Marés Fluviais. Parte 1: Teoria

Eloi Melo Fº

Lab. Hidráulica Marítima – LAHIMAR – Depto. Eng. Sanitária e Ambiental – UFSC – Campus Trindade – Caixa Postal 5039 88040-970 Florianópolis, SC - emf@ens.ufsc.br

Recebido: 12/12/01 - revisão: 20/06/02 - aceito: 23/09/02

RESUMO

O fenômeno da maré fluvial é estudado através das equações de Saint-Venant. Um método de perturbação é utilizado para se obter uma solução analítica para o caso de uma oscilação periódica (maré) de pequena amplitude que penetra num rio de geometria simplificada cujo escoamento básico se dá em regime permanente uniforme sub-crítico. A solução é correta até ordem (ε) (com, $\varepsilon = a/h_o$ onde a = amplitude da maré na foz e h_o = altura d'água no rio) porém inclui um efeito permanente em ordem (ε^2). A solução é estabelecida em função de três parâmetros adimensionais: ε, Fr (número de Froude) e M (análogo ao número de Reynolds e que mede a magnitude relativa das forças de inércia e de atrito no escoamento induzido pela maré). Exemplos de aplicação da solução e uma investigação de alguns aspectos do fenômeno são apresentados num artigo subseqüente.

Palavras-chave: maré; fluvial; modelos.

INTRODUÇÃO

Ao longo da enorme área continental brasileira é grande o número de bacias hidrográficas cujos trechos finais incluem a zona costeira. Em muitos casos, esses trechos fazem parte de uma região de baixa declividade, a chamada planície costeira, onde o escoamento (subcrítico) do rio fica sujeito aos efeitos do mar.

Um efeito importante diz respeito ao encontro das águas doce, trazida do continente pelo rio, e salina, proveniente do oceano. As variações de densidade daí decorrentes dão origem a uma gama de fenômenos interessantes e peculiares, conferindo a essa zona de transição entre o rio e o mar identidade própria: trata-se da zona estuarina ou, simplesmente, "estuário". De fato, Cameron e Pritchard (1963) definem um estuário como "um corpo d'água costeiro, semi-confinado, com uma conexão livre com o mar aberto e no qual a água do mar é mensuravelmente diluída com água doce proveniente da drenagem de terra".

O estabelecimento do local onde "termina" o rio e "começa" o estuário não é trivial. Se adotarmos a definição acima, seria possível delimitar o início do estuário como o ponto a partir do qual não há mais salinidade perceptível na água. Ocorre que o processo de mistura das águas doce e salgada no interior do estuário pode ser bastante complexo e variável. Por exemplo, a estrutura vertical de densidade pode ir desde um caso onde há boa mistura em toda a coluna d'água, até um no qual as águas praticamente não se misturam, havendo a formação de duas camadas de densidades praticamente uniformes separadas por uma zona de rápida mudança, conhecida como picnoclina. As peculiaridades do estuário podem também dar origem a situações nas quais o perfil de velocidades do escoamento apresenta inversão de sentido ao longo da coluna d'água, com a formação de uma cunha salina que se prolonga estuário adentro junto ao fundo e por sobre a qual a água doce do rio escoa. Em qualquer dos casos, todavia, a fronteira rio-estuário – definida em função da presença de sal na água – não é estática, mas apresenta variações de posição em função da maré e da vazão do rio, por exemplo.

Esta brevíssima digressão sobre alguns dos mecanismos hidrodinâmicos relacionados às variações de densidade da massa d'água num estuário objetiva ilustrar a complexidade do escoamento nesse tipo de corpo d'água, entretanto, não é este o foco do presente trabalho. A questão que se coloca é a seguinte: estaria o efeito do mar sobre um rio costeiro restrito à penetração e/ou mistura de águas salinas no interior do estuário?

Para refletir sobre a questão é interessante analisar o problema sob uma ótica diferente: a ótica do "rio". Simplificadamente, um rio pode ser entendido como um canal "inclinado" no qual o escoamento se processa sob a ação contínua e direta da gravidade num regime puramente "fluvial" (Melo Fº, 1998), ou seja, com a água simplesmente "descendo uma ladeira". Supondo, para efeito de raciocínio, que a vazão de água a montante seja mantida constante, o escoamento na parte superior da bacia hidrográfica dar-se-á em regime *permanente*. No trecho final da bacia, o qual pode conter o estuário, mas que não se restringe unicamente a ele, o rio encontrará um imenso "reservatório" – o mar – cujo nível obedece a fatores não relacionados ao rio. Admitindo que este trecho seja parte da planície costeira, é razoável supor que o escoamento aí seja sub-crítico em vista da baixa declividade do terreno e, por conseguinte, controlado por jusante. Sob a ótica do rio, portanto, o efeito esperado é que a variação de nível imposta pelo mar na foz perturbe o escoamento a montante, a exemplo do que ocorre quando um rio encontra o reservatório de uma barragem.

No caso do reservatório, entretanto, o nível *estático* das águas mantém o escoamento permanente e a solução do problema, conhecida há várias décadas, toma a forma de uma *curva de remanso* na qual o nível e a velocidade da água variam espacialmente de forma progressiva desde o reservatório até uma certa distância a montante (ver, por exemplo, Chow, 1959).

Diferentemente do reservatório, o nível d'água no mar *oscila periodicamente* por conta da maré oceânica e, portanto, a perturbação do escoamento do rio a montante *não* pode ser do tipo permanente como numa curva de remanso. De fato, as oscilações periódicas de nível causadas pela maré à jusante darão origem necessariamente a um *escoamento fluvial com características oscilatórias* e, por conseguinte, *não-permanente*; essa é a *maré fluvial*, tema do presente trabalho. A maré fluvial, na verdade, pode ser interpretada como a manifestação da *penetração* da onda de maré através do estuário até o interior do rio, fenômeno este passível de acontecer em qualquer rio que tenha conexão com o mar e que reúna as condições propícias para tal.

Pelo cenário apresentado acima, já é possível perceber que a dinâmica que opera nesse tipo de fenômeno tem como principais agentes a gravidade, o atrito e (possivelmente) a inércia, tendo as forças provenientes de uma eventual estratificação das águas no estuário uma participação localizada e, em muitos casos, secundária. Como será visto adiante, o efeito da maré no escoamento fluvial a montante pode extrapolar em muito os limites do estuário (se considerarmos esse limite segundo a definição classicamente aceita) sendo, portanto, um fenômeno que adentra a própria bacia hidrográfica do rio.

Certamente no Brasil a manifestação mais conhecida do fenômeno em questão é a famosa *pororoca* – a dramática penetração da onda de maré em rios da região amazônica, geralmente na forma de uma seqüência de sobre-elevações abruptas do nível d'água que se movem rio acima causando devastação. Tal fenômeno, conhecido na literatura de língua inglesa como *tidal bore*, é também encontrado em outros rios do mundo como, por exemplo, no Tsientang na China, no Severn na Inglaterra e no Sena na França (onde é conhecido como Mascaret).

Apesar do interesse e da curiosidade que ela desperta, a *pororoca* é uma forma bastante rara do fenômeno em estudo, pois necessita de uma conjugação de condições muito especiais para existir. A situação na vasta maioria dos rios que chegam ao mar – tanto no Brasil quanto no resto do mundo – é uma na qual a maré provoca apenas *perturbações* no escoamento fluvial *sem* a formação de *tidal bores* ou *pororocas*. É este o caso em rios caudalosos submetidos a marés pequenas como, por exemplo, o rio Itajaí em Santa Catarina, o qual motivou originalmente esta investigação.

Por motivo de clareza e organização, o presente estudo foi dividido em dois artigos complementares. Nesta primeira parte, apresenta-se em detalhes a metodologia matemática utilizada para a obtenção de uma solução analítica para o problema da maré fluvial num rio de geometria simplificada. Na segunda parte, a solução é ilustrada e, a seguir, utilizada para investigar alguns aspectos importantes do fenômeno da maré fluvial ainda pouco explorados na literatura.

ESTUDOS TEÓRICOS ANTERIORES

Um levantamento de estudos teóricos sobre marés fluviais evidenciou que este tópico não tem recebido muita atenção. Talvez a principal referência sobre o assunto continue sendo o livro texto de Dronkers (1964) no qual o problema da maré em rios e zonas costeiras é analisado segundo três abordagens distintas: o método harmônico, o método das características e métodos numéricos. Apesar da sua abrangência, o autor considera o livro de Dronkers de leitura um pouco difícil, sendo os métodos lá apresentados um tanto inadequados para os objetivos deste trabalho.

Nas décadas de 70 e 80, o tópico marés fluviais despertou o interesse de pesquisadores canadenses, provavelmente em vista da existência naquele país de rios importantes sujeitos a esse fenômeno, como os rios São Lourenço e Fraser. De fato, foi da escola canadense que vieram as duas principais contribuições teóricas ao tema nesse período.

Na primeira, Le Blond (1978) apresenta um estudo no qual o fenômeno da maré em rios rasos é descrito através de um modelo difusivo, onde o amortecimento da maré é visto como a difusão de um sinal que é introduzido à jusante, e não como um problema de propagação de ondas. A justificativa para tal aproximação reside, segundo Le Blond, no fato de que o escoamento, no caso de rios rasos, é dominado fortemente pelas forças de atrito. Entretanto, o método usado por aquele autor para obtenção das equações governantes é baseado numa imposição, a priori, de um determinado balanço de forças na equação de momentum que parece por demais restritivo para ser generalizado.

Na segunda contribuição, Godin (1985) apresenta uma abordagem teórica baseada em equações similares às de Saint-Venant, na qual a maré fluvial é modelada como uma onda progressiva atenuada que se propaga rio acima a partir da foz. Apesar do equacionamento do fenômeno ter sido feito num contexto bastante geral, Godin (1985) optou por uma solução aproximada das equações, sob a hipótese de que o atrito seria a força dominante no interior do rio. Esta solução aproximada foi então utilizada para investigar o efeito que variações na descarga do rio teriam na atenuação da onda de maré.

A principal restrição ao excelente trabalho de Godin (1985) reside na maneira pouco formal com a qual as equações foram manipuladas. Godin (1985) não evidenciou de forma clara que a solução seria obtida através de uma técnica de perturbação das equações governantes, embora este fato estivesse implícito na metodologia por ele utilizada. Esta peculiaridade da abordagem de Godin (1985) tem conseqüências importantes para o desenvolvimento do problema, conforme mostrado em detalhes neste artigo.

Num trabalho posterior, Vongvisessonjai e Rojanakamthorn (1989) investigaram aspectos da maré fluvial observados no rio Chao Phraya, o mais importante rio da Tailândia. Dois aspectos desse estudo merecem menção. O primeiro foi o emprego de uma técnica de perturbação para a solução das equações governantes (técnica similar à usada no presente trabalho) e o segundo, o fato dos autores tentarem incluir a possibilidade da corrente do rio causar um efeito Doppler na freqüência da onda de maré. A solução analítica encontrada por Vongvisessonjai e Rojanakamthorn (1989), entretanto, não considerou o caráter periódico da maré de forma consistente e a celeridade da onda foi estipulada arbitrariamente como $\sqrt{gh_o}$ o que impossibilita incluir o efeito da fricção na velocidade de propagação da onda. A solução com o efeito Doppler também não se mostrou compatível com as medições de maré no rio Chao Phraya, tendo sido descartada. Outros aspectos apresentados no artigo tiveram sua validade questionada por Stronach e Murty, (1989).

Finalmente, o trabalho mais recente encontrado na literatura foi o de Godin (1999) onde se apresenta uma revisão do estado da arte sobre o assunto da maré fluvial.

ESCOPO DO PRESENTE TRABALHO

O presente trabalho insere-se no contexto sumarizado acima da seguinte maneira. O problema da maré fluvial é equacionado de forma similar à de Godin (1985), porém utilizando explicitamente as equações de Saint-Venant tradicionalmente usadas em Hidráulica Fluvial. Essa abordagem reflete a ênfase "fluvial" que se deseja dar ao problema, na qual o escoamento *do rio* assume um papel dominante. Diferentemente de Godin (1985), neste trabalho emprega-se o método de perturbação para encontrar soluções analíticas bem ordenadas do problema, tomando partido da periodicidade intrínseca do fenômeno e do fato que não se espera inversão de fluxo no trecho fluvial do canal. O presente estudo, portanto, pode ser visto como uma extensão do trabalho de Godin (1985) na qual se utiliza uma versão aperfeiçoada da técnica de perturbação usada por Vongvisessonjai e Rojanakamthorn (1989). Uma versão simplificada da presente teoria foi publicada pelo autor em 1999 (Melo e Jorden, 1999).

EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS: MÉTODO DE SOLUÇÃO

Inicialmente, vamos admitir como válidas as seguintes hipóteses básicas:

i. O rio é um *canal fluvial* (isto é, inclinado) de *largura* e *declividade constantes*, com águas de *densidade uniforme* ao longo da coluna d'água e no qual a *largura* >> *altura d'água*.
ii. A maré provoca perturbações numa situação de equilíbrio dada pelo escoamento *permanente uniforme subcrítico* no rio. Tais perturbações devem ser *pequenas o suficiente* de forma a provocar apenas variações na velocidade da corrente sem, no entanto, ocasionar *inversão* de fluxo em nenhum local do rio.
iii. A maré é representada de forma simplificada por uma única componente periódica no tempo, a qual é capaz de propagar-se rio acima a partir da foz *sem sofrer reflexão.*

Nesse ponto é necessário comentar o uso que é feito das palavras "maré" e "foz" no presente trabalho. O termo "maré" é usado para indicar *qualquer oscilação periódica do nível d'água sem restrição quanto ao período da mesma.* Essa interpretação "liberal" do termo difere da definição clássica de "maré" usada em oceanografia, a qual se refere exclusivamente a oscilações causadas por forças de origem astronômicas e, portanto, com períodos bem definidos. A palavra "foz", por sua vez, é usada para indicar o ponto a partir do qual o escoamento fluvial se estabelece. O marco de referência para identificar esse ponto é a *não-inversão de sentido da corrente* (refletindo a predominância do rio). Portanto, no presente contexto, a "foz" do rio pode não coincidir com a zona de interseção do eixo do rio com a linha de costa. Dependendo da situação, a "foz" pode se situar no interior do rio, dentro ou após o estuário.

Para casos que atendam às três hipóteses acima, o fenômeno da penetração da maré num rio pode ser descrito pelas equações de Saint-Venant:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hu)}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = gS_o - g\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{Ku^2}{h} \tag{2}$$

onde x é a direção do fundo do canal, positivo para jusante a partir da foz; u é a velocidade média na seção na dir-x; S_o é a declividade do canal em relação à horizontal e positiva quando inclinada no sentido do escoamento; h é a altura d'água total a partir do fundo; g é a aceleração da gravidade (ver Figura 1). K é um coeficiente (adimensional) de atrito dado – de acordo com a parametrização de Chezy para as forças de resistência – por:

$$K = g / C_f^2 \tag{3}$$

com C_f = coeficiente (dimensional) de Chezy, função das características do fundo do canal.

As hipóteses (ii.) e (iii.) impõem as seguintes condições de contorno ao problema:

$$h_o u_o = q \quad \text{em} \quad x = -\infty \tag{4}$$

onde h_o e u_o são, respectivamente, a altura da água e a velocidade média do escoamento permanente uniforme básico do rio e q é a vazão por unidade de largura (vazão específica).

$$h(x,t) = h_o + a\cos(st) \quad \text{em} \quad x = 0 \tag{5}$$

onde a e s = 2π/T são a amplitude e a freqüência da oscilação de nível imposta na foz (cujo período é T).

Para resolver o problema colocado acima, empregar-se-á uma técnica de solução por perturbação muito utilizada na solução de sistemas de equações diferenciais não-lineares (ver, por exemplo, Vongvisessonjai e Rojanakamthorn, 1989). De acordo com essa técnica, supõe-se que a solução completa possa ser expressa como uma superposição de soluções parciais dispostas seqüencialmente em ordem decrescente de magnitude, sendo a ordem de grandeza de cada termo medida explicitamente em função de um parâmetro de ordenamento (ε). A idéia básica da técnica consiste em utilizar esta expansão em série da solução para transformar as equações diferenciais não-lineares originais num conjunto ordenado de equações diferenciais *lineares* de solução mais simples. O grau de precisão da solução final será tão melhor quanto maior for o número de soluções parciais incorporadas à série.

Assim, vamos admitir que a altura da água [h(x,t)] e a velocidade da corrente [u(x,t)] do rio sob o efeito da maré possam ser expressas da seguinte forma:

$$h(x,t) = h_o + O(\varepsilon)\eta_1(x,t) + O(\varepsilon^2)\eta_2(x,t) + O(\varepsilon^3) \tag{6}$$

$$u(x,t) = u_o + O(\varepsilon)u_1(x,t) + O(\varepsilon^2)u_2(x,t) + O(\varepsilon^3) \tag{7}$$

onde, $\eta_{1,2,...}$ e $u_{1,2,...}$ são soluções parciais; ε é o *parâmetro de ordenamento* das soluções parciais o qual explicita a *ordem de grandeza* [$O(\varepsilon^n)$] de cada termo da expansão. Observa-se, por exemplo, que o significado de $u_n/u_o = O(\varepsilon^n)$ é o de que u_n é de magnitude (ε^n) vezes *menor* que u_o e assim sucessivamente.

Substituindo as Expansões (6) e (7) nas equações de Saint-Venant e, a partir de agora, omitindo o símbolo O para simplificar a notação, obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[h_o + (\varepsilon)\eta_1 + (\varepsilon^2)\eta_2\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[h_o + (\varepsilon)\eta_1 + (\varepsilon^2)\eta_2\right]\left[u_o + (\varepsilon)u_1 + (\varepsilon^2)u_2\right]\right\} = O(\varepsilon^3) \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[u_o + (\varepsilon)u_1 + (\varepsilon^2)u_2\right] + \left[u_o + (\varepsilon)u_1 + (\varepsilon^2)u_2\right]\frac{\partial}{\partial x}\left[u_o + (\varepsilon)u_1 + (\varepsilon^2)u_2\right] = gS_o - g\frac{\partial}{\partial x}\left[h_o + (\varepsilon)\eta_1 + (\varepsilon^2)\eta_2\right] - \frac{K}{h_o}\left[1 - (\varepsilon)\frac{\eta_1}{h_o} - (\varepsilon^2)\frac{\eta_2}{h_o} + (\varepsilon^2)\frac{\eta_1}{h_o}\right]\left[u_o + (\varepsilon)u_1 + (\varepsilon^2)u_2\right]^2 + O(\varepsilon^3) \tag{9}$$

onde uma expansão binomial do tipo $(1+\alpha)^{-1} = 1 - \alpha + O(\alpha^2)$, para $\alpha < 1$, foi usada para aproximar o termo de atrito.

As Equações (8) e (9) formam a base para a obtenção do *conjunto de equações lineares* desejado, bastando para isso agrupar os termos de acordo com suas ordens de magnitude medidas por (ε).

SOLUÇÃO DE ORDEM (1): ESCOAMENTO PERMANENTE UNIFORME NO RIO

A primeira aproximação para o problema vem das equações de primeira ordem:

$$O(1): \quad \frac{\partial(h_o u_o)}{\partial x} = 0 \tag{10}$$

$$S_o - \frac{u_o^2}{C_f^2 h_o} = 0 \tag{11}$$

Cuja solução, conforme se previa, corresponde a um simples *escoamento permanente uniforme*, no qual u_o e h_o têm valores constantes dados pela solução das equações algébricas abaixo:

$$h_o = \left(\frac{q}{C_f S_o^{1/2}}\right)^{2/3} \tag{12}$$

$$u_o = \frac{q}{h_o} \tag{13}$$

onde q, a vazão específica do rio, é um dado do problema.

SOLUÇÃO DE ORDEM (ε): PROPAGAÇÃO DA ONDA DE MARÉ NO INTERIOR DO RIO

O primeiro efeito da maré se manifesta em O(ε), sendo obtido da solução das equações:

$$O(\varepsilon): \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial t} + h_o\frac{\partial u_1}{\partial x} + u_o\frac{\partial \eta_1}{\partial x} = 0 \tag{14}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_0\frac{\partial u_1}{\partial x} + g\frac{\partial \eta_1}{\partial x} - \frac{K u_o^2 \eta_1}{h_o^2} + \frac{2K u_o u_1}{h_0} = 0 \tag{15}$$

Para encontrar tal solução, os seguintes passos são dados. Supondo inicialmente que as dependências espacial e temporal da solução possam ser separadas, e observando-se que a hipótese (iii.) requer funções periódicas no tempo, as seguintes formas para η_1 e u_1 são admitidas como válidas:

$$\eta_1(x,t) = \mathrm{Re}\{h_1(x)e^{ist}\} \tag{16}$$

$$u_1(x,t) = \mathrm{Re}\{u_1(x)e^{ist}\} \tag{17}$$

onde o símbolo Re{ } representa a parte *Real* da função complexa que segue; $h_1(x)$ e $u_1(x)$ são as funções (complexas) que descrevem a estrutura espacial da perturbação da altura da água e da corrente provocadas pela maré. Note que este procedimento permite eliminar as derivadas temporais, já que $\partial\eta_1/\partial t = is\eta_1$ e $\partial u_1/\partial t = isu_1$.

Deve-se salientar que s corresponde à freqüência *absoluta* (isto é, medida a partir de um ponto *fixo*) da maré na foz, porém *já no interior* do rio. Como ressaltado por Vongvisessonjai e Rojanakamthorn (1989), em teoria, s pode diferir da freqüência da maré no mar (isto é, fora do rio) em vista de um possível efeito Doppler causado pela corrente u_o do rio. Tal fato, no entanto, é irrelevante na presente situação, uma vez que u_o é constante em todo o rio e, por conseguinte, não é possível haver alteração na freqüência absoluta por efeito Doppler ao longo da propagação. Além disso, conforme alertado por Vongvisessonjai e Rojanakamthorn (1989), dados de campo não confirmam a existência de tal efeito.

Explicitando-se a seguir o valor de $\partial u_1/\partial x$ em (14) tem-se:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{is}{h_o}\eta_1 - \frac{u_o}{h_o}\frac{\partial\eta_1}{\partial x} \tag{14-bis}$$

Substituindo-se este resultado em (15), resulta:

$$\left(is + \frac{2Ku_o}{h_o}\right)u_1 + \left(g - \frac{u_o^2}{h_o}\right)\frac{\partial\eta_1}{\partial x} - \\ -\left(\frac{isu_o}{h_o} + \frac{Ku_o^2}{h_o^2}\right)\eta_1 = 0 \tag{18}$$

A expressão acima ainda possui um termo em u_1 o qual, entretanto, pode ser eliminado fazendo a derivada em relação a x e substituindo-se novamente a Expressão (14-bis) para o termo $\partial u_1/\partial x$. Fatorando-se a função temporal, chega-se à seguinte equação diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes para $h_1(x)$:

$$\left(g - \frac{u_o^2}{h_o}\right)\frac{d^2h_1}{dx^2} - \left(\frac{3Ku_o^2}{h_o^2} + i\frac{2su_o}{h_o}\right)\frac{dh_1}{dx} + \\ +\left(\frac{s^2}{h_o} - i\frac{2sKu_o}{h_o^2}\right)h_1 = 0 \tag{19}$$

A solução dessa equação que atende às condições de contorno (4) e (5) – isto é, uma onda progressiva que se atenua ao avançar rio *acima* a partir da foz (logo com $x < 0$) – é: $h_1(x) = ae^{kx}$, onde a é uma constante a ser especificada. Substituindo-se esta função exponencial em lugar de $h_1(x)$ na Equação (19) obtém-se uma equação algébrica de segundo grau para o *número complexo* k, cuja solução é:

$$k = k_r + ik_i = \left(\frac{s}{u_o}\right)\cdot\left[\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}\right] \tag{20}$$

onde:

$$A = \left(\frac{gh_o}{u_o^2} - 1\right)$$

$$B = -\left(\frac{3Ku_o}{h_o s} + i2\right)$$

$$C = \left(1 - i\frac{2Ku_o}{h_o s}\right) \tag{21}$$

são constantes determinadas a partir dos dados de entrada.

Vale ressaltar que, até este ponto, a menos de questões de ordem organizacional, a abordagem do problema é fundamentalmente idêntica à de Godin (1985) (por exemplo, as Equações 18 e 19 acima correspondem às Equações 10 e 11 daquele autor, uma vez feitas as adaptações de sinais devidas a uma diferença na orientação do eixo-x). Entretanto, a partir daqui, o presente trabalho toma um rumo diferente. Godin (1985) opta por usar uma forma aproximada de solução para (20), enquanto que aqui não será feita nenhuma aproximação na determinação do parâmetro k.

Nas Expressões (21), nota-se o aparecimento de dois números adimensionais. O primeiro é o bem conhecido número de Froude relativo ao escoamento não perturbado:

$$Fr = \frac{u_o}{\sqrt{gh_o}} \tag{22}$$

que pode ser interpretado como uma relação entre as forças de inércia e as forças de pressão (na dir-x) presentes no escoamento e que serve como indicativo de quão subcrítico (nesse caso) o escoamento é. O número de Froude aparece na constante A, indicando que a solução acima não se aplica quando o escoamento básico se dá em regime crítico – caso este excluído do presente trabalho pela hipótese (ii.).

O segundo parâmetro adimensional é o número M, dado por:

$$M = \frac{h_o s}{Ku_o} \tag{23}$$

Uma interpretação física para este número adimensional pode ser obtida da seguinte forma. Analisando o primeiro e o último termo da equação original de momentum de Saint-Venant (Equação 2) à luz da expansão em série proposta, pode-se inferir que a ordem de grandeza das forças de inércia e das forças de atrito relevantes para o fenômeno da penetração da maré no rio são, respectivamente, su_1 e Ku_ou_1/h_o. Assim, a ordem de grandeza da relação entre essas forças é:

$$\frac{\text{inercia}}{\text{atrito}} = O\left(\frac{su_1}{Ku_o u_1/h_o}\right) = O\left(\frac{h_o s}{Ku_o}\right) = O(M) \quad \text{(23-bis)}$$

Sob esta ótica, M pode ser interpretado como um indicador do tipo de regime atuante neste fenômeno que poderia variar, a princípio, desde um regime controlado predominantemente pelo atrito (M < 1) até outro controlado predominantemente pela inércia (M > 1).

Ainda com relação à Equação (20), é importante observar o aparecimento da grandeza dimensionalλ, dada por:

$$\lambda = \frac{u_o}{s} \tag{24}$$

a qual pode ser interpretada como uma escala de comprimento *intrínseca* da maré fluvial e que pode ser usada como referência para o problema em questão. Com efeito, é possível re-escrever (20) na seguinte forma alternativa:

$$k = k_r + ik_i = \lambda^{-1} f(Fr, M) \tag{25}$$

onde f é uma função complexa dos números adimensionais Fr e M exclusivamente, dada por:

$$f = f_r + if_i = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \tag{26}$$

com as constantes A, B e C expressas agora em termos de Fr e M por:

$$\begin{aligned} A &= (Fr^{-2} - 1) \\ B &= -(3M^{-1} + i2) \\ C &= (1 - i2M^{-1}) \end{aligned} \tag{27}$$

Observa-se que, de acordo com (25), $\lambda k_r = f_r$ e $\lambda k_1 = f_1$, portanto, f pode ser interpretado como o *número de onda adimensional* da maré fluvial. A possibilidade de se adimensionalizar completamente a solução será explorada mais adiante.

O sinal *positivo* da raiz em (20) e (26) foi escolhido de forma que f e, conseqüentemente, k pertençam ao primeiro quadrante do plano complexo (o que implica em valores *positivos* para k_r e k_i) correspondendo ao caso de uma onda que se *atenua* à medida que se propaga *para montante* (a raiz *negativa* colocaria f e k no terceiro quadrante, representando uma onda atenuada que se propaga *para jusante*, um caso fisicamente possível que, porém, foi descartado no presente problema pela hipótese iii. a qual excluiu reflexão da onda maré de volta para o oceano).

A solução do problema de $O(\varepsilon)$ para a perturbação do nível d'água é, portanto:

$$\begin{aligned} \eta_1(x,t) &= \operatorname{Re}\left\{ae^{kx+ist}\right\} = \operatorname{Re}\left\{(ae^{k_r x})e^{i(k_i x+st)}\right\} = \\ &= (ae^{k_r x})\cos(k_i x + st) \end{aligned} \tag{28}$$

sendo k_r e k_i dados por (20) ou, alternativamente, por (25) e (26). A constante a acima é a *amplitude de oscilação da maré na foz*, que é um dos dados do problema.

Observando-se que o parâmetro de ordenamento, ε, corresponde à ordem de magnitude da solução η_1 em relação a h_o, verifica-se que:

$$\varepsilon = \frac{a}{h_o} \tag{29}$$

o qual, de acordo com a hipótese (ii.), deve satisfazer a $\varepsilon << 1$.

Os detalhes desta solução serão ilustrados e discutidos na continuação do presente artigo (Parte 2); porém, dois resultados importantes merecem desde já ser destacados:

a. k_r – a parte real do parâmetro k – comanda a *intensidade do amortecimento* da maré no interior do rio.
b. k_i – a parte imaginária do parâmetro k – determina o comprimento da onda (L) no interior do rio e, portanto, controla também a velocidade de propagação da maré (C_M) rio acima uma vez que:

$$C_M = \frac{L}{T} = \frac{s}{k_i} \tag{30}$$

A variação da velocidade da corrente do rio provocada pela maré (u_1) pode agora ser obtida usando-se a solução (28) na equação de conservação da massa (14-bis) fazendo também uso da Expressão (17). O resultado é:

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= -(be^{k_r x})\operatorname{Re}\left\{e^{i(k_i x+st+\theta)}\right\} = \\ &= -(be^{k_r x})\cos(k_i x + st + \theta) \end{aligned} \tag{31}$$

onde b é a *amplitude da oscilação da velocidade da corrente na foz* causada pela maré e θ é uma *diferença de fase* entre o nível da água e a velocidade da corrente, dados por:

$$b = u_o(D\frac{a}{h_o}) \tag{32}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{k_r}{\lambda|k|^2 + k_i}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{f_r}{|f|^2 + f_i}\right) \qquad (33)$$

onde:

$$D = \sqrt{1 + \left(\frac{1+2\lambda k_i}{|\lambda k|^2}\right)} = \sqrt{1 + \left(\frac{1+2f_i}{|f|^2}\right)} \qquad (34)$$

e $|k|^2 = k_r^2 + k_i^2$ e $|f|^2 = f_r^2 + f_i^2$.

Como uma breve verificação da consistência desse resultado, pode-se analisar um caso limite onde $S_o = 0$, no qual o canal fluvial se torna um canal de maré e, portanto, a velocidade permanente do canal se anula ($u_o = 0$). Curiosamente, a inexistência de uma corrente ambiente torna o efeito do atrito desprezível nessa ordem de aproximação. As soluções, Equações (28) e (31), simplificam-se, nesse caso, para:

$$\eta_1(x,t) = a\cos\left[s\left(\frac{x}{\sqrt{gh_o}} + t\right)\right] \qquad (35)$$

e:

$$u_1(x,t) = -\sqrt{gh_o}\,(a/h_o)\cos\left[s\left(\frac{x}{\sqrt{gh_o}} + t\right)\right] \qquad (36)$$

reproduzindo assim a solução para uma onda longa progressiva de pequena amplitude num canal de maré com atrito desprezível (ver, por exemplo, Melo F^o, 1998).

Finalmente, a diferença de fase θ entre o nível da água e a velocidade da corrente, que aparece na Equação (31), é uma decorrência das forças de atrito atuantes no canal fluvial. O mesmo tipo de comportamento é encontrado no caso de uma onda longa periódica que se propaga num canal de fundo horizontal com corrente nula, mas sob o efeito de forças de atrito *não* desprezíveis, como mostrado em Dean & Dalrymple (1984, pág. 153).

SOLUÇÃO PERMANENTE DE ORDEM (ε^2): DETERMINAÇÃO DO EFEITO DA MARÉ NO NÍVEL MÉDIO DO RIO

A propagação da onda de maré no interior do rio provoca dois efeitos de origem não-linear em ordem (ε^2). O primeiro é o aparecimento de um harmônico da componente principal da maré com freqüência 2s e número de onda 2k – conhecido na literatura de língua inglesa como *over tide* (Dronkers, 1964) – o qual distorce a forma senoidal da onda de maré, tornando a subida do nível mais rápida que a descida. O segundo consiste numa variação do *nível médio* do rio que, portanto, não é função do tempo.

A distorção de forma acima referida é importante de ser determinada no caso de marés de grande amplitude que sejam capazes de se propagar por distâncias correspondentes a alguns comprimentos de onda no interior do rio. No caso de marés de pequena amplitude, foco do presente trabalho, a determinação da variação do *nível médio* do rio causada pela maré já é suficiente para atingir os objetivos pretendidos.

As equações independentes do tempo que regem o comportamento do *nível médio* do rio corretas até O(ε^2), podem ser obtidas fazendo-se uma promediação no período T nas equações de O(ε^2) extraídas de (8) e (9). Definindo inicialmente $\overline{\psi}$ como a média em T de uma grandeza genérica ψ tal que:

$$\overline{\psi} = \frac{1}{T}\int_0^T \psi(t)dt \qquad (37)$$

e utilizando o conhecimento prévio sobre o comportamento da solução em O(ε^2) acima aludido, tem-se que:

$$\overline{h}(x,t) = \overline{h_o} + (\varepsilon)\overline{\eta_1}(x,t) + (\varepsilon^2)\overline{\eta_2}(x,t) =$$
$$= h_o + (\varepsilon^2)\overline{\eta_2}(x) + O(\varepsilon^3) \qquad (38)$$

$$\overline{u}(x,t) = \overline{u_o} + (\varepsilon)\overline{u_1}(x,t) + (\varepsilon^2)\overline{u_2}(x,t) =$$
$$= u_o + (\varepsilon^2)\overline{u_2}(x) + O(\varepsilon^3) \qquad (39)$$

onde, $\overline{\eta_2}(x)$ e $\overline{u_2}(x)$ correspondem a desvios do *nível médio* e da *velocidade média* do rio em relação à condição básica h_o e u_o. Observa-se que os termos *variáveis no tempo* – tanto em O(ε) quanto em O(ε^2) – desapareceram após a promediação por terem *média nula* no período T, uma vez que suas dependências temporais são proporcionais a e^{ist} e e^{i2st}, respectivamente.

Realizando a promediação de cada termo das equações de ordem O(ε^2) conforme indicado acima obtém-se o par de equações independentes do tempo desejado:

$$O(\varepsilon^2): \quad u_o\frac{d\overline{\eta_2}}{dx} + h_o\frac{d\overline{u_2}}{dx} + \frac{d\left(\overline{u_1\eta_1}\right)}{dx} = 0 \qquad (40)$$

$$\overline{u_1\frac{\partial u_1}{\partial x}} + u_o\frac{d\overline{u_2}}{dx} + g\frac{d\overline{\eta_2}}{dx} +$$
$$+\frac{K}{h_o}\left(\overline{u_1^2} + 2u_o\overline{u_2} - \frac{2u_o}{h_o}\overline{u_1\eta_1} - \frac{u_o^2}{h_o}\overline{\eta_2}\right) = 0 \qquad (41)$$

O objetivo agora é encontrar uma solução analítica para estas equações diferenciais, como feito anteriormente para O(ε). Inicialmente observa-se que a Equação (40) pode ser integrada diretamente, fornecendo:

$$\overline{u_2} = -\frac{u_o}{h_o}\overline{\eta_2} - \frac{1}{h_o}\overline{u_1\eta_1} - C_o \qquad (42)$$

onde C_o é uma constante de integração.

Para conseguir uma única equação em $\overline{\eta_2}$, substitui-se em (41) o valor de $\partial\overline{u}_2/\partial x$ obtido de (40) e o próprio $\overline{u}_2$ dado por (42). O resultado pode ser escrito na forma:

$$g\left[1 - Fr^2\right]\frac{d\overline{\eta_2}}{dx} - \left[\frac{3Ku_o^2}{h_o^2}\right]\overline{\eta_2} = R(x) + S(x) + 2u_oC_o \qquad (43)$$

onde:

$$R(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{u_o}{h_o}\overline{u_1\eta_1} - \frac{\overline{u_1^2}}{2}\right] \qquad (44)$$

$$S(x) = \frac{K}{h_o}\left(\frac{4u_o}{h_o}\overline{(u_1h_1)} - \overline{u_1^2}\right) \qquad (45)$$

são *funções conhecidas* a partir da solução de $O(\varepsilon)$. Assim, substituindo as soluções para η_1 – Equação (28) – e u_1 – Equação (31) – nas expressões para R(x) e S(x) e efetuando as promediações indicadas, chega-se, após alguma álgebra, à seguinte equação diferencial não-homogênea de primeira ordem com coeficientes constantes para $\overline{\eta_2}(x)$:

$$\frac{d\overline{\eta_2}}{dx} - P\overline{\eta_2} = -GD^2\left(\frac{a^2}{h_o}\right)e^{2k_rx} + C_1 \qquad (46)$$

onde C_1 é uma nova constante de integração, a qual incorporou C_o, e P e G são constantes *positivas definidas* dadas por:

$$P = \frac{3K}{h_oA} = \frac{3}{\lambda AM} \qquad (47)$$

e:

$$G = \left(\frac{1}{A}\right)\left[\frac{\cos\theta}{D}\left(k_r + 2\frac{K}{h_o}\right) + \frac{1}{2}\left(k_r + \frac{K}{h_o}\right)\right] =$$

$$= \left(\frac{1}{\lambda A}\right)\left[\frac{\cos\theta}{D}\left(f_r + \frac{2}{M}\right) + \frac{1}{2}\left(f_r + \frac{1}{M}\right)\right] \qquad (48)$$

Antes de apresentar a solução da Equação (46), é interessante observar o significado físico das duas funções R(x) e S(x) acima. S(x), representa claramente uma força de *atrito* que se *opõe* ao movimento permanente. Já R(x) desempenha o papel de uma *força* (média no período e na coluna d'água) que a onda de maré faz nas águas do rio. Esta força pode ser entendida da seguinte forma. Toda onda (progressiva) transporta energia e *momentum* os quais são função da altura da onda. Se o *fluxo médio de momentum* associado a uma dada onda – conhecido como "Tensão de Radiação" (Longuet-Higgins e Stewart, 1964) – apresentar um *gradiente*, haverá o aparecimento de uma *força*. Ora, a onda de maré, ao ser atenuada no interior do rio, tem sua altura diminuída numa distância curta (em relação ao comprimento da onda) gerando assim o gradiente (na direção do eixo do rio) de tensão de radiação necessário para criar a força acima mencionada. O surgimento dessa força provoca uma diminuição de velocidade (freamento) nas águas do rio na região sob efeito da maré fluvial que, por conservação da massa, dá origem a uma sobre-elevação do nível médio.

Curiosamente, um mecanismo análogo ocorre na zona de arrebentação de uma praia oceânica, onde as ondas geradas pelo vento são também dissipadas numa curta distância. A força proveniente das tensões de radiação que surgem na zona de arrebentação promove, igualmente nesse caso, uma sobre-elevação do nível médio do mar conhecido na literatura de língua inglesa como *wave set-up*.

Retornando ao problema, é possível obter a solução geral da Equação (46) de forma bastante simples (ver Arfken, 1985, pág. 443):

$$\overline{\eta_2}(x) = C_2e^{Px} + \left[\frac{GD^2}{P - 2k_r}\right]\left(\frac{a^2}{h_o}\right)e^{2k_rx} - \frac{C_1}{P} \qquad (49)$$

onde as constantes C_1 e C_2 devem ser determinadas em função das condições de contorno do problema. De acordo com a hipótese (iii.), a maré irá necessariamente dissipar-se totalmente no interior do rio. Assim, a condição (4) requer que $\lim_{x\to-\infty}\overline{\eta_2}(x) = 0$ e, portanto, $C_1 = 0$. A segunda constante de integração, C_2, está relacionada com a posição do nível *médio* na foz. Como a hipótese (ii.) requer que o escoamento básico do rio seja permanente e *uniforme*, não pode haver, no presente caso, desvio do nível médio em relação a h_o na foz e, assim, $\overline{\eta}_2(0) = 0$.

A solução final para o desvio do nível médio do rio em relação a h_o pode finalmente ser escrita como:

$$\overline{\eta}_2(x) = \left(\frac{a^2}{h_o}\right)E\left(e^{Px} - e^{2k_rx}\right) \qquad (50)$$

onde E é dado por:

$$E = \frac{GD^2}{2k_r - P} \qquad (51)$$

Uma vez determinado $\overline{\eta}_2(x)$, a variação da velocidade média (*permanente*) associada – $\overline{u}_2(x)$ – é dada por (42) (com $C_o = 0$). O resultado é:

$$\overline{u}_2(x) = -u_o\left[\overline{\eta}_2(x) - (\frac{a}{h_o})^2 \frac{D\cos\theta}{2} e^{2k_r x}\right] \quad (52)$$

Com isto conclui-se a solução do problema.

RESUMO DOS RESULTADOS

O fenômeno da maré fluvial foi estudado por meio das equações de Saint-Venant. A solução encontrada permite determinar a posição da superfície da água e a velocidade (média na seção) da corrente em função dos parâmetros básicos do problema.

Os dados de entrada para a solução são: q – vazão por unidade de largura; S_o – declividade do fundo do rio; C_f – coeficiente de Chezy; s – freqüência da "maré"; a – amplitude da oscilação do nível da água na foz; g – aceleração da gravidade.

O nível da água h(x,t) e a velocidade da corrente u(x,t) do rio são dados pelas Expressões (53) e (54) abaixo lembrando que, de acordo com o sistema de coordenadas utilizado, x < 0 rio acima a partir da foz.

$$h(x,t) = h_o\left[1 + (\frac{a}{h_o})e^{k_r x}\cos(k_i x + st) + \right.$$
$$\left. +(\frac{a}{h_o})^2 E\left(e^{Px} - e^{2k_r x}\right)\right] \quad (53)$$

$$u(x,t) = u_o\left\{1 - (\frac{a}{h_o})D e^{k_r x}\cos(k_i x + st + \theta) - \right.$$
$$\left. -(\frac{a}{h_o})^2\left[E\left(e^{Px} - e^{2k_r x}\right) - \frac{D\cos\theta}{2}e^{2k_r x}\right]\right\} \quad (54)$$

onde h_o e u_o são obtidos de (12) e (13); k_r e k_i são obtidos de (20) ou (25)-(26); θ é obtido de (33); D é obtido de (34); P é obtido de (47); G é obtido de (48); E é obtido de (51).

Caso se deseje, a vazão por unidade de largura q(x,t) pode ser prontamente obtida de (53) e (54), lembrando que q = hu.

Ressalta-se que a presente solução só é válida quando a amplitude de oscilação da maré na foz for uma fração da altura d'água no rio, ou seja: $\varepsilon = a/h_o << 1$. Nesta solução, o nível d'água e a velocidade *instantâneos* são corretos até O(ε) porém incorporam um efeito permanente em $O(\varepsilon^2)$.

EXPRESSÃO ANALITÍCA PARA CURVAS DE REMANSO TIPO M1 e M2: CASO LIMITE COM T → ∞

Um resultado suplementar pode ser obtido estudando-se o comportamento da presente solução no caso de uma oscilação com período infinitamente longo. Matematicamente, basta calcular o limite das funções encontradas quando $T \rightarrow \infty$ ou, equivalentemente, $s \rightarrow 0$. Assim, tomando $\lim_{s \rightarrow 0}$ das Equações (20), (21), (33), (34), (48) e (51) chega-se aos seguintes resultados:

$$s = 0; \quad k_i = 0; \quad k_r = P; \quad \theta = 0; \quad D = 1;$$
$$G = G_{rem} = P\left(\frac{3}{2A} + \frac{5}{6}\right)$$
$$E = E_{rem} = \frac{G_{rem}}{P} \quad (55)$$

Do ponto de vista físico, é de se supor que efeitos inerciais oriundos da oscilação do nível na foz tornem-se cada vez menos importantes à medida que o período da oscilação aumenta. Assim sendo, é de se esperar que o caso limite de uma oscilação de período *infinitamente longo* coincida com a solução do caso permanente, ou seja, uma *curva de remanso.*

Observando os limites encontrados, confirma-se que a variação temporal da solução deixou de existir uma vez que $k_i = 0$. Portanto, chega-se à seguinte expressão analítica para curvas de remanso do tipo M1 e M2:

$$h_{rem}(x) = h_o\left[1 \pm (\frac{a}{h_o})e^{Px} + (\frac{a}{h_o})^2 E_{rem}\left(e^{Px} - e^{2Px}\right)\right] \quad (56)$$

O sinal (+) em (56) corresponde à curva tipo M1 e o sinal (-) à curva tipo M2.

Para obter a velocidade de forma consistente com a aproximação usada basta lembrar que, para um escoamento permanente $q = u_o h_o =$ *constante*, logo:

$$u_{rem}(x) = \frac{u_o h_o}{h_{rem}(x)} \quad (57)$$

Uma comparação desse resultado com curvas de remanso obtidas numericamente pelo "Step Method" (ver, por exemplo, Sellin, 1969) é apresentada no apêndice.

CONSIDERAÇÕES FINAIS: FORMA ADIMENSIONAL DA SOLUÇÃO

Como conclusão deste trabalho, será feita uma última verificação da presente teoria fazendo uso da Análise Dimensional.

Inicialmente, verifica-se que a solução apresentada acima envolve um conjunto de seis grandezas físicas fundamentais:

$$q,\ S_o,\ C_f,\ s,\ a,\ g \tag{58}$$

assim distribuídas:

- Rio: q, S_o, C_f ou, equivalentemente, usando a hipótese de que o escoamento básico se dá em regime permanente uniforme: h_o, u_o, C_f;
- Maré: s, a;
- Gravidade: g.

Considerando que as dimensões básicas necessárias para exprimir dimensionalmente as variáveis são em número de *3*, sabe-se, de acordo com o teorema dos π de Buckingham (ver, por exemplo, Shames, 1962, cap. 7) que o fenômeno físico em estudo deve poder ser completamente descrito por meio de *6 - 3 = 3* grupos adimensionais *independentes*, formados a partir das seis grandezas acima. Pode mesmo?

Para proceder a essa verificação, observa-se que as soluções (53) e (54) podem ser escritas na seguinte forma *totalmente* adimensional:

$$\begin{aligned} h'(x',t') &= 1 + \varepsilon e^{f_r x'} \cos(f_i x' + t') + \\ &+ \varepsilon^2 E\left(e^{P'x'} - e^{2 f_r x'}\right) \end{aligned} \tag{59}$$

$$\begin{aligned} u'(x',t') &= 1 - \varepsilon D e^{f_r x'} \cos(f_i x' + t' + \theta) - \\ &- \varepsilon^2 \left(E(e^{P'x'} - e^{2 f_r x'}) - \frac{D\cos\theta}{2} e^{2 f_r x'} \right) \end{aligned} \tag{60}$$

onde:

$$h' \equiv \frac{h}{h_o}; \quad u' \equiv \frac{u}{u_o}; \quad x' \equiv \frac{x}{\lambda}; \quad t' \equiv ts \tag{61}$$

correspondem a formas adimensionalizadas da altura d'água (h'), velocidade da corrente (u'), distância (x') e tempo (t'), sendo P' uma versão adimensional de P, dada por:

$$P' = \frac{3}{AM} \tag{62}$$

Observando-se com atenção as expressões que definem os parâmetros f_r, f_i, D, θ, G, E e P', constata-se que *todos* eles são determinados *exclusivamente* a partir dos números adimensionais Fr e M. Assim sendo, as Expressões (59) e (60) confirmam que o problema da maré fluvial é realmente *completamente* determinado por três grupos adimensionais, como previa o teorema de Buckingham:

$$\begin{aligned} h'(x',t') &= \Phi(\varepsilon, Fr, M) \\ u'(x',t') &= \Omega(\varepsilon, Fr, M) \end{aligned} \tag{63}$$

onde, Φ e Ω representam relações funcionais entre os grupos adimensionais independentes:

$$\varepsilon \equiv \frac{a}{h_o}; \quad Fr \equiv \frac{u_o}{\sqrt{g h_o}}; \quad M \equiv \frac{h_o s C_f^2}{g u_o} \tag{64}$$

Portanto, verifica-se que a teoria desenvolvida no presente trabalho conduz a resultados perfeitamente consistentes com princípios básicos da Análise Dimensional.

CONCLUSÃO

O presente trabalho enfocou o fenômeno da maré fluvial sob a ótica do rio. A maré fluvial foi modelada como uma oscilação periódica de pequena amplitude que penetra num rio (canal inclinado) de geometria simplificada, cujo escoamento básico se dá em regime permanente uniforme subcrítico. Uma solução analítica para o problema foi estabelecida pelo método das perturbações, tomando partido da periodicidade intrínseca do fenômeno e do fato que não há inversão de fluxo no rio. A solução é função de três parâmetros adimensionais: ε (relação entre amplitude da maré na foz e altura da água do rio), Fr (número de Froude relativo ao escoamento básico) e M (análogo ao número de Reynolds e que mede a magnitude relativa das forças de inércia e de atrito no escoamento induzido pela maré). Aplicações da presente teoria são apresentadas no artigo a seguir (Melo F º, 2002).

APÊNDICE

CURVAS DE REMANSO M1 E M2: COMPARAÇÃO ENTRE A SOLUÇÃO ANALITÍCA E O "STEP METHOD"

Como ilustração do grau de precisão da aproximação analítica obtida para curvas de remanso M1 e M2, apresenta-se a seguir uma comparação das curvas dadas por (56) com curvas de remanso calculadas numericamente através do chamado "Step Method". O exemplo utilizou os seguintes valores numéricos: $q = 4.6\ m^3 s^{-1}/m$; $S_o = 1{:}12000$; $C_f = 30\ m^{1/2}/s$ e $a = \pm\ 0.5$ m.

De acordo com a teoria, a solução deve ser precisa quando $\varepsilon << 1$. Para os valores escolhidos, $h_o = 6.56$ m (obtido da Equação 12) e, portanto, $\varepsilon = 0.076$, ou seja, $\varepsilon = O(0.1)$. Mesmo sendo apenas uma ordem de grandeza menor que 1, a solução analítica para a curva de remanso dá resultados bem próximos da solução numérica, como se pode verificar na Figura A1.

Uma comparação semelhante com $\varepsilon = 0.01$ (não apresentada) mostra uma coincidência completa entre as soluções analítica e numérica.

AGRADECIMENTO

O autor contou com o suporte do CNPq para realização do presente trabalho na forma de uma bolsa de pesquisa individual (Proc. 300152/82-5).

REFERÊNCIAS

ARFKEN, G. (1985). *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press Inc. 3rd ed., 985p.

CAMERON, N. M.; PRITCHARD, D. W. (1963). Estuaries. *The Sea*, John Wiley & Sons, 2, 306-324.

CHOW, V. T. (1959). *Open Channel Hydraulics*, Republicado por Mc Graw Hill, 680p.

DEAN, R. G.; DALRYMPLE, R. A. (1984). *Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists*, Prentice Hall, Inc., 353p.

DRONKERS, J. J. (1964). *Tidal Computations in Rivers and Coastal Waters*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 518p.

GODIN G. (1985). Modification of River Tides by the Discharge, *J. of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, ASCE, 111 (2): 257-274.

GODIN G. (1999). The Propagation of Tides up Rivers with Special Considerations on the Upper Saint-Lawrence River, *Estuarine, Coastal and Shelf Science* 48: 307-324.

LE BLOND, P. H. (1978). On Tidal Propagation in Shallow Rivers, *J. of Geophysical Research* 83 C-9: 4717-4721.

LONGUET-HIGGINS, M.; STEWART, R. W. (1964). Radiation Stress in Water Waves: A Physical Discussion with Applications, *Deep Sea Research*, 11:529-563.

MELO, E.; JORDEN, V. (1999). Tide Penetration in Coastal Rivers, *Proc.* of the COPEDEC V, Cape Town, South Africa, Vol. 3: 1771-1781.

MELO Fº, E. (1998). Considerações Sobre a Hidráulica de Canais Fluviais e de Canais de Maré, *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, 3 (2): 95-107.

MELO Fº, E. (2002). Marés Fluviais. Parte 2: Aplicações, *Revista Brasileira de Recursos Hídricos* (nesta edição).

SELLIN, R. H. J. (1969). *Flow in Channels*, MacMillan Co. Eng. Hydraulics Series.

SHAMES, I. H. (1962). *Mecânica dos Fluidos*, Vol. 1, McGraw-Hill, Inc., 192p.

STRONACH, J.; MURTY, T. S. (1989). Discussão do paper: Interaction of Tide and River Flow, de Vongvisessomjai, S.; Rojanakamthorn, S. 1989, *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, ASCE, 115 (2): 82-84.

VONGVISESSONJAI, S.; ROJANAKAM-THORN, S. (1989). Interaction of Tide and River Flow, *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, ASCE, 115 (1): 86-104.

River Tides. Part 1: Theory

ABSTRACT

The phenomenon of river tides is studied by means of the Saint-Venant equations. A perturbation method is used to obtain an analytical solution to the case of a periodic oscillation (tide) with a small amplitude that penetrates into a river with a simplified geometry in which there is a background flow in steady uniform and sub-critical regime. The solution is correct to order (ε) *(with* $\varepsilon = a/h_o$, *where* a=*amplitude of the tide at the mouth and* h_o = *mean water level of the river) but includes a steady effect in order* (ε^2). *The solution is cast in terms of 3 non-dimensional parameters* ε, *Fr (Froude number) and M (a Reynolds-like number that measures the relative magnitude of inertia and friction forces in the tidally induced flow). Examples of application of the solution and an investigation of some aspects of the phenomenon are presented in the following paper.*

Key Words: tides; fluvial; modelling.