma linha dipolo é similar à linha dupla. Isso se dá devido ao fato de que a linha dipolo ser composta de uma infinidade de poços de extração e injeção dispostos alternadamente ao longo de um trecho reto. Em relação à linha dupla é como se cada dupla de poços fossem girados de 90° . Portanto a integração da função complexa se comportará de forma idêntica, apenas considerando a rotação do elemento de integração, que em termos complexos equivale à multiplicação por i

$$\Omega(Z) = \frac{\mu(\Delta)}{2\pi} \ln\left(\frac{Z-1}{Z+1}\right) + \frac{p(Z)}{2\pi} \quad (27)$$

$$\Psi^+ - \Psi^- = \mu(Z); \quad \Im \mu(X) = 0 \quad (28)$$

O elemento exibe uma descontinuidade na componente normal do escoamento. Este pode ser aproximado por um polinômio:

$$\mu(X) = \sum_{j=1}^n b_j Z^j \quad \Im b_j = 0 \quad (29)$$

A linha dipolo representa uma descontinuidade na função de corrente e pode ser usada para modelar características que não podem extrair água do aquífero, embora generalize uma descontinuidade na componente normal do escoamento.

Os coeficientes b_j são encontrados ao se resolver um sistema de equações oriundo da aplicação das condições de contorno, da mesma maneira apresentada para linhas duplas.

Linha de injeção ou extração

São elementos que modelam linhas retas que extraem ou injetam certa quantidade de água de um aquífero, podendo ser usadas para modelar fluxos e contornos de rios e lagos (Figura 3).

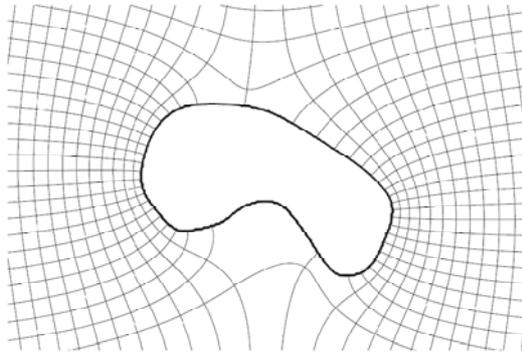


Figura 3 - Rede de escoamento em torno de um lago, modelado por um elemento curvo. O lago extrai água do aquífero livre.

Uma linha de injeção/extração pode ser representada por um conjunto de poços de injeção ou extração alinhados e distribuídos uniformemente entre os extremos z_1 e z_2 , sendo σ a taxa de injeção/extração e w_n a coordenada no plano complexo do n -ésimo ponto de injeção/extração. Pode-se escrever o potencial complexo resultante pelo somatório dos pontos de injeção/extração ao longo da linha, conseqüentemente cada vazão Q será distribuída em um trecho Δl , conforme a equação:

$$\sigma = \frac{Q}{\Delta l} \Rightarrow Q = \sigma \Delta l, \tag{30}$$

portanto, o potencial complexo pode ser escrito como:

$$\Omega(z) = \sum_{n=1}^N \frac{\sigma}{2\pi} \ln(z - w_n) \Delta l \tag{31}$$

No limite, quando $N \rightarrow \infty$, $\Delta l \rightarrow 0$ e o somatório transforma-se em integral:

$$\Omega(z) = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{\sigma}{2\pi} \ln(z - w) dl \tag{32}$$

Como $dl = e^{-i\beta} dw$, pode-se escrever:

$$\Omega(z) = \frac{\sigma}{2\pi} e^{-i\beta} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \ln(z - w) dw \tag{33}$$

Substituindo as variáveis z e w por suas respectivas coordenadas locais, Z e W , conforme a equação (19), e reorganizando os termos:

$$\Omega_{lie}(z) = \frac{\sigma}{2\pi} e^{-i\beta} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \ln \left[\frac{1}{2} (z_2 - z_1) (Z - W) \right] dw \tag{34}$$

Sobre a linha $-1 \leq Z \leq 1$, $-1 \leq W \leq 1$ e $-\frac{L}{2} \leq l \leq \frac{L}{2}$, e pela relação $z_2 - z_1 = Le^{i\beta}$, tem-se que:

$$dw = \frac{1}{2} (z_2 - z_1) dW \Rightarrow \frac{L}{2} dW = e^{-i\beta} dw \tag{35}$$

em que β é a orientação da reta. Substituindo na equação (34), tem-se:

$$\Omega(z) = \frac{\sigma}{4\pi} L \int_{-1}^{+1} \ln \left[\frac{1}{2} (z_2 - z_1) (Z - W) \right] dW \tag{36}$$

Desenvolvendo o termo logarítmico e usando substituição simples de variáveis, tendo Z como constante durante a integração, obtém-se:

$$\Omega(Z) = \frac{\sigma}{4\pi} L \left\{ \int_{-1}^{+1} \ln \left[\frac{1}{2} (z_2 - z_1) \right] dW + \int_{Z+1}^{Z-1} \ln(Z - W) d(Z - W) \right\} \tag{37}$$

Resolvendo a integral e aplicando os limites de integração tem-se o potencial complexo para a linha de injeção/extração:

$$\Omega(Z) = \frac{\sigma}{4\pi} L \left\{ (Z+1)\ln(Z+1) - (Z-1)\ln(Z-1) + 2\ln\left[\frac{z_2-z_1}{2}\right] - 2 \right\} \quad (38)$$

Juntamente com o poço, os elementos lineares constituem importante núcleo de desenvolvimento dos elementos analíticos para modelar elementos do mundo real, tais como poços, trechos de rios, contornos de lagos e zonas de diferentes condutividades hidráulicas. Esses desenvolvimentos servem de suporte para o avanço do método por meio das novas perspectivas de desenvolvimento.

PERSPECTIVAS

A modelagem de escoamento subterrâneo em aquíferos de camada única, usando as formulações básicas do AEM é a mais comum e mais direta aplicação do Método. Ele encerra em si uma elegante implementação computacional. Entretanto, vale ressaltar que o método já possui amplo desenvolvimento para o caso de aquíferos em múltiplas camadas em regime permanente (Strack, 1989).

Além disso, existem algumas perspectivas promissoras de desenvolvimento:

- Transientes – Modelos transientes, ainda não estão completamente desenvolvidos. Entretanto, Zaadnoordijk (1988) usou uma formulação baseada na superposição de linhas duplas transientes e linhas de extração que satisfazem a Equação de Calor. Zaadnoordijk e Strack (1993) estenderam essa aproximação para incluir modelagem de infiltração devido a eventos pluviométricos.

Outra alternativa é a solução numérica da equação diferencial no tempo, por diferenças finitas. Esta aproximação tem a vantagem de poder ser combinada com os elementos existentes para o estado permanente, essa abordagem é feita por Haitjema e Strack (1985).

Uma formulação para elementos transientes usando transformada de Laplace foi apresentada por Furman e Neuman (2003).

- Desenvolvimento Matemático – é promissor o desenvolvimento de novos elementos pelo uso de novas funções de aproximação. Do ponto de vista numérico, pode-se tratar o sistema de equações final, destacando-se a abordagem por superblocos (Strack et al., 1999).
- Implementação – Do ponto de vista da implementação, o conceito de Programação Orientada a Objetos (POO) tem recebido especial atenção, sobretudo devido à aproximação conceitual entre POO e o AEM, conforme destacado por Bakker e Kelson (2000). A interação do AEM com programas de GIS (*Geographic Information System*) fornece importantes ferramentas para entrada e saída de dados, além de possibilitar acesso ao uso da tecnologia de banco de dados georreferenciados (Steward e Bernard, 2006).

IMPLEMENTAÇÃO E APLICAÇÕES

O AEM foi aplicado com sucesso para muitos problemas desde *Tennessee-Tombigbee*, de estudos em pequena escala até modelos em escalas nacionais. O método torna possível abordar questões locais, como a proteção de poços, usando modelos em escalas regionais.

A maior e mais substancial aplicação do Método de Elementos Analíticos é o Modelo para Águas Subterrâneas da Holanda (*Dutch National Groundwater Model - NAGROM*) (de Lange, 1996b). O NAGROM foi criado, usado, e atualizado por mais de 15 anos e é baseado no MLAEM (*Multi-Layer Analytic Element Model*).

O pacote WhAEM (*Wellhead Analytic Element Model*, Haitjema et al., 1995) foi desenvolvido especificamente para a Agência de Proteção Ambiental dos Estados Unidos com o propósito da proteção de campos de poços e é usado para os poços de captação de água potável, objetivando a análise do perímetro de proteção.

O *Twin Cities Metropolitan Groundwater Model* (Seaberg et al., 1997) foi construído com o MLAEM e é usado na área metropolitana de *Minneapolis* como um ponto inicial para estudos de detalhe. Uma aplicação que ilustra a habilidade do Método de Elementos Analíticos para lidar com domínios em larga escala é a modelagem da área *Yucca Mountain*, descrita por Bakker et al. (1999).

Uma variedade de programas computacionais é encontrada para modelagem com elementos analíticos. Dentre os programas comerciais destacam-se: *QUICKFLOW*, *Groundwater Flow (GFLOW)*, *Two Dimensional Analytic Model (TWODAN)*, *Single-Layer Analytic Element Model (SLAEM)*, além do já mencionado *MLAEM*. Dentre os programas de código aberto destacam-se o *SPLIT* (<http://www.groundwater.buffalo.edu>) e o *TIM* (<http://www.engr.uga.edu/~mbakker/tim.html>), que contém uma implementação baseada em Programação Orientada a Objetos. Na esfera do *SPLIT*, existe o *ArcAEM*, desenvolvido como uma extensão do programa comercial *ArcGIS*, possibilitando a interação dos dados calculados pelo *SPLIT* com as ferramentas GIS, conforme Silavisesrith e Matott (2005).

NO BRASIL

Estudos teóricos (Batista et al., 2003; Batista et al., 2005; Batista, 2006) e aplicados (Gomes e Castro, 2001; Gomes, 2002; Wendland et al., 2004; Gomes e Castro, 2005) foram desenvolvidos no Brasil.

A viabilidade de aplicação do AEM em comparação com outros métodos numéricos foi avaliada por Gomes e Castro (2002), em estudo realizado na região de aluviões no município de Ibicuitinga no estado do Ceará. O estudo de uma barreira hidráulica para contenção de chorume no aterro sanitário da cidade de São Carlos – SP foi desenvolvido por Penner et al. (2005).

Duas grandes aplicações do método devem ser destacadas: na região do Cariri, no Sul do estado do Ceará, mais precisamente no entorno das cidades de Juazeiro do Norte, Barbalha e Crato, modelada por Gomes e Castro (2005); e a região da lagoa do Bonfim, nas proximidades da cidade de Natal no Rio Grande do Norte, que foi estudada por Batista et al. (2003). Esses estudos indicam a potencialidade do método bem como apontam para a necessidade de aprofundamento e capacitação, favorecendo seu desenvolvimento e adequação a realidade brasileira.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O princípio do AEM é a sobreposição de elementos analíticos que podem ser usados para modelar características de um campo vetorial, como o

campo de descarga em um sistema de aquíferos. Cada elemento é escolhido e desenvolvido para simular uma propriedade específica do campo. Talvez, a mais importante característica do AEM seja a liberdade que oferece na escolha dos elementos; eles podem ser desenvolvidos usando técnicas de transformação conforme, integrais de *Cauchy*, análise de *Fourier* e transformadas de *Laplace*, por exemplo.

A maior desvantagem do AEM é o alto grau de esforço requerido para desenvolver elementos e implementá-los em códigos computacionais. A programação orientada a objetos tem a intenção de proporcionar a redução do esforço no desenvolvimento, além da conhecida vantagem da portabilidade de bibliotecas computacionais.

O AEM oferece algumas vantagens sobre outros métodos numéricos: a formulação analítica sugere independência de escala, flexibilidade e um alto grau de precisão. Elementos analíticos construídos como representações de funções harmônicas e a escolha adequada do contorno tornam possível a criação de modelos de fluxo de água subterrânea em grandes escalas juntamente com uma inteligente base de dados, agindo também como ponto inicial para uma variedade de estudos.

Embora não seja uma limitação fundamental para aplicação do AEM, são necessários desenvolvimentos adicionais para explorar todo o potencial do método. Por exemplo, na modelagem de fluxos transientes, o método parte atrás dos métodos numéricos discretos como métodos das diferenças finitas e elementos finitos, já bem populares.

REFERÊNCIAS

- Bakker, M. and V. Kelson (2000). The Java analytic element model: Designing and implementing an object-oriented AEM code implementation. In Proceedings of the 3rd International Conference on the Analytic Element Method (ICAEM), April 16-19, Brainerd, MN.
- Bakker, M., E. I. Anderson, N. Olsthoorn, and O. D. L. Strack, Regional groundwater modeling of the Yucca Mountain Site using analytic elements, *J. Hydrol.*, 226, 167–178, 1999.
- de Lange, W. J., NAGROM, a model for national groundwater management and regional and local studies, *Eur. Water Pollut. Control*, 6(5), 63–67, 1996.
- Furman, A., Neuman S. P., Laplace-transform analytic element solution of transient flow in porous media Adv. in Water Resources, 26(12), 1229-1237. 2003.

- Haitjema, H. M., *Analytic Element Modeling of Groundwater Flow*, Academic, San Diego, 1995.
- Haitjema, H. M., and O. D. L. Strack, An initial study of thermal energy storage in unconfined aquifers, *Tech. Rep. PNL-5818 UC-94e*, Pac. Northwest Lab., Battelle Mem. Inst., Richland, Wash., 1985.
- Haitjema, H. M., O. D. L. Strack, and S. R. Kraemer, Demonstration of the analytic element method for wellhead protection, *Tech. Rep. EPA/600/SR-94/210*, Robert S. Kerr Environ. Res. Lab., U.S. Environ. Prot. Agency, Ada, Okla., March 1995.
- Jankovic, I., High-order analytic elements in modeling groundwater flow, Ph.D. thesis, Univ. of Minn., Minneapolis, 1997.
- Muskhelishvili, N. I., *Singular Integral Equations*, Wolters-Noordhoff, Groningen, Netherlands, 1958.
- Pilatovski, V. P., *Basics of Hydromechanics of a Thin Formation*, Nedra, Moscow, 1966.
- Polubarinova-Kochina, P. Y., *Theory of Groundwater Movement*, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1962.
- Seaberg, J. K., D. D. Hansen, B. W. Block, A. R. Streitz, and M. Bakker, Development of a regional groundwater flow model for the Twin Cities, paper presented at Analytic-Based Modeling of Groundwater Flow Conference, Inst. for Inland Water Manage and Waste Water Treat., Nunspeet, Netherlands, April 1997.
- Silavisesrith, W., Matott, S., ArcAEM: GIS-Based Application for Analytic Element Groundwater, University of Buffalo, 2005.
- Steward, D. R. and Bernard, E. A. The Synergistic Powers of AEM and GIS Geodatabase Models in Water Resources Studies, *Ground Water*, p. 56-61, 2006.
- Strack, O. D. L. and H. M. Haitjema, Modeling double aquifer flow using a comprehensive potential and distributed singularities: 1. Solution for homogeneous permeability, *Water Resour. Res.*, 17(5), 1535–1549, 1981a.
- Strack, O. D. L., and H. M. Haitjema, Modeling double aquifer flow using a comprehensive potential and distributed singularities: 2. Solution for inhomogeneous permeability, *Water Resour. Res.*, 17(5), 1551–1560, 1981b.
- Strack, O. D. L., *Groundwater Mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1989. (Available from strack-consulting.com)
- Strack, O. D. L., Principles of the analytic element method, *J. Hydrol.*, 226, 128–138, 1999.
- Tong, Y., Lomboyeda, S., Hirani, A. N., Desbrun, M.. Discrete Multiscale Vector Field Decomposition. ACM Inc, p. 445-452, 2003.
- Zaadnoordijk, W. J., Analytic elements for transient groundwater flow, Ph.D. thesis, Univ. of Minn., Minneapolis, 1988.
- Zaadnoordijk, W. J., and O. D. L. Strack O. D. L., Area sinks in the analytical element method for transient groundwater flow, *Water Resour. Res.*, 29(12), 4121–4129, 1993.

NO BRASIL

- Batista, J. A. N. Modelagem de aquíferos costeiros longos através do método de elementos analíticos. Tese (Doutorado em Ciências da Engenharia Ambiental S Carlos) - Universidade de São Paulo, 204 f., 2006.
- Batista, J. A. N.; Schulz, H. E.; Wendland, E. Analytic Element Model for groundwater flow in the aquifers' recharge zone - part 1: unconfined coastal aquifers. In: XXIV Congresso Íbero-Latino Americano de Métodos Computacionais para Engenharia, 2003, Ouro Preto: UFOP, 2003.
- Batista, J. A. N.; Wendland, E.; Schulz, H. E. Acoplamento de Expressão Unidimensional de Recarga a Modelos de Elementos Analíticos. *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, v. 6, n. 1, p. 43-53, 2005.
- Gomes, C. C.; Castro, M. A. H. Método dos Elementos Analíticos para Modelagem de Fluxo de Água Subterrânea. In: XIV Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos, Aracaju. v. 1. p. 1-21, 2001.
- Gomes, C. C. Método de elementos analíticos para modelagem matemática de fluxo hídrico subterrâneo regional. . Fortaleza: Universidade Federal do Ceará (Tese de Doutorado), 2002.
- Gomes, C. C.; Castro, M. A. H. Análise Comparativa Entre a Modelagem de Aquíferos Regionais Utilizando o Método de Elementos Analíticos (SPLIT) e o Método de Diferenças Finitas (MODFLOW). In: Anais do XII Congresso Brasileiro de Águas Subterrâneas, Florianópolis-SC. v. 1. p. 1-16, 2002.
- Gomes, C. C.; Castro, M. A. H. . Método de Elementos Analíticos Aplicado No Aquífero da Região do Cariri, Ceará, Brasil. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, Porto Alegre - RS, v. 10, n. 1, p. 25-34, 2005.
- Penner, G.; Batista, J. A. N.; Schulz, H. E. Simulação de alternativas de controle hidráulico aplicadas à pluma de poluentes do antigo lixão de São Carlos baseada no método dos elementos analíticos. In: Espíndola, E.; Wendland, E. (Org.) *Série Ciências da Engenharia Ambiental Volume 4: Trajetórias e perspectivas de um curso multidisciplinar*. São Carlos: Rima, p. 323-342, 2005.
- Wendland, E.; Batista, J. A. N.; Schulz, H. E. Coupling one-dimensional recharge solution to analytic element model: an approach for coastal aquifers in Brazil. In: C. T. Miller; M. W. Farthing; W. G. Gray; G. F. Pinder. (Org.). *Computational Methods in Water Resources*. 1 ed. Amsterdam: Elsevier, v. 1, p. 405-414, 2004.

Theory and Applications of the Analytic Element Method

ABSTRACT

This article is a review of the theory and applications of the Analytic Element Method. The work presents the basic formulation of the analytic elements used for modeling two-dimensional flow fields in aquifers at steady-state. Special attention is given to the formulation of linear elements to describe rivers, drains, impermeable walls and inhomogeneities. Some topics of research in AEM are discussed. A section is dedicated to the computational implementation, focusing commercial software as well as open source codes. The paper is finished with a brief discussion about the main applications of AEM in Brazil and abroad. The conclusion is that the AEM is an important and viable method to study groundwater flow.

Keywords: *Analytic Element Method, groundwater modeling, Complex Variable Method.*