

Marés Fluviais. Parte 2: Aplicações

Eloi Melo F^o

Lab. Hidráulica Marítima – LAHIMAR – Depto. Eng. Sanitária e Ambiental – UFSC – Campus Trindade – Caixa Postal 5039
88040-970 Florianópolis, SC - emf@ens.ufsc.br

Recebido: 12/12/01 - revisão: 20/06/02 - aceito: 23/09/02

RESUMO

Dois aplicações da solução obtida na Parte 1 são apresentadas: uma para um caso de maré fluvial dominado pelo atrito ($M < 1$) e outro para um caso dominado pela inércia ($M > 1$). A seguir, os seguintes tópicos são investigados: i) Influência do período da maré na rapidez do amortecimento; ii) Comparação dos envelopes dos níveis d'água máximo e mínimo com curvas de remanso; iii) Existência de valores máximo e mínimo para a distância de penetração da maré fluvial; iv) Comportamento da velocidade de propagação; v) Influência do período na sobre-elevação do nível médio e na corrente do rio; vi) Influência da vazão do rio no amortecimento da maré fluvial; vii) Efeito do aumento da vazão no amortecimento da maré fluvial num rio em regime básico não-uniforme. Vários resultados inéditos são apresentados sobre esses tópicos.

Palavras-chave: maré; fluvial; aplicações.

INTRODUÇÃO

Esta segunda parte do presente artigo versa sobre *aplicações* da teoria desenvolvida na Parte 1. Como introdução ao tema, a importância do fenômeno da maré fluvial será ilustrada através de alguns exemplos práticos.

Analisando inicialmente o problema sob a ótica da Hidrologia, um dos grandes temas de estudo desta ciência consiste na determinação das variações do nível d'água dos rios em resposta ao regime de chuvas que ocorre sobre a bacia hidrográfica – assunto este de fundamental importância na previsão de inundações, por exemplo. Consideremos, portanto, um evento de *cheia* num rio cuja bacia hidrográfica inclua a região costeira. Suponhamos que, por coincidência, a cheia tenha ocorrido durante um período de lua cheia (maré de sizígia) a qual, por um capricho do destino, também tenha coincidido com um episódio de ventos fortes que causaram uma sobre-elevação do nível do mar por efeitos meteorológicos. Qual o efeito do mar no nível d'água e no escoamento do rio a montante? Até que distância a partir da foz esse efeito deve se manifestar? Como determinar o nível *máximo* que as águas vão atingir no trecho da bacia hidrográfica sujeito à maré fluvial? Questões como essas são, sem dúvida, de grande interesse para a determinação de áreas de risco à inundação no trecho costeiro da bacia hidrográfica.

Entretanto, a determinação do nível *mínimo* das águas num rio costeiro pode também ser de interesse. Para ilustrar essa situação, imaginemos o caso de um porto fluvial que tenha sido construído num trecho do rio ainda dentro da zona de influência da maré. Como em qualquer porto, a variação de nível d'água é uma informação valiosa para a operação dos navios. Ora, um *rebaixamento* imprevisto do nível d'água do rio por ação do mar poderia afetar a movimentação das embarcações de maior calado, sujeitando-

as até ao risco de encalhe. Adicionalmente, dependendo das dimensões do rio e da amplitude atingida pela maré na foz, é possível que o trecho do rio sob o efeito de marés fluviais fique sujeito a alterações significativas não apenas do nível d'água, mas também da intensidade das correntes. Se este for o caso no porto em questão, a previsão das variações de corrente do rio seria igualmente importante para as operações de atracação dos navios.

Uma outra situação de interesse ocorreria no caso de uma *barragem* que tivesse sido construída dentro da zona de influência da maré. Nesse caso, o nível d'água no canal de restituição apresentaria as oscilações periódicas características da maré fluvial, fato este que poderia dificultar o estabelecimento da *curva chave* do rio (curva que relaciona a vazão com a altura d'água em trechos onde o escoamento é puramente *fluvial* (ver, por exemplo, Melo F^o, 1998). Nessa situação, na verdade, haveria mais um complicador, pois a onda de maré que sobe o rio seria refletida pela barragem de volta para a foz, dando origem a um padrão de maré fluvial estacionário no rio.

Analisando agora a questão do ponto de vista oceanográfico, a *previsão* da maré astronômica num dado local é feita através das chamadas *constantes harmônicas*, que usualmente são determinadas a partir da análise harmônica de medições de nível d'água realizadas *in situ* com duração, típica, da ordem de um mês lunar. Ora, se o local em questão estiver no interior de um rio costeiro, uma questão de interesse refere-se à influência da vazão do rio no comportamento da maré fluvial. Por exemplo, um *aumento na vazão* deve ocasionar uma *amplificação* ou uma *atenuação* da maré fluvial? Se esse efeito (seja ele qual for) for significativo, a vazão do rio passaria a afetar as “constantes” harmônicas da maré (que, nesse caso, deixariam de ser “constantes”); assim, previsões de maré baseadas em registros feitos em períodos de estiagem poderiam não dar resultados satisfatórios em épocas de cheia.

Os exemplos acima apenas ilustram algumas situações nas quais o fenômeno da maré fluvial pode ser importante. Na seqüência desse trabalho, a solução analítica obtida na Parte 1 será utilizada para tentar responder às questões levantadas acima e a outras que surgirão no decorrer das aplicações.

Estratégia para verificação dos resultados

Idealmente, seria ótimo poder comparar as previsões da teoria com dados observados na natureza, porém, um levantamento da literatura revelou que os poucos dados existentes não são muito adequados para uma comparação de ordem quantitativa. Os dados apresentados por Godin (1985) e por Vongvisessonjai e Rojanakamthorn (1989), por exemplo, enfatizam medições da maré, não fornecendo informações detalhadas o suficiente sobre as condições básicas do rio. Quanto a medições feitas no Brasil, não foi possível encontrar nenhum dado que pudesse ser utilizado. Outra possibilidade seria a comparação com dados obtidos a partir de experimentos de laboratório, porém, não se encontrou nada sobre o assunto. Assim, optou-se por uma estratégia alternativa para verificação da teoria, baseada em observações compiladas por Godin (1984, 1985, 1991 e 1999) – daqui por diante referenciadas abreviadamente por “Godin”.

Apesar da complexidade do fenômeno, Godin foi capaz de identificar algumas características básicas da maré fluvial que se mostraram sistematicamente presentes nas observações feitas em rios canadenses. As principais características podem ser resumidas da seguinte forma:

- i. A atenuação da maré no interior do rio é dependente da frequência, de tal forma que componentes de alta frequência são atenuadas mais rapidamente que componentes de frequência mais baixa.
- ii. A maré em rios adquire um caráter dispersivo no qual as componentes de frequência, mais baixa progridem mais lentamente que as de frequência mais alta (o oposto de ondas superficiais no oceano).
- iii. A atenuação da maré aumenta com o aumento da vazão do rio.

Assim, na falta de dados quantitativos mais adequados, os três itens relatados acima serão utilizados para verificar se a solução analítica obtida na Parte 1 fornece resultados *qualitativamente* consistentes com o que se conhece sobre o fenômeno.

Esta segunda parte do trabalho tem início apresentando dois exemplos de aplicação da solução que mostram de forma gráfica vários aspectos importantes do fenômeno. Na seqüência, a questão da influência do período da maré no amortecimento e na velocidade de propagação da maré fluvial são investigados. Finalmente, o importante tópico da influência da vazão do rio na penetração da maré é analisado em detalhes (para facilitar a leitura do trabalho,

a numeração das equações seguirá a seqüência iniciada na Parte 1).

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Uma das questões mais relevantes da teoria desenvolvida na Parte 1 foi a identificação do número adimensional M como indicador do caráter dinâmico predominante no fenômeno da maré fluvial. Assim, dois exemplos distintos serão trabalhados a seguir: i) Caso com $M < 1$: predomínio das forças de atrito e ii) Caso com $M > 1$: predomínio das forças de inércia.

Caso #1 – Maré fluvial com predomínio das forças de atrito ($M < 1$)

Considere-se o caso de um rio hipotético com as seguintes características básicas:

- $S_o = 1:12000$ m/m (declividade suave);
- Vazão específica $q = 4.5$ (m³/s)/m;
- Coeficiente de atrito $C_f = 30$ m^{1/2}s⁻¹ (atrito relativamente forte).

O período da oscilação na foz será tomado como o período da componente lunar semi-diurna M_2 , com amplitude de meio metro:

- $T = 12.42$ h;
- $a = 0.5$ m.

Os valores acima foram escolhidos tomando como referência o rio Itajaí em Santa Catarina, que foi a fonte de motivação inicial para o presente trabalho de pesquisa.

As características do escoamento básico do rio, prontamente obtidas das Equações (12) e (13) da Parte 1, são: $h_o = 6.56$ m e $u_o = 0.70$ m/s. Observa-se que o parâmetro $\varepsilon = 0.076 < 1$ e, portanto, a condição de maré de pequena amplitude fica satisfatoriamente atendida. O número de Froude é $Fr = 0.0874 < 1$ indicando que o escoamento básico do rio se processa em regime sub-crítico, como também requer a teoria. O número adimensional M assumiu, para esse caso, o valor 0.1206 o qual, de acordo com a interpretação que lhe foi atribuída na Parte 1, indica um escoamento com predomínio das forças de atrito ($M < 1$).

A solução para o nível d'água $h(x,t)$ e para a velocidade média na seção $u(x,t)$ – dadas pelas Equações (53) e (54) – estão mostradas nas Figuras 1 e 2.

Observando-se a Figura 1, verifica-se que a solução do problema realmente corresponde a uma onda progressiva cuja amplitude decai a partir da foz. A rapidez desse decaimento pode ser quantificada introduzindo-se a grandeza $X =$ distância de penetração da maré, definida como a distância para a qual a amplitude da oscilação do nível d'água corresponde a 1% da amplitude existente na foz. Usando esta

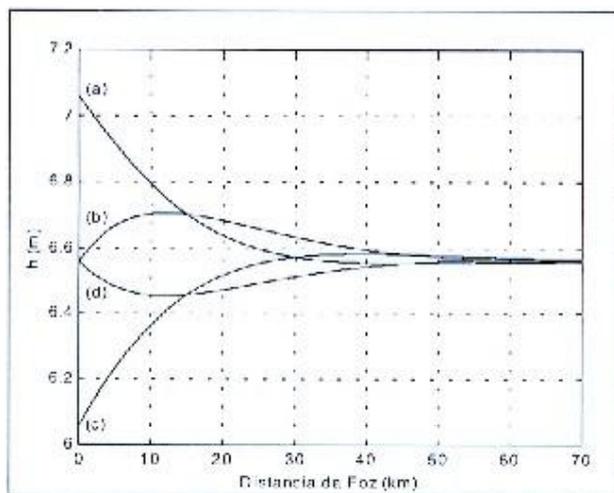


Figura 1. Caso #1: posição da superfície da água para $t = 0$ (a); $T/4$ (b); $T/2$ (c); $3T/4$ (d).

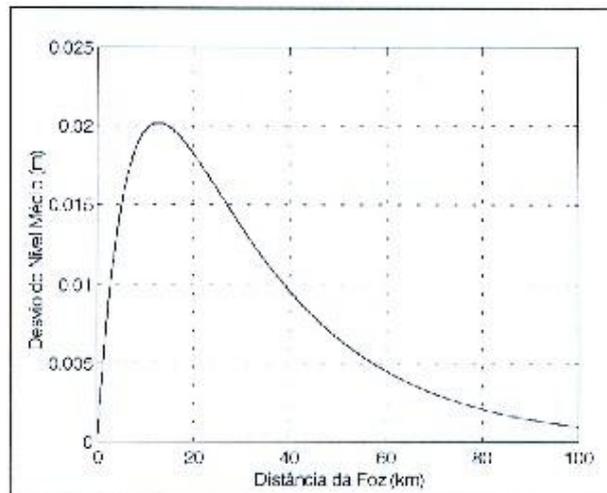


Figura 3. Caso #1: desvio do nível médio do rio em ordem (ϵ^2).

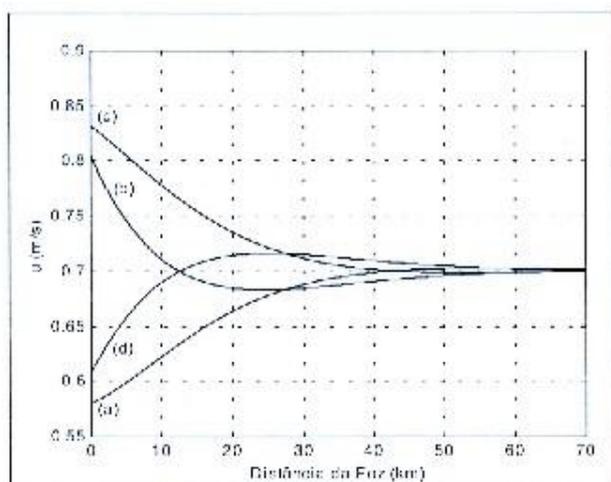


Figura 2. Caso #1: velocidade da corrente para $t = 0$ (a); $T/4$ (b); $T/2$ (c); $3T/4$ (d).

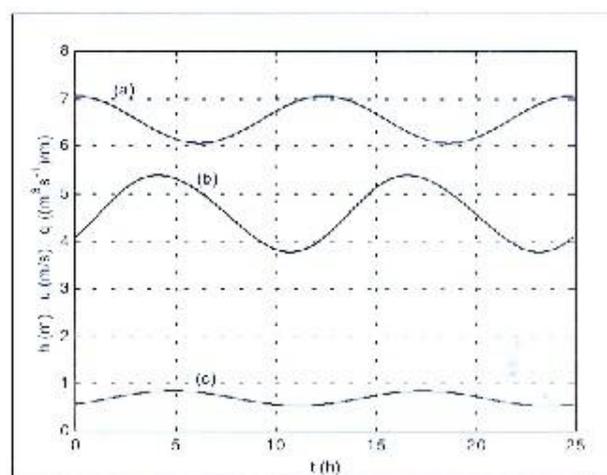


Figura 4. Caso #1: evolução temporal da altura d'água (a), vazão (b) e velocidade da corrente (c) para uma seção a 5 km da foz.

definição em (28) – ou, equivalentemente em (53) – obtém-se a seguinte expressão para X:

$$X = -\frac{\ln 0.01}{k_r} = -\ln 0.01 \frac{\lambda}{f_r} \quad (65)$$

Substituindo-se o valor de k_r em (65) obtém-se $X = 65.39$ km indicando que a maré M_2 seria ainda perceptível no rio do Caso #1 a mais de 60 km da foz. Essa distância pode ser visualizada na Figura 1.

O comprimento de onda (L) da maré no interior do rio é obtido de k_i (parte imaginária de k) pela expressão:

$$L = \frac{2\pi}{k_i} = \frac{2\pi\lambda}{f_i} \quad (66)$$

No presente exemplo, $L = 120.35$ km o que mostra que a onda de maré seria dissipada numa distância correspondente a pouco mais da metade do seu comprimento de onda ($X = 0.543 L$).

Além da atenuação, outro item de interesse é a *velocidade de propagação da onda de maré* (C_M) rio acima. Como mostrado na Parte 1, tal velocidade pode ser calculada prontamente pela Expressão (30), re-escrita em termos de f_i como:

$$C_M = \frac{L}{T} = \frac{s}{k_i} = \frac{u_o}{f_i} \quad (67)$$

Usando a Equação (67) no presente exemplo obtém-se $C_M = 9.69$ km/h. Uma maneira interessante de avaliar a

magnitude dessa velocidade é compará-la à velocidade C_{grav} que a mesma onda de maré teria num canal *horizontal* hipotético sujeito a uma corrente *inviscida* de velocidade u_o e de sentido contrário ao da onda. De acordo com a teoria de ondas longas em canais de maré (ver, por exemplo, Melo F^o, 1998):

$$C_{grav} = \sqrt{gh_o} - u_o \quad (68)$$

a qual, para o exemplo em questão, assumiria o valor 26.35 km/h . Assim, comparando as duas velocidades, verifica-se que a onda de maré no interior do rio propaga-se bem mais lentamente que uma onda longa (estritamente) gravitacional ($C_m/C_{grav} = 0.368$). Este tipo de comportamento é também observado na propagação de ondas de cheia em rios e pode ser atribuído ao papel preponderante das forças de atrito no escoamento (Melo F^o, 1998). Confirma-se assim o significado físico atribuído na Parte 1 ao parâmetro M .

Uma inspeção minuciosa da Figura 1 mostra uma pequena *assimetria* da superfície da água em relação à altura normal (h_o) do rio, sugerindo que o nível *médio* do mesmo encontra-se ligeiramente sobre-elevado. Essa sobre-elevação resulta, na verdade, do fenômeno de “bombeamento”, o qual se manifesta na solução *permanente* de ordem (ϵ^2), conforme discutido na Parte 1 do presente trabalho.

Para melhor visualizar tal efeito, a Figura 3 mostra $\bar{\eta}_2(x)$, o desvio de caráter permanente do nível médio do rio induzido pela maré, dado pela Equação (50).

Sendo este um efeito de ordem (ϵ^2), sua magnitude terá ordem de grandeza igual a $(a/h_o)^2$ (valor máximo de cerca de 2 cm no presente exemplo). Entretanto, conforme a relação $\epsilon = (a/h_o)$ aumenta, mais pronunciada deve se tornar a sobre-elevação do nível médio do rio em ordem (ϵ^2).

Outro assunto de interesse refere-se à relação entre nível d’água, velocidade da corrente e vazão do rio no trecho sob efeito da maré fluvial. Como indicado na Parte 1, a vazão específica pode ser obtida da solução lembrando que $q(x,t) = u(x,t).h(x,t)$. A Figura 4 ilustra tal resultado para uma seção distante 5 km da foz.

A periodicidade temporal do escoamento ($T = 12.42 \text{ h}$ nesse caso) é claramente visível na figura. Entretanto, apesar da maré fluvial ser 100% progressiva, observa-se que a diferença de fase entre o nível d’água e a corrente, prevista pela teoria (θ , Equação 33), dá origem também a uma defasagem entre nível e vazão: por exemplo, o instante de máxima vazão não corresponde ao momento de mínimo nível d’água (ver Figura 4). Deduz-se também que a relação bi-unívoca entre nível e vazão (curva-chave) existente no escoamento básico do rio é perturbada pela presença da maré, pois para um mesmo valor de nível d’água é possível haver mais de um valor de vazão associado (Figura 4).

As variações da corrente em função do tempo em três seções diferentes do rio são mostradas na Figura 5. As seções localizam-se em $x = 0$ (foz), $x = -20 \text{ km}$ e $x =$

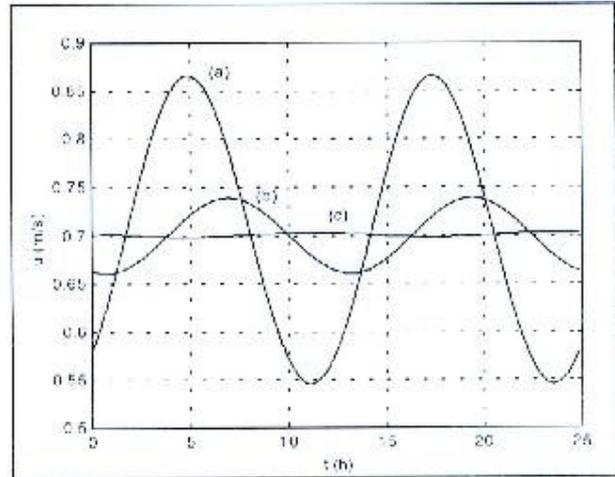


Figura 5. Caso #1: evolução temporal da velocidade da corrente em $x = 0$ (a), -20 (b) e -60 km (c).

-60 km . A presença da maré afeta a corrente nas duas primeiras seções, mas já é quase imperceptível na última, a partir de onde o escoamento já pode ser considerado permanente.

Para facilitar a comparação de resultados com o caso seguinte, as Tabelas 1, 2, 3 e 4 a seguir mostram de forma compacta os valores numéricos encontrados para este primeiro exemplo.

Caso #2 – Maré fluvial com predomínio das forças de inércia ($M > 1$)

Para que as forças de inércia predominem é necessário alterar os parâmetros básicos do problema de modo a tornar $M > 1$. A fim de melhor compreender essa questão, é conveniente re-escrever o número adimensional M , usando as Equações (12) e (13), nas seguintes formas alternativas:

$$M = \frac{h_o s}{Ku_o} = \frac{sq}{Ku_o^2} = \frac{sh_o^2}{Kq} = \frac{sC_f^{2/3} q^{1/3}}{gS_o^{2/3}} \quad (69)$$

Analisando as expressões acima, verifica-se que M depende de certas *relações* entre os parâmetros básicos do problema (por exemplo, é possível variar os parâmetros sem alterar o valor de M). Assim, considerando a influência de cada parâmetro separadamente (isto é, mantendo os outros inalterados) pode-se inferir que a importância das forças de inércia aumenta à medida que:

- i. diminui o atrito no rio (isto é, aumenta o coeficiente C_f);
- ii. aumenta o período da oscilação (isto é, diminui a frequência s);
- iii. aumenta a vazão específica;
- iv. diminui a declividade do rio.

Tabela 1. Dados de entrada.

Parâmetro (Unidade)	q ($m^3/s/m$)	S_o (m/m)	C_f ($m^{1/2}/s$)	T (h)	a (m)	g (m/s^2)
Valor	4.6	1/12000	30	12.42	0.5	9.81

Tabela 2. Parâmetros básicos da solução.

Parâmetro (Unidade)	h_o (m)	u_o (m/s)	ε -	Fr -	M -
Valor	6.560	0.701	0.076	0.0874	0.1206
Eq. usada	(12)	(13)	(29)	(22)	(23)

Tabela 3. Parâmetros necessários para montagem da solução – Equações (53) e (54).

Parâmetro (Unidade)	k_r (rad/m)	k_i (rad/m)	D -	θ (h)	E -	P (m^{-1})
Valor	7.0428×10^{-5}	5.2205×10^{-5}	2.9909	1.3066	1.1854	3.8411×10^{-5}
Eq. usada	(20)	(20)	(34)	(33)	(51)	(47)

Tabela 4. Grandezas de interesse obtidas da solução.

Parâmetro (Unidade)	X (km)	L (km)	X_{rel} -	C_M (km/h)	C_{grav} (km/h)	C_{rel} -	b (m/s)
Valor	65.39	120.36	0.543	9.69	26.35	0.368	- 0.160
Eq. usada	(65)	(66)	X/L	(67)	(68)	C_M/C_{grav}	(32)

Dentre as várias combinações possíveis, a escolhida para compor esse segundo exemplo foi uma na qual os parâmetros básicos do rio (S_o , q e C_f) foram mantidos iguais aos do caso anterior, sendo apenas o período de oscilação da maré alterado de $12.42 h$ para $0.5 h$. Nota: oscilações com períodos na faixa de $0.5 h$ no oceano são raras podendo ocorrer, por exemplo, durante o advento de um *tsunami* (onda causada por terremoto submarino). Assim, considerando que os parâmetros acima sejam representativos para o rio Itajaí, verifica-se que a maré fluvial de origem astronômica neste rio deve se dar no regime de atrito.

As Tabelas 5, 6, 7 e 8 apresentam de forma sintética a solução para o Caso #2.

Para facilitar a comparação com o caso anterior, os resultados para o presente caso estão mostrados de forma gráfica nas Figuras 6 a 10 a seguir.

Comparando as Figuras 6 e 7 com as Figuras 1 e 2 e fazendo uso das informações contidas nas tabelas de resultados, verifica-se que a onda de maré no Caso #2 atenua-se mais rapidamente do que no Caso #1 em termos *absolutos* (distância de penetração em *km* é menor). Porém, como o comprimento de onda no Caso #2 é *10 vezes* menor do que no Caso #1, a distância de penetração *relativa ao comprimento de onda* em #2 é maior do que em #1. Como consequência, é sempre possível identificar a presença de pelo menos duas cristas de onda no interior do rio, como se pode ver na Figura 6.

A perturbação da corrente básica do rio foi também muito afetada pela mudança no período da onda (variação

de velocidade aumentou cerca de 3.5 vezes – ver Figuras 2 e 7). Este aumento pode ser atribuído à intensificação do gradiente de pressão na direção x atuante no escoamento, que ocorreu em função do aumento da declividade da superfície da água causada pela onda.

A maior participação das forças de inércia provocou um aumento substancial da velocidade de propagação da maré fluvial no Caso #2 fazendo-a ficar com uma velocidade igual a 96% da velocidade da onda gravitacional.

Comparando-se agora as Figuras 8 e 3, constata-se que o efeito de sobre-elevação do nível médio do rio em ordem (ε^2) quase quintuplicou com o aumento do período da onda, aumentando assim a assimetria da posição da água em relação a h_o (ver Figura 6). É curioso observar que tal aumento deveu-se exclusivamente à intensificação dos efeitos inerciais, uma vez que a altura da maré na foz permaneceu a mesma. Uma possível explicação física para tal fenômeno é que a força proveniente das tensões de radiação – Equação (44) – foi amplificada em função da intensificação da velocidade da corrente no interior do rio, como se pode observar comparando as curvas inferiores das Figuras 4 e 9.

A evolução temporal da corrente em três seções diferentes do rio, para o Caso #2, é mostrada na Figura 10. As seções localizam-se em $x = 0$ (foz), $x = -10 km$ e $x = -30 km$.

Como no caso anterior, a presença da maré afeta a corrente nas duas primeiras seções, mas já é praticamente imperceptível na última, a partir de onde o escoamento já

Tabela 5. Dados de entrada.

Parâmetro (Unidade)	q ($m^3/s/m$)	S_o (m/m)	C_f ($m^{1/2}/s$)	T (h)	a (m)	g (m/s^2)
Valor	4.6	1/12000	30	0.5	0.5	9.81

Tabela 6. Parâmetros básicos.

Parâmetro (Unidade)	h_o (m)	u_o (m/s)	ϵ -	Fr -	M -
Valor	6.560	0.701	0.076	0.0874	2.995
Eq. usada	(12)	(13)	(29)	(22)	(23)

Tabela 7. Parâmetros necessários para montagem da solução – Equações (53) e (54).

Parâmetro (Unidade)	k_r (rad/m)	k_i (rad/m)	D -	θ (h)	E -	P (m^{-1})
Valor	1.5934×10^{-4}	4.9832×10^{-4}	10.470	0.022	3.7072	3.8411×10^{-5}
Eq. usada	(20)	(20)	(34)	(33)	(51)	(47)

Tabela 8. Grandezas de interesse obtidas da solução.

Parâmetro (Unidade)	X (km)	L (km)	X_{rel} -	C_M (km/h)	C_{grav} (km/h)	C_{rel} -	b (m/s)
Valor	28.90	12.61	2.29	25.22	26.35	0.957	- 0.560
Eq. usada	(65)	(66)	X/L	(67)	(68)	C_M/C_{grav}	(32)

pode ser considerado permanente. Nota: apesar das Figuras 10 e 5 possuírem aspectos similares, as velocidades de corrente num caso e no outro apresentam periodicidades e magnitudes bastante diferentes.

Os exemplos de aplicação apresentados acima evidenciam resultados bastante interessantes e até surpreendentes sobre o fenômeno da maré fluvial. Na seqüência do trabalho, a solução analítica obtida será utilizada para investigar mais a fundo essas questões e verificar a consistência dos resultados com as observações de Godin. Iniciaremos investigando a influência do período da oscilação no amortecimento da maré fluvial.

INFLUÊNCIA DO PERÍODO NA INTENSIDADE DO AMORTECIMENTO DA MARÉ FLUVIAL

Utilizando o parâmetro X (distância de penetração, dado pela Equação 65) para quantificar a intensidade do amortecimento e considerando ainda o rio hipotético analisado nos Casos #1 e #2, a Figura 11 mostra como X responde à variações do período da onda na faixa $0.1 \leq T \leq 48$ h.

A figura mostra claramente que a distância de penetração *umenta* à medida que *umenta* o período da oscilação em conformidade com a primeira característica relatada por Godin.

Entretanto, uma questão interessante emerge quando se analisa esse resultado do ponto de vista físico. De fato,

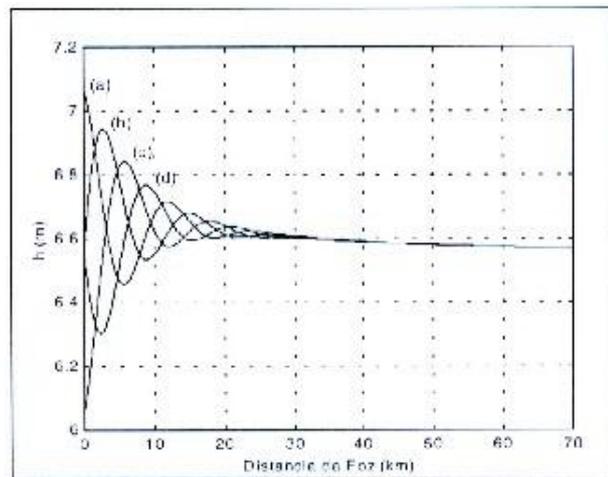


Figura 6. Caso #2: posição da superfície da água para $t = 0$ (a); $T/4$ (b); $T/2$ (c); $3T/4$ (d).

de acordo com a presente teoria, um aumento em T acarreta numa diminuição no parâmetro M (ver Equação 69) o qual mede a magnitude relativa entre as forças de inércia e de atrito no escoamento. Assim sendo, era de se esperar que o aumento do período (indicando uma maior participação das forças de atrito) implicasse numa dissipação mais intensa da maré no rio e, por conseguinte, numa *diminuição* em X . À primeira vista, essa argumentação parece levar a um resultado incompatível com o comportamento citado acima. Como conciliar essa questão?

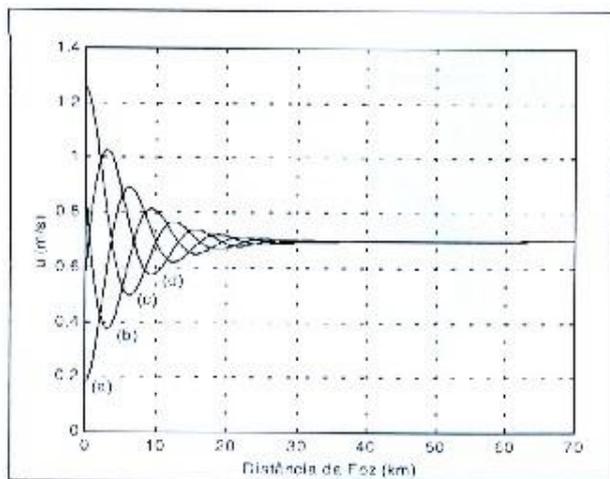


Figura 7. Caso #2: velocidade da corrente para $t = 0$ (a); $T/4$ (b); $T/2$ (c); $3T/4$ (d).

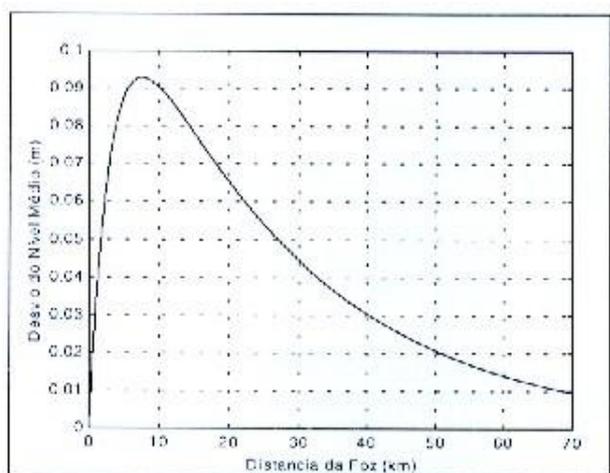


Figura 8. Caso #2: desvio do nível médio do rio em ordem (ϵ^2).

Por motivos que ficarão claros a seguir, a Figura 12 mostra como o comprimento de onda da maré fluvial (L), além da distancia X , responde a variações de M . A figura foi traçada usando a Equação (66) e o parâmetro M foi calculado por (69), para as condições básicas do rio usadas nos exemplos (para facilitar a visualização foi usado o logaritmo de M).

Como se pode observar, uma diminuição em M (equivalente a um aumento em T) implica também num aumento do comprimento de onda. Considerando que L é uma escala *intrínseca* para a onda, é interessante investigar como a distância de penetração *relativa* ao comprimento de onda (X/L) responde à variações no período.

De acordo com (65) e (66), a distância relativa pode ser calculada por:

$$\frac{X}{L} = - \frac{\ln 0.01 f_i}{2\pi f_r} \quad (70)$$

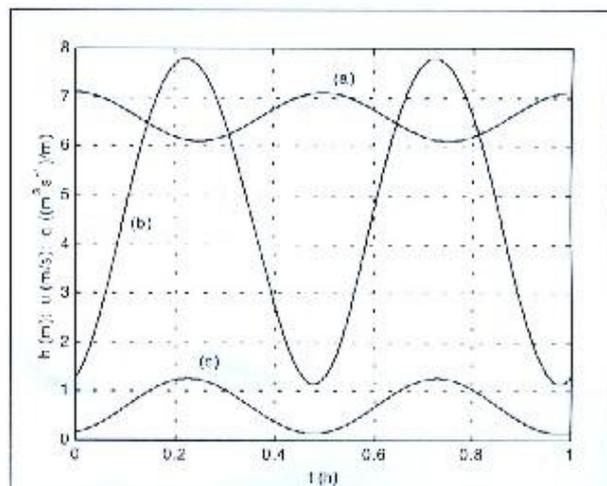


Figura 9. Caso #2: evolução temporal da altura d'água (a), vazão (b) e velocidade da corrente (c) para uma seção a 5 km da foz.

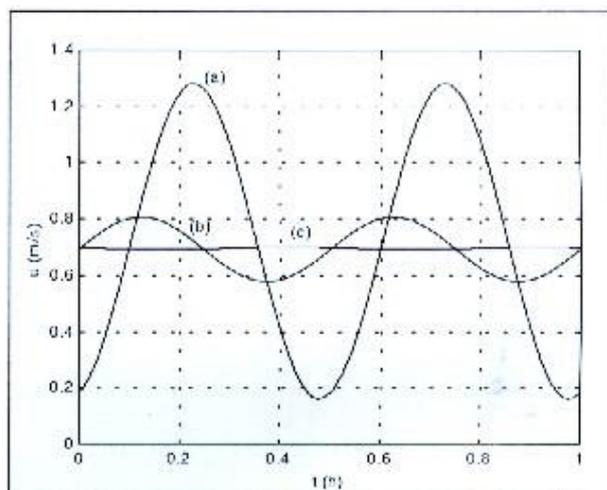


Figura 10. Caso #2: evolução temporal da velocidade da corrente em $x = 0$ (a), -10 (b) e -30 km (c).

Curiosamente, a Expressão (70) mostra que a distância de penetração relativa depende unicamente das funções f_r e f_i (definidas pela Equação 26), as quais dependem exclusivamente dos números adimensionais Fr e M . Assim, a distância relativa X/L torna-se também uma função exclusiva desses números adimensionais. A Equação (70) é mostrada de forma gráfica na Figura 13, para faixas de valores de Fr e M de interesse (o gráfico está expresso em função do $\ln(M)$ para facilitar a visualização, como na figura anterior).

Observando-se a Figura 13 fica claro que, se o comprimento de onda for usado como referência, a distância de penetração (X/L) *diminui* com o aumento do período. Isso se deve ao fato de que, para um certo aumento em T , o aumento do comprimento de onda associado é mais pronunciado que o aumento da distância de penetração (ver Figura 12).

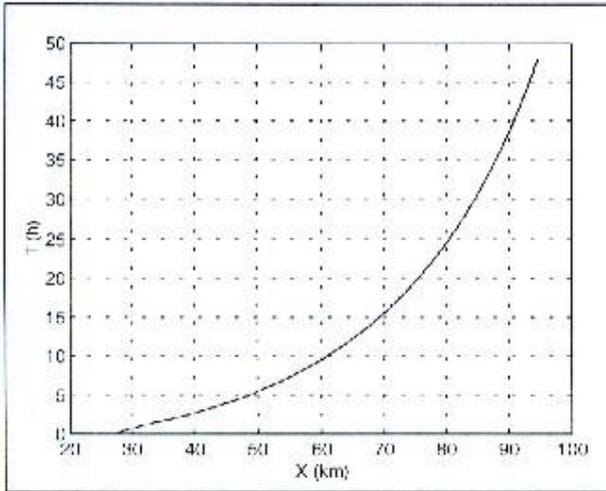


Figura 11. Influência do período da oscilação na distância de penetração para um rio com $q = 4.6 \text{ (m}^3\text{s}^{-1}\text{/m)}$; $S_o = 1:12000$; $C_f = 30 \text{ m}^{1/2}\text{/s}$, com $0.1 \leq T \leq 48 \text{ h}$.

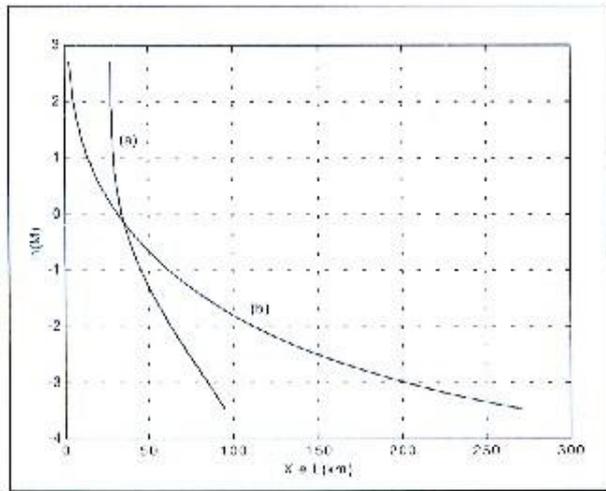


Figura 12. Resposta da distância de penetração (a) e do comprimento de onda (b) à variações em M para as mesmas condições da Figura 11.

Portanto, a reconciliação da argumentação física apresentada acima com o resultado da Figura 11 pode ser resumida da seguinte forma: do ponto de vista da onda, um aumento no período (= diminuição em M) reforça a participação das forças de atrito no escoamento, aumentando a capacidade de dissipação de energia da onda *relativa ao seu comprimento*. Porém, como o comprimento de onda também aumenta com o aumento do período, a intensidade do decaimento da maré fluvial (medida através de X) em termos *absolutos* (isto é, em *km*) termina aumentando com o aumento do período, conforme observado por Godin.

Um outro resultado interessante pode ainda ser observado a partir das Figuras 12 e 13: a região onde $X \approx L$ coincide com a região onde $M \approx 1$ (ou, $\ln(M) \approx 0$). Como

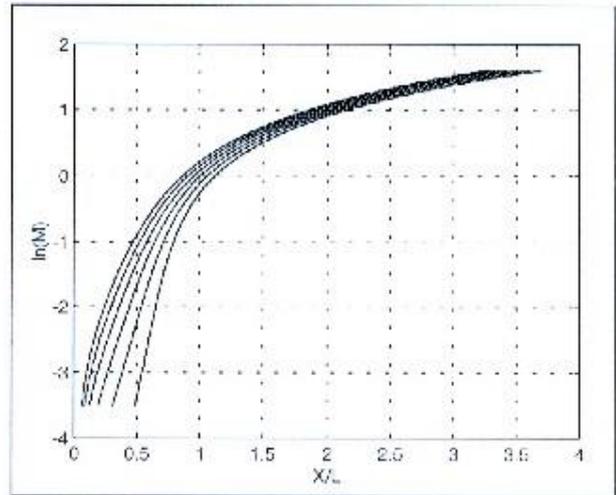


Figura 13. Penetração relativa (X/L) para $0.03 \leq M \leq 4.0$ e $Fr = 0.05$ (curva mais abaixo); 0.10; 0.15; 0.20; 0.25 e 0.30 (curva mais ao alto).

$M = 1$ corresponde ao ponto de separação entre os dois tipos de regime possíveis, é curioso verificar que, no regime dominado pela inércia ($M \gg 1$), X será sempre *maior* que L , enquanto que no regime dominado pelo atrito ($M \ll 1$), X será sempre *menor* que L . Portanto, no regime de inércia será *sempre* possível identificar mais de uma crista de onda no interior do rio, enquanto que no regime de atrito tal fato *nunca* será possível.

SOLUÇÃO PERMANENTE *VERSUS* SOLUÇÃO NÃO-PERMANENTE

Na seqüência dessa investigação, a seguinte questão de grande interesse prático será analisada:

“Quão próximos os valores máximo e mínimo atingidos pelo nível d’água na solução não-permanente se encontram das curvas de remanso (solução permanente)?”

Para tanto, os envelopes dos níveis d’água máximo e mínimo obtidos de (53), quais sejam:

$$h_{\max}(x) = h_o \left[1 + \left(\frac{a}{h_o}\right) e^{k_r x} + E \left(\frac{a}{h_o}\right)^2 (e^{P_x} - e^{2k_r x}) \right]$$

$$h_{\min}(x) = h_o \left[1 - \left(\frac{a}{h_o}\right) e^{k_r x} + E \left(\frac{a}{h_o}\right)^2 (e^{P_x} - e^{2k_r x}) \right] \quad (71ab)$$

serão comparados com as curvas de remanso da solução permanente dadas por (56) e reproduzidas abaixo por conveniência:

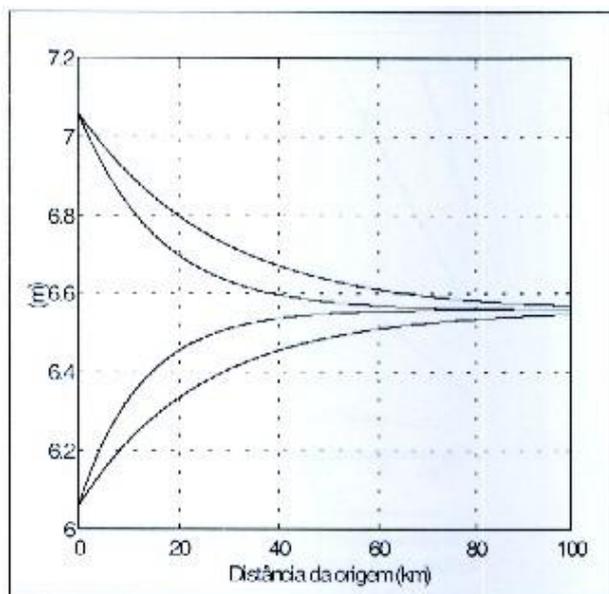


Figura 14. Caso #1: comparação entre curvas de remanso M1 e M2 (curvas externas) e envelopes do nível d'água (curvas internas).

$$h_{rem}^{(1)}(x) = h_o \left[1 + \left(\frac{a}{h_o}\right)e^{Px} + E_{rem} \left(\frac{a}{h_o}\right)^2 (e^{Px} - e^{2Px}) \right]$$

$$h_{rem}^{(2)}(x) = h_o \left[1 - \left(\frac{a}{h_o}\right)e^{Px} + E_{rem} \left(\frac{a}{h_o}\right)^2 (e^{Px} - e^{2Px}) \right] \quad (72ab)$$

onde, $h_{rem}^{(1)}$ e $h_{rem}^{(2)}$ correspondem às curvas M1 e M2, respectivamente, e $E_{rem} = 0.8449$ calculado por meio de (55), para o escoamento básico do rio em questão.

As Figuras 14 e 15 mostram essas comparações para os Casos #1 e #2 vistos acima.

Uma inspeção rápida das figuras mostra que as curvas de remanso *não* coincidem com os envelopes em nenhum dos dois casos, sendo a diferença menor para o caso do escoamento com predominância do atrito (Figura 14). Para o caso controlado pelas forças de inércia (Figura 15), a aproximação dos envelopes pelas curvas de remanso piora sensivelmente, particularmente no que se refere ao envelope do nível mínimo da água.

Portanto, à luz desses resultados, a resposta à questão colocada acima é que as curvas de remanso seriam uma aproximação um tanto grosseira para os envelopes do nível d'água para a maré fluvial nos dois casos estudados. Fica evidente, entretanto, que a diferença entre as curvas tende a diminuir à medida que o período da oscilação aumenta, sugerindo que o envelope tende paulatinamente para a curva de remanso à medida que $T \rightarrow \infty$, conforme antecipado na Parte 1.

Nesse ponto, duas questões importantes se apresentam:

- Seria o comprimento da curva de remanso o *limite máximo* para a distância de penetração da maré?

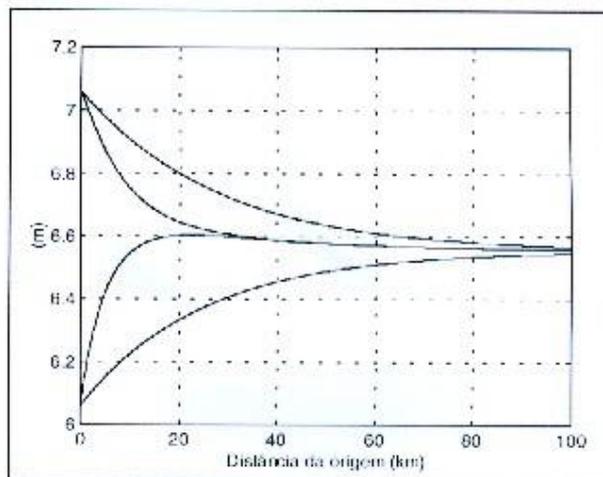


Figura 15. Análoga à Figura 14 para o Caso #2.

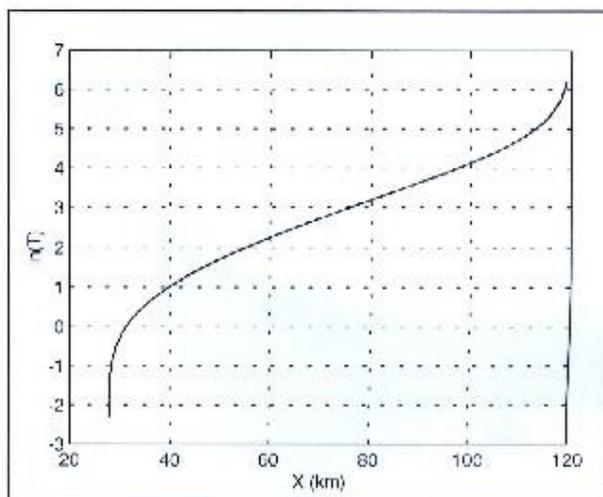


Figura 16. Distância de penetração x ln(T) para o rio usado nos exemplos com $0.05 \text{ h} \leq T \leq 480 \text{ h}$.

- Haveria, igualmente, um *limite mínimo* para X?

VALORES LIMITES PARA A DISTÂNCIA DE PENETRAÇÃO

As questões acima são respondidas de forma gráfica na Figura 16. Essa figura mostra a resposta de X a variações do período (usando a Equação 65) para uma faixa de valores extremos de T indo de *3 min* ($T = 0.05 \text{ h}$) a *20 dias* ($T = 480 \text{ h}$).

Analisando a figura vê-se que a presente teoria indica que X possui limites no que se refere tanto ao valor máximo quanto, surpreendentemente, ao valor *mínimo*!

Com efeito, o valor máximo da distância de penetração ficou agora claramente perceptível: $X_{max} = 120 \text{ km}$ (para o rio em questão). Para confirmar que *120 km* é o comprimento da curva de remanso (X_{rem}) correspondente,

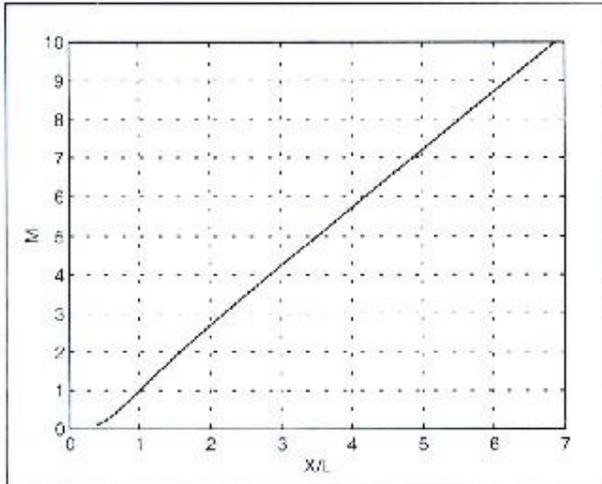


Figura 17. Penetração relativa (X/L) para $0.1 \leq M \leq 10.0$ e $Fr = 0.0874$.

pode-se calcular este último através de (65) e (55) pois $\lim_{T \rightarrow \infty} k_r = P$:

$$X_{rem} = -\frac{\ln 0.01}{P} = 120 \text{ km} = X_{max} \quad (73)$$

Portanto, o comprimento da curva de remanso fornece, realmente, o limite máximo de penetração da maré fluvial.

Quanto ao limite *mínimo* para X, é possível explicar tal resultado tanto do ponto de vista físico quanto matemático. Fisicamente, a existência de um valor mínimo pode parecer estranho à primeira vista pois um aumento contínuo do período deveria implicar numa diminuição também contínua da participação das forças de atrito e, conseqüentemente, numa atenuação cada vez mais tênue da maré fluvial (isto é, $X \rightarrow 0$ quando $T \rightarrow 0$...). Nota: os limites quando $T \rightarrow 0$ ou $M \rightarrow \infty$ tem que ser considerados no contexto apropriado. A presente teoria tem por base as equações de Saint-Venant, que requerem pressão hidrostática, portanto, é necessário que as ondas presentes sejam “longas”, ou seja, que tenham $L \gg h_0$. Assim, estritamente falando, o período da maré fluvial *não* pode ir a *zero* (ou M *não* pode ir a ∞) podendo chegar apenas até o limite da onda longa. No caso em questão, não há interesse em ondas de período menor que alguns minutos e estas satisfazem plenamente a condição de onda longa em qualquer rio.

Todavia, como mostrado anteriormente, esse raciocínio só é correto se associado à escala de distância natural da onda: seu comprimento. A Figura 17, traçada a partir da Equação (70), mostra como a distância relativa (X/L) se comporta nessa faixa extrema do regime de inércia ($M \gg 1$) para o rio usado nos exemplos (com $Fr = 0.0874$).

A figura mostra que, *do ponto de vista da onda*, a distância de penetração relativa ao comprimento de onda *crece*

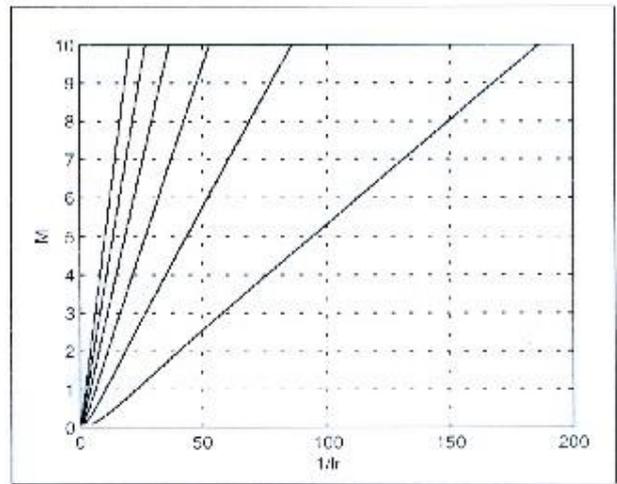


Figura 18. $f_r^{-1} \times M$ para $0.1 \leq M \leq 10.0$ e $Fr = 0.05$ (curva mais abaixo); 0.10; 0.15; 0.20; 0.25 e 0.30 (curva mais ao alto).

continuamente com o aumento de M (diminuição em T), conforme se esperava. Assim sendo, verifica-se que a existência de um limite mínimo para X *em valor absoluto* não implica necessariamente numa inconsistência de caráter físico ao problema.

Matematicamente, o caminho natural para se investigar essa questão seria calcular o $\lim_{T \rightarrow 0} (k_r)^{-1}$. Infelizmente, a expressão que determina k_r é por demais complicada para se calcular analiticamente este limite, porém, o resultado mostrado na Figura 16 indica que o mesmo tende a um valor constante.

Vamos usar a Equação (65) e escrever:

$$\lim_{T \rightarrow 0} X \propto \lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{T}{f_r} \right) \quad (74)$$

Para que o limite acima tenda a um valor constante basta que:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{f_r} \propto \frac{1}{T} \propto M \quad (75)$$

Essa dependência linear do fator $(f_r)^{-1}$ com M pode ser verificada graficamente através das linhas retas da Figura 18.

Como o mesmo comportamento é observado para qualquer número de Froude, conclui-se que a existência de um valor mínimo para X é um resultado geral da presente teoria.

Este resultado inesperado, apesar de interessante, tem pouca aplicação prática, uma vez que ondas com períodos da ordem de minutos são bastante raras no oceano.

De qualquer maneira, a aplicação dos limites encontrados nessa seção ao rio estudado indica que a distância de

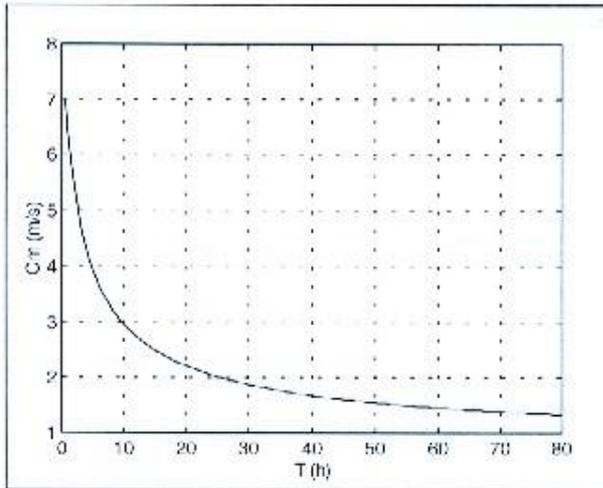


Figura 19. Influência do período da onda na velocidade de propagação para um rio com $q = 4.6 \text{ (m}^3\text{s}^{-1}\text{/m)}$; $S_0 = 1:12000$; $C_f = 30 \text{ m}^{1/2}\text{/s}$ com $0.5 \leq T \leq 80 \text{ hs}$.

penetração da maré fluvial – independentemente do período da onda – ficaria restrita à faixa:

$$27.7 \text{ km} \leq X \leq 120 \text{ km} \quad (76)$$

VELOCIDADE DE PROPAGAÇÃO

Na parte inicial do presente artigo foram apresentados resultados sobre a velocidade de propagação da maré fluvial (C_M) num rio sujeito a marés de períodos diferentes. Os resultados indicaram que a velocidade da onda de período menor é significativamente maior que a velocidade da onda de maior período. Para melhor evidenciar tal resultado, a Figura 19 mostra como C_M responde à variações do período da onda dentro duma faixa de interesse de T para o rio estudado.

O caráter *dispersivo* da maré fluvial apontado por Godin – “ondas de frequência mais baixa propagam-se mais lentamente que ondas de frequência mais alta”, característica (ii.) – fica claramente evidenciado na Figura 19 demonstrando a consistência da presente teoria também no que concerne à velocidade de propagação da maré fluvial. Entretanto, outros resultados importantes ainda podem ser extraídos da solução obtida, como será mostrado no restante desta seção.

Para avançar no entendimento físico desse tópico, vamos resgatar um outro resultado obtido na aplicação feita anteriormente. As velocidades de propagação calculadas para as duas situações de escoamento estudadas – uma com predomínio das forças de atrito (Caso #1: $M < 1$) e outra com predomínio das forças de inércia (Caso #2: $M > 1$) – foram comparadas com a velocidade (C_{grav}) de uma onda puramente gravitacional. Essa comparação indicou que a maré fluvial tende a ser significativamente mais lenta que a onda gravitacional no regime de atrito enquanto

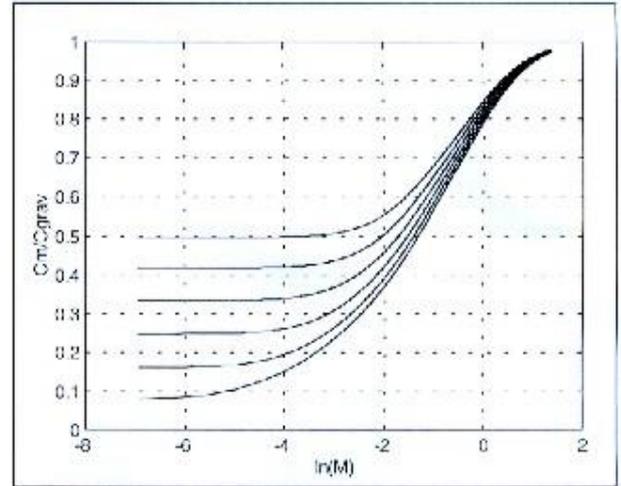


Figura 20. Velocidade relativa a C_{grav} para $0.001 < M < 4.0$ e $Fr = 0.05$ (curva mais abaixo); 0.10; 0.15; 0.20; 0.25 e 0.30 (curva mais ao alto).

que no regime de inércia as duas velocidades tendem a se equiparar.

Fazendo uso das Equações (67) e (68), é possível expressar essa velocidade relativa da seguinte forma:

$$\frac{C_M}{C_{grav}} = \frac{Fr}{f_i(1 - Fr)} \quad (77)$$

Como f_i depende de Fr e M , verifica-se que a velocidade relativa expressa por (77) é também uma função exclusiva desses números adimensionais, conforme mostrado na Figura 20 para faixas de valores de Fr e M de interesse.

A figura mostra de forma clara que a velocidade da maré fluvial tende assintoticamente a C_{grav} à medida que as forças de inércia passam a dominar o escoamento (M cresce). Tal resultado pode, na verdade, ser determinado analiticamente, tomando-se o limite quando $M \rightarrow \infty$ da função f_i dada por (26). O resultado é:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} f_i = \frac{Fr}{1 - Fr} \quad (78)$$

Substituindo-se (78) em (77), confirma-se que $\lim_{M \rightarrow \infty} C_M = C_{grav}$.

Entretanto, o extremo oposto da Figura 20 guarda um resultado inesperado. De fato, observando a figura com cuidado verifica-se que a velocidade de propagação da maré fluvial para o caso limite do regime de atrito ($M \ll 1$ logo, $\ln(M) \ll 0$) tende a valores fixos que dependem do número de Froude do escoamento básico.

Fazendo um paralelo com o comportamento de ondas de cheia em rios, é conveniente passar a usar como velocidade de referência a própria velocidade do rio u_0 . A

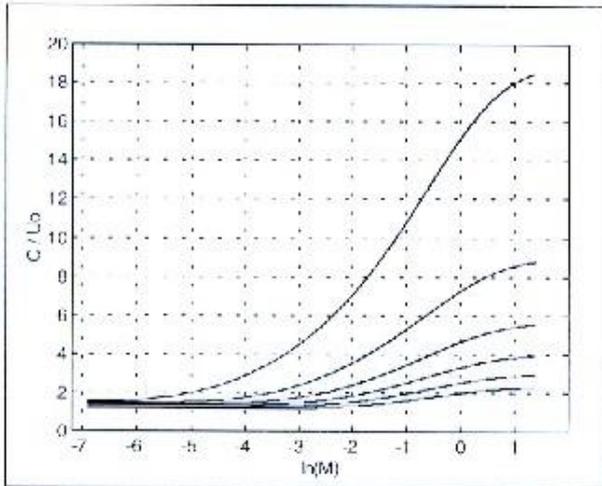


Figura 21. Análoga à Figura 20, para os mesmos valores de M e Fr lá indicados.

Equação (67) permite escrever essa nova velocidade relativa como:

$$\frac{C_M}{u_o} = \frac{1}{f_i} \quad (79)$$

A Figura 21 apresenta de forma gráfica essa equação, para as mesmas faixas de Fr e M usadas na Figura 20.

Como no caso anterior (em que $M \rightarrow \infty$) a velocidade da maré fluvial, curiosamente, também parece tender para um valor pré-determinado, à medida que as forças de atrito passam a dominar o escoamento ($M \rightarrow 0$). Chega-se, assim, ao seguinte surpreendente resultado: a velocidade de propagação da maré fluvial num escoamento dominado pelo atrito tende a um valor mínimo da mesma ordem de grandeza da velocidade básica do rio (de 1.0 a 1.5 x u_o , dependendo do número de Froude do escoamento básico).

Para elucidar essa questão, fixou-se um valor extremamente pequeno para M ($M = 0.000001$) e calculou-se a velocidade relativa a u_o para valores de Froude típicos do problema. O resultado está mostrado na Figura 22.

Para o rio usado nos exemplos anteriores, $Fr = 0.0874$ e o resultado acima indica uma velocidade mínima possível da maré fluvial no valor de $1.466 u_o = 1.03 \text{ m/s}$. Estabelece-se, assim, que a velocidade de propagação de uma maré fluvial de pequena amplitude no rio em questão (com qualquer período) deve ficar restrita à faixa:

$$1.466 u_o \leq C_M \leq (\sqrt{gh_o} - u_o) \quad (80)$$

que, em valores numéricos seria:

$$1.03 \text{ m/s} \leq C_M \leq 7.32 \text{ m/s} \quad (81)$$

A Figura 22 mostra também que existe um valor *máximo* para a velocidade *mínima* da maré fluvial, que é $1.5 u_o$.

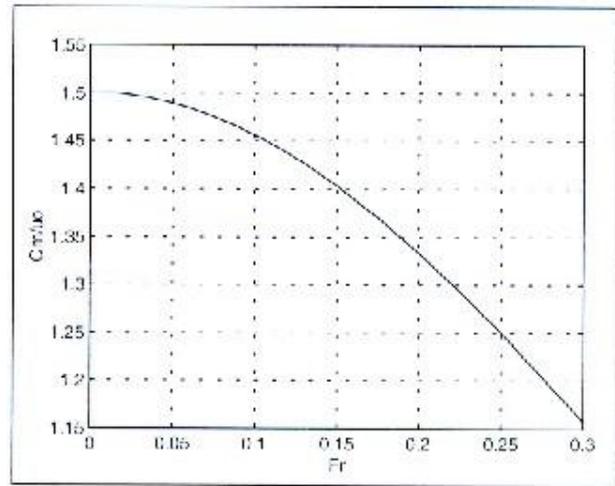


Figura 22 – Velocidade relativa a u_o para $M = 0.000001$ e $0.005 < Fr < 0.3$.

A velocidade $1.5 u_o$ corresponde, curiosamente, à velocidade de uma onda de cheia (que, portanto, *desce* o rio) a qual se propaga num regime completamente dominado pelo atrito, conhecida na literatura de hidrologia como “onda cinemática” (Lighthill e Whitham, 1955).

Este inesperado resultado, portanto, sugere que a velocidade de propagação da maré fluvial possui limite superior, tanto no regime dominado pela inércia: $C_M \leq C_{grav} = (\sqrt{gh_o} - u_o)$, quanto no regime dominado pelo atrito: $C_M \leq C_{cin} = 1.5 u_o$, onde C_{cin} = velocidade da onda cinemática.

INFLUÊNCIA DO PERÍODO NA SOBRE-ELEVAÇÃO DO NÍVEL MÉDIO E NA CORRENTE DO RIO

Os dois exemplos de aplicação feitos anteriormente forneceram um resultado interessante no que se refere à elevação de caráter permanente do nível *médio* do rio induzida pela maré fluvial ($\bar{\eta}_2$). De fato, apesar deste ser um efeito de ordem (ϵ^2) – portanto, bastante pequeno quando $\epsilon \ll 1$ – a comparação feita entre os dois casos (Figuras 8 e 3) mostrou que a sobre-elevação quase quintuplicou com o aumento do período da onda. Como a altura da maré na foz permaneceu a mesma (logo ϵ não se modificou), concluiu-se que tal aumento deve ter sido causado por uma intensificação da força proveniente das tensões de radiação que ocorreu em função do aumento da velocidade da corrente no interior do rio.

A questão que se coloca é:

“Existiria um limite máximo para essa amplificação?”

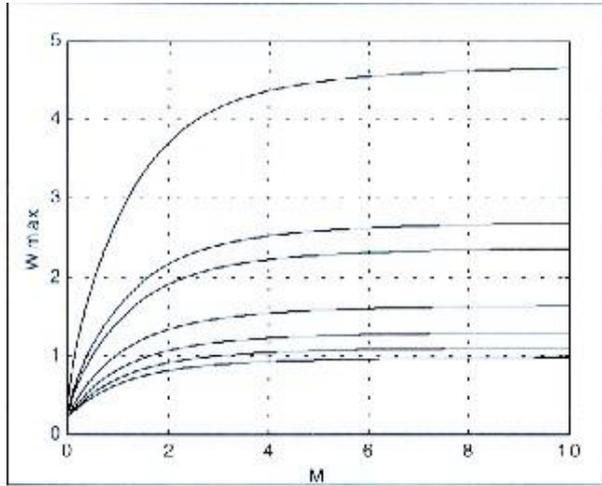


Figura 23. W_{max} x M para $Fr = 0.05$ (curva mais ao alto); 0.087, 0.10; 0.15; 0.20; 0.25 e 0.30 (curva mais abaixo).

Para responder a essa questão, resgataremos a forma adimensional da Equação (50), re-escrita abaixo da seguinte forma:

$$\frac{\bar{\eta}_2(x')}{h_o} \varepsilon^{-2} = W(x') \quad (82)$$

onde:

$$W(x') = E(e^{P'x'} - e^{2f_r x'}) \quad (83)$$

O efeito que se deseja investigar está todo contido na função W , a qual depende exclusivamente dos números adimensionais x' , Fr e M . Assim, para Fr e M dados, o ponto máximo dessa função (W_{max}) ocorrerá para o valor x'_{max} que satisfaz a $dW/dx' = 0$ e que vale:

$$x'_{max} = \frac{\ln P' - \ln 2f_r}{2f_r - P'} \quad (84)$$

Substituindo (84) em (83) é possível plotar o valor de W_{max} em função de M e Fr dentro duma faixa de interesse do problema.

Observando a Figura 23 fica claro que a amplificação de origem inercial do efeito de sobre-elevação do nível médio do rio atinge um limite máximo à medida que M aumenta e seu valor depende do *inverso* do número de Froude do escoamento básico (quanto menor Fr , maior a amplificação).

Para os casos analisados tem-se:

- Caso #1: $Fr = 0.0874$; $M = 0.1206 \rightarrow W_{max} = 0.53$;
- Caso #2: $Fr = 0.0874$; $M = 2.995 \rightarrow W_{max} = 2.44$.

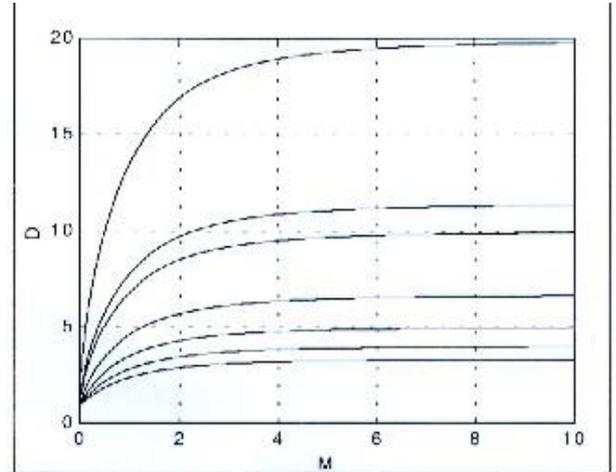


Figura 24. D (proporcional a $(u_1)_{max}$) x M para $Fr = 0.05$ (curva mais ao alto); 0.087, 0.10; 0.15; 0.20; 0.25 e 0.30 (curva mais abaixo).

Portanto, verifica-se que a diminuição do período de $12.42 b$ para $0.5 b$ acarretou uma amplificação em $(\bar{\eta}_2)_{max}$ de 4.6 vezes.

Fisicamente, a existência desse valor limite indica que a *força responsável* pela sobre-elevação também deve atingir um valor máximo. Conforme mostrado na Expressão (44), essa força depende do gradiente da tensão de radiação a qual está relacionada com a perturbação da velocidade do rio causada pela maré fluvial (u_1). Portanto, é de se esperar que a própria velocidade u_1 apresente um comportamento similar a W_{max} .

Para investigar essa questão, plotou-se a Figura 24, que mostra como a função (adimensional) D varia em função de Fr e M . Essa função, definida por (34), pode ser interpretada da seguinte forma:

$$D = \frac{(u_1)_{max}}{u_o} \varepsilon^{-1} \quad (85)$$

Ou seja, D mede a amplificação de origem inercial que u_1 experimenta relativamente a u_o .

A semelhança de comportamento entre W_{max} e D fica evidente quando se compara as Figuras 23 e 24, confirmando que a sobre-elevação do nível médio e a perturbação da velocidade causada pela maré fluvial estão relacionadas.

A Figura 24 também mostra que D , e conseqüentemente $(u_1)_{max}$, tendem a valores constantes à medida que M aumenta. Esse comportamento da velocidade, na verdade, já era esperado e pode ser quantificado de forma bastante simples. De fato, conforme discutido anteriormente, com o aumento da importância das forças de inércia (M crescendo), a tendência da maré fluvial é comportar-se cada vez mais como uma onda puramente "gravitacional". Ora, a velocidade induzida na água por uma onda desse tipo é dada por:

$$u(x, t) = u_o - \sqrt{\frac{g}{h_o}} \eta(x, t) \quad (85)$$

O valor máximo dessa velocidade pode ser escrito como:

$$\frac{u_{\max}}{u_o} = 1 - Fr^{-1} \epsilon \quad (86)$$

Comparando (85), (86) e (54) deduz-se que:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} (u_1)_{\max} = Fr^{-1} \quad (87)$$

Esse resultado pode ser confirmado diretamente na Figura 24, comparando-se os valores numéricos dos limites com o inverso do número de Froude correspondente (exemplo: o limite para D na curva correspondente a $Fr = 0.05$ é $Fr^{-1} = 20$).

Retornando ao valor máximo da sobre-elevação do nível médio, a similaridade entre este e o parâmetro D indica que $(\bar{\eta}_2)_{\max}$ também guarda uma relação funcional com Fr do tipo:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \bar{\eta}_2 \propto Fr^{-1} \quad (88)$$

conforme se tinha observado inicialmente.

Assim, o que se pode concluir dessa análise é que a sobre-elevação do nível *médio* do rio – um efeito aparentemente pouco importante por ser de ordem (ϵ^2) – pode se tornar quase da mesma ordem de grandeza ($O(\epsilon)$) da própria amplitude da maré por ação das forças inerciais.

Com isso encerra-se a parte da investigação referente à influência do período da oscilação nas características da maré fluvial. A seguir, trataremos de um outro tópico igualmente importante: a influência da vazão.

INFLUÊNCIA DA VAZÃO DO RIO NO AMORTECIMENTO DA MARÉ FLUVIAL

A influência da vazão do rio (q) no amortecimento da maré fluvial é um dos pontos mais importantes do problema. Fazendo uso novamente da distância de penetração (X) como indicador da intensidade do amortecimento, a Figura 25 mostra como X responde às variações de q para as condições do Caso #1.

A figura indica claramente que um *aumento da vazão* implica num *aumento* da distância de penetração e, por consequência, num amortecimento *mais lento* da maré. Este comportamento contraria frontalmente a terceira característica básica observada por Godin e, portanto, é fundamental compreender porque a presente teoria está indicando esse resultado.

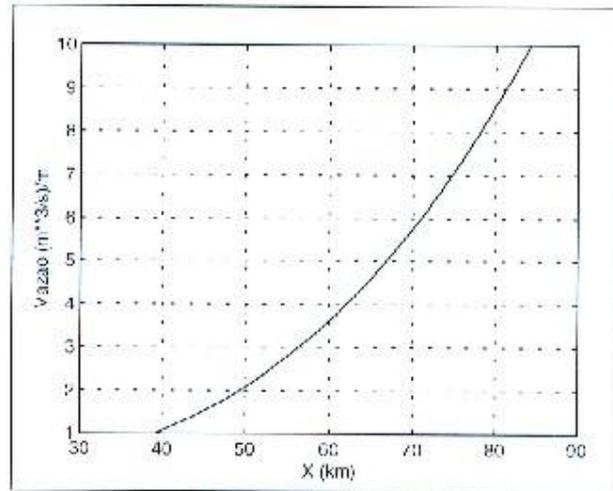


Figura 25. Influência da vazão na distância de penetração de uma maré com período $T = 12.42$ hs num rio com $S_o = 1:12000$; $C_f = 30 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$ com $1.0 \leq q \leq 10.0 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$.

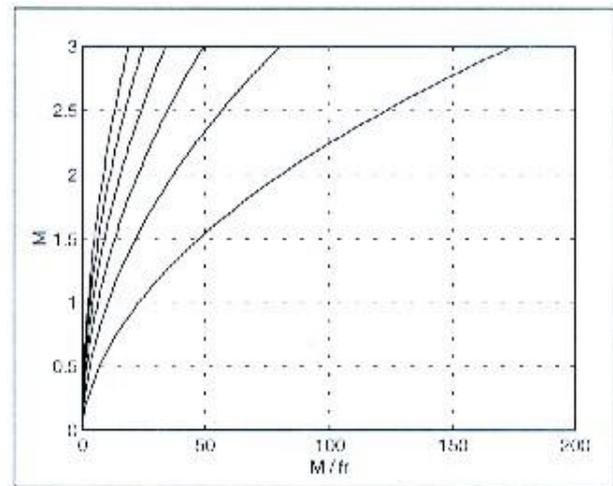


Figura 26. Função M/fr (proporcional a X) x M para $0.01 < M < 3.0$ e $Fr = 0.05$ (curva mais inclinada); 0.10; 0.15; 0.20; 0.25 e 0.30 (curva mais vertical).

Como primeiro passo, vamos usar as Equações (12), (13) e (69) na Equação (65), para obter a seguinte expressão alternativa para a distância de penetração da maré:

$$X = \left[-\frac{\ln 0.01}{s^2} g S_o \right] \frac{M}{f_r} \quad (89)$$

Para um rio de declividade S_o e uma maré de frequência s (ambos pré-fixados), o termo entre colchetes em (89) pode ser interpretado como uma *constante* conhecida, ficando o efeito da vazão (variável) do rio embutido na função M/f_r , a qual está plotada na Figura 26, *versus* M e Fr .

Uma inspeção da figura mostra que, para um dado número de Froude, um aumento em M ocasiona um au-

mento na função M/f_r e, conseqüentemente, na distância X . Tal resultado permite uma interpretação física coerente, pois um aumento em M implica numa diminuição da importância das forças de atrito no escoamento e, portanto, numa dissipação de energia da maré menos intensa no interior do rio.

Retornando à aparente inconsistência apontada na Figura 25, o comportamento lá observado ficaria justificado se for possível mostrar que um aumento de vazão causa um aumento em M . Com esse ponto em mente, reinterpreta-se abaixo uma das possíveis definições do número adimensional M , dada na Equação (69),

$$M = \frac{sC_f^{2/3}}{gS_o^{2/3}} q^{1/3} \quad (69\text{-bis})$$

Para valores pré-estabelecidos de s , C_f e S_o , a expressão acima indica que M é *diretamente proporcional a* $q^{1/3}$. Portanto, um aumento em q implica *necessariamente* num aumento em M , conforme se queria demonstrar.

Adicionalmente, uma vez fixada a declividade (S_o) e o coeficiente de atrito ($K = g/C_f^2$) do rio, o número de Froude do escoamento permanente *uniforme*, curiosamente, torna-se independente da vazão pois:

$$Fr = \frac{u_o}{\sqrt{gh_o}} = \frac{u_o^{3/2}}{\sqrt{gq}} = \frac{q}{\sqrt{gh_o^{3/2}}} = \sqrt{\frac{S_o}{K}} \quad (90)$$

Portanto, conclui-se que um aumento da vazão não afeta Fr , aumenta M e, por conseguinte, aumenta X .

Voltando a atenção novamente à Equação (69), vê-se que, no que se refere ao parâmetro M , um aumento da vazão do rio tem o mesmo efeito de uma diminuição do período da maré (ambos aumentam M). Assim sendo, a Figura 13 possibilita ainda observar que um aumento em q implica também num aumento da penetração *relativa* ao comprimento de onda (X/L). Portanto, mesmo do ponto de vista da onda, a tendência continua a ser de aumento.

Como mencionado acima, este resultado parece estar em flagrante contradição com a assertiva de Godin de que “a atenuação da maré aumenta com o aumento da vazão do rio”. *Como explicar tal fato?*

A raiz dessa *aparente* contradição reside na hipótese do escoamento básico ser *uniforme*. De fato, se esse for o caso, um aumento da vazão causará *necessariamente* aumentos *simultâneos* na altura d'água (h_o) e na corrente (u_o) do rio. Um aumento de corrente favorece a atenuação da maré fluvial uma vez que o atrito é proporcional ao quadrado da velocidade da água. Entretanto, um aumento da altura d'água favorece a penetração da maré no rio, pois o comprimento da onda aumenta com o aumento de h_o . Os resultados da presente teoria mostram que, no caso do escoamento básico ser uniforme, o segundo efeito sobrepuja o primeiro.

Na opinião deste autor, essa discordância com as observações de Godin pode ser explicada pelo fato que, na vasta maioria dos casos “reais”, o escoamento básico no rio *não* se processa em regime uniforme, pelo simples fato que o nível médio da água na foz é controlado pelo mar e, portanto, independe da vazão do rio. Esse ponto parece ter recebido pouca atenção até o momento e, por isso, merece ser aprofundado. A questão que se coloca então é:

“Pode o cenário descrito acima ser alterado se a hipótese do escoamento uniforme for levantada?”

Apesar da solução analítica desenvolvida anteriormente *não* se aplicar a esse caso, é possível obter uma resposta *qualitativa* à questão acima, conforme se discute a seguir.

EFEITO DO AUMENTO DA VAZÃO NO AMORTECIMENTO DA MARÉ NUM RIO EM REGIME BÁSICO NÃO-UNIFORME: ANÁLISE QUALITATIVA

No caso de um rio onde o escoamento básico se processa em regime permanente *não-uniforme*, a maré fluvial dar-se-ia como uma perturbação sobreposta a uma dada *curva de remanso* pré-existente – situação esta não considerada na solução apresentada. Assim, o efeito esperado de um aumento de vazão do rio terá de ser feito de forma aproximada.

A exemplo do que foi feito na Parte 1, o uso dos recursos da Análise Dimensional pode ser útil aqui. Assim, o primeiro ponto a ser considerado refere-se ao fato de que o escoamento básico não-uniforme do rio necessitaria, para sua completa especificação, de mais um parâmetro além da altura d'água (h_o), velocidade da corrente (u_o) (ou equivalentemente, q e S_o) e coeficiente de atrito (C_f) do caso uniforme. Este novo parâmetro, h_{foz} = *nível médio do rio na foz*, introduziria o mecanismo físico de *controle* do escoamento fluvial *por jusante* (admitindo escoamento subcrítico).

Admitindo que a maré fluvial pudesse ainda ser determinada pela sua frequência (s) e amplitude (a), as grandezas controladoras seriam, agora, em número de 7:

$$h_o, u_o, C_f, h_{foz}, s, a, g \quad (91)$$

A exemplo do que foi feito na Parte 1, aplicando o teorema dos π de Buckingham, constata-se que a maré fluvial passaria a depender de quatro grupos adimensionais independentes obtidos a partir das sete grandezas acima. À luz do que já foi feito até agora é razoável supor que esse novo número adimensional (μ) tivesse a forma:

$$\mu = \frac{h_{foz}}{h_o} \quad (92)$$

Assim, três casos possíveis se apresentariam:

- i. $\mu > 1 \rightarrow h_{foz}$ mais *alto* que h_o : escoamento básico no rio seria uma curva de remanso do tipo M1.
- ii. $\mu = 1 \rightarrow h_{foz}$ coincidente com h_o ; não haveria remanso e o escoamento básico seria *uniforme* (caso estudado).
- iii. $\mu < 1 \rightarrow h_{foz}$ mais *baixo* que h_o : escoamento básico no rio seria uma curva de remanso do tipo M2.

Retornando à questão da influência da vazão do rio na penetração da maré, vê-se que, no caso de um rio com escoamento básico *não-uniforme*, *não basta* especificar a nova vazão: para especificar corretamente o problema é necessário informar também o que acontecerá com o nível médio do rio na foz h_{foz} . Portanto, a assertiva (iii.) de Godin deveria ser complementada com essa nova informação. Eis aí o ponto chave da explicação que buscamos.

Para avançar nesse questão, vamos considerar uma situação – ainda idealizada porém mais realista (e inspirada em condições reais do rio Itajaí) – onde inicialmente existe uma combinação de q e h_{foz} que produz um escoamento básico no rio na forma de uma curva de remanso tipo M1 ($h_{foz} > h_o$: tipo i.). Suponhamos que a vazão do rio tenha *aumentado* para, digamos, $3q$ e que h_{foz} *não* tenha sofrido variação. Nesse caso, o escoamento básico do rio tomaria a forma de uma curva de remanso M2 ($h_{foz} < h_o$: tipo iii.). Ora, a maré fluvial seria uma perturbação em cima de condições básicas do rio variáveis em x (isto é, $h_o = h(x)$). Como a solução encontrada não se aplica a essa situação, podemos apenas *especular* sobre qual deve ser o comportamento esperado da maré fluvial nesse caso.

Para tanto, vamos admitir que a frequência da maré seja suficientemente baixa para garantir o predomínio das forças de atrito no escoamento perturbado (similar ao Caso #1 estudado). Fazendo uma analogia com a teoria desenvolvida, vamos admitir ainda que o comportamento dos envelopes de altura da maré fluvial nas duas situações de vazão seja similar àquele dado pela solução permanente. Sob essas hipóteses, a resposta da maré fluvial a um aumento de vazão com nível médio do rio fixo na foz pode ser qualitativamente avaliada através do comportamento das curvas de remanso M1 e M2, como mostrado a seguir.

Num esforço para retratar uma situação a mais realista possível, adotaram-se os seguintes valores numéricos:

- Situação de vazão baixa: $q = 4.6 \text{ (m}^3\text{s}^{-1})/\text{m}$;
- Situação de vazão alta: $q = 13.8 \text{ (m}^3\text{s}^{-1})/\text{m}$.

Para ambos os casos o nível médio na foz foi fixado em $h_{foz} = 10 \text{ m}$ e $S_o = 1:12000$ e $C_f = 30 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$ como antes; amplitude da maré na foz: $a = 0.5 \text{ m}$. Como o valor escolhido para h_{foz} não é mais uma pequena fração de h_o , a solução analítica para curvas de remanso (56) não seria mais uma boa aproximação. Assim, todas as curvas mostradas a partir daqui foram calculadas numericamente pelo “Step Method” (ver, por exemplo, Sellin, 1969).

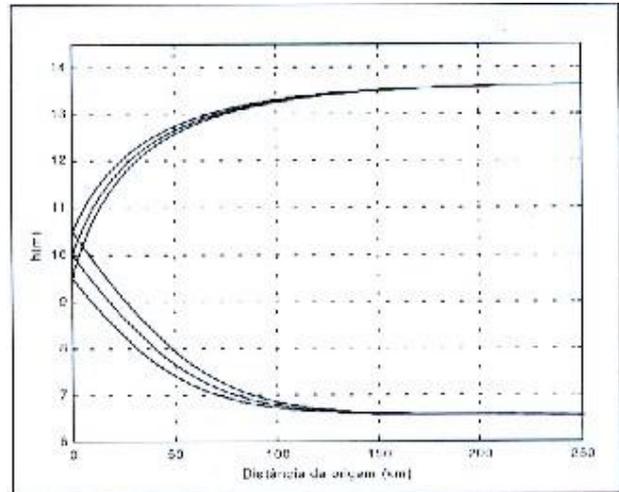


Figura 27. Curvas de remanso traçadas pelo “Step Method”: situação de baixa vazão: $q = 4.6 \text{ (m}^3\text{s}^{-1})/\text{m}$; situação de alta vazão: $q = 13.8 \text{ (m}^3\text{s}^{-1})/\text{m}$; para ambos os casos, $h_{foz} = 10 \text{ m}$; $S_o = 1:12000$, $C_f = 30 \text{ m}$ e $a = 0.5 \text{ m}$ como antes.

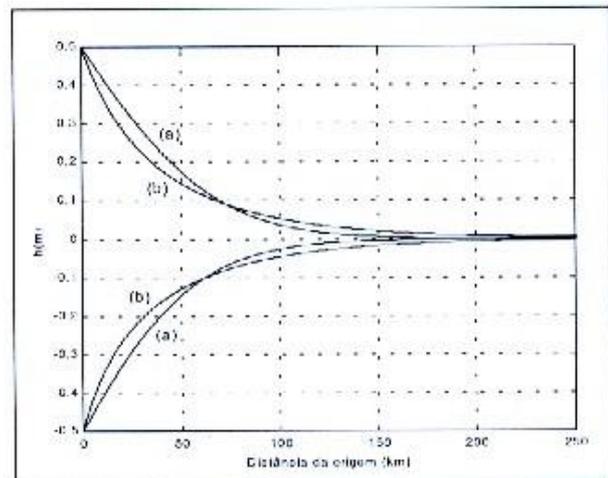


Figura 28. “Pseudo-Envelopes” relativos ao escoamento básico do rio para situação de vazão baixa (a) e vazão alta (b).

O objetivo é usar as curvas de remanso para avaliar se o amortecimento da maré tenderia a se intensificar ou não com o aumento da vazão. Para facilitar essa comparação, as curvas mostradas na Figura 27 foram “retificadas” na Figura 28, a qual mostra as *diferenças* entre as curvas superior e inferior (pseudo-envelopes da maré fluvial) e as curvas centrais (escoamento básico não-uniforme) nos dois casos de vazão.

Comparando-se as curvas na Figura 28 vê-se que a tendência da maré nos primeiros 70 km (aproximadamente) seria de atenuar-se mais rapidamente na situação de vazão alta que na de vazão baixa. A partir daí a situação se inverte, sendo a maré atenuada um pouco mais efetivamente no caso da vazão baixa.

Assim, admitindo que a presente analogia forneça resultados qualitativamente corretos, seria de se esperar que

medições feitas dentro desse trecho inicial do rio indicassem uma *intensificação* do amortecimento da maré com o aumento da vazão, em *concordância* com as observações de Godin.

Essa análise, apesar de aproximada, aponta na direção esperada: a não-uniformidade do escoamento básico do rio é capaz de afetar de forma significativa a intensidade do amortecimento da maré fluvial. Para realçar a importância dessa questão, analisa-se a seguir um caso hipotético onde a vazão do rio foi mantida constante e o nível médio na foz sofreu um rebaixamento. Os seguintes valores numéricos foram usados:

- Situação #1: $q = 9.2 \text{ (m}^3\text{s}^{-1}\text{)/m}$; $h_{\text{foz}} = h_0 = 10.41 \text{ m}$;
- Situação #2: $q = 9.2 \text{ (m}^3\text{s}^{-1}\text{)/m}$; $h_{\text{foz}} = 6.56 \text{ m}$.

sendo todos os demais parâmetros mantidos.

As Figuras 29 e 30 sugerem que um rebaixamento do nível do rio na foz implicaria numa considerável intensificação da atenuação da maré fluvial *independentemente da vazão* do rio. Fisicamente, pode-se interpretar esse comportamento da seguinte forma: Na situação de h_{foz} baixo, o escoamento básico do rio assumiria a forma de uma curva de remanso M2 onde $h(x) < h_0$ e $u(x) > u_0$. Conforme mencionado anteriormente, uma diminuição da altura d'água concomitante com um aumento da velocidade da corrente propiciaria condições *duplamente* favoráveis à intensificação do amortecimento da maré, como observado na Figura 30.

Apesar dessa análise aproximada ter fornecido resultados qualitativamente compatíveis com a observação de Godin de que “a atenuação da maré aumenta com o aumento da vazão do rio”, a confirmação dos pontos aqui levantados terá de aguardar uma solução que trate o caso de uma maré fluvial que atue num rio com escoamento básico em regime permanente *não-uniforme*.

CONCLUSÃO

Na primeira parte do presente trabalho a maré fluvial foi modelada como uma onda periódica progressiva que penetra num rio de geometria simplificada cujo escoamento básico se dá em regime permanente uniforme subcrítico. Uma solução analítica do problema foi obtida para o caso de uma maré de pequena amplitude que apenas perturba o escoamento básico do rio sem provocar inversão de velocidade. A solução depende de três números adimensionais:

$$\varepsilon \equiv \frac{a}{h_0}; \quad Fr \equiv \frac{u_0}{\sqrt{gh_0}}; \quad M \equiv \frac{h_0 s C_f^2}{g u_0}$$

obtidos a partir dos seis parâmetros básicos do problema (q , S_0 , C_f , s , a , g) sendo um deles (M) um indicador da importância relativa entre as forças de inércia e de atrito presentes no escoamento.

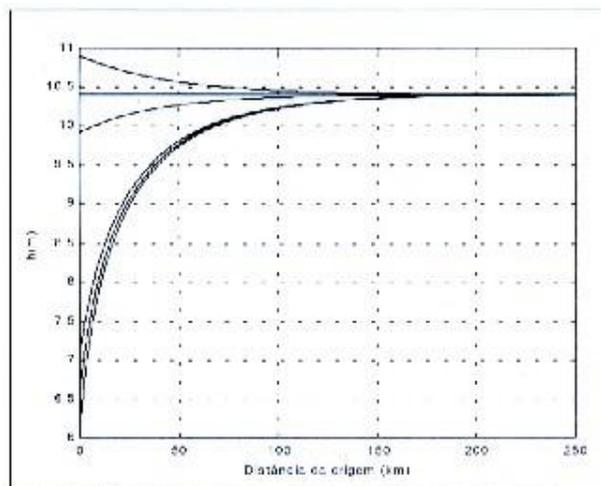


Figura 29. Curvas de remanso traçadas pelo “Step Method” para: $q = 9.2 \text{ (m}^3\text{s}^{-1}\text{)/m}$; $S_0 = 1:12000$, $C_f = 30 \text{ m}$; $a = 0.5 \text{ m}$ e situação #1: $h_{\text{foz}} = h_0 = 10.41 \text{ m}$; situação #2: $h_{\text{foz}} = 6.56 \text{ m}$.

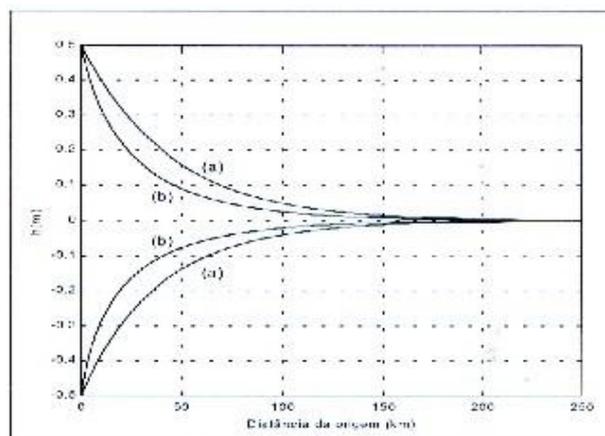


Figura 30. “Pseudo-Envelopes” relativos ao escoamento básico do rio para $h_{\text{foz}} = 10.41 \text{ m}$ (a) e $h_{\text{foz}} = 6.56 \text{ m}$ (b).

Nessa segunda parte do trabalho, a solução obtida na Parte 1 foi ilustrada através de dois exemplos de aplicação e depois utilizada para investigar aspectos peculiares do fenômeno. Os principais resultados são sumarizados a seguir:

Quanto à *intensidade da atenuação* da maré fluvial, a solução mostrou que:

- A intensidade da atenuação depende do comprimento (e do período) da onda em termos *absolutos*, ou seja, para distâncias medidas ao longo do rio (em *km*, por exemplo): ondas de menor comprimento (e período) são atenuadas mais rapidamente que ondas de maior comprimento (e período maior). Entretanto, ao analisar a atenuação *relativa* ao comprimento de onda (isto é, considerando distâncias medidas em comprimentos de onda), se conclui que a atenuação diminui com o aumento do período da onda.

- A solução permanente do problema (curvas de remanso) superestima os valores máximos e mínimos atingidos pela água (envelopes) na maré fluvial sendo o envelope de valores máximos um pouco mais próximo da curva de remanso que os envelopes de valores mínimos.
- A diferença entre as curvas de remanso e os envelopes diminui à medida que o período da maré aumenta de forma que uma curva de remanso pode ser considerada como um caso limite do envelope da maré fluvial quando $T \rightarrow \infty$.
- A distância de penetração da maré (X) possui limites no que se refere tanto ao valor máximo quanto ao valor mínimo. O valor máximo corresponde ao comprimento da curva de remanso e o valor mínimo é função de Fr .

Quanto à *velocidade de propagação*, a solução mostrou que:

- A maré em rios adquire um caráter dispersivo no qual ondas de período mais longo se propagam mais lentamente que as de período mais baixo.
- No regime controlado pela inércia (períodos curtos ou parâmetro $M \gg 1$), a velocidade de propagação da maré fluvial (C_M) se aproxima da velocidade de uma onda longa estritamente “gravitacional” (C_{grav}):

$$C_M \rightarrow C_{grav} = (\sqrt{gh_o} - u_o)$$

- No regime controlado pelo atrito (períodos longos ou parâmetro $M \ll 1$), a velocidade de propagação da maré fluvial tende a um valor mínimo não-nulo da mesma ordem de grandeza da velocidade básica do rio (de 1.0 a $1.5 u_o$) cujo valor depende de Fr . O valor *máximo* para a velocidade *mínima* da maré, $1.5 u_o$, corresponde a velocidade da “onda cinemática”, bem conhecida em hidrologia.
- Portanto, uma vez satisfeitas as hipóteses básicas da presente teoria, os resultados indicam que a velocidade de propagação da maré fluvial (para qualquer período considerado) ficará restrita a faixa:

$$1.5 u_o \leq C_M \leq (\sqrt{gh_o} - u_o)$$

Quanto à sobre-elevação do nível médio do rio induzido pela maré fluvial:

- Este efeito manifesta-se em ordem (ϵ^2) em resposta à força proveniente da tensão de radiação da maré no interior do rio.
- Seu valor máximo cresce à medida que o período da onda aumenta, atingindo um valor limite que depende de Fr^{-1} .

- Esse comportamento é semelhante ao comportamento da perturbação da velocidade do rio causada pela maré fluvial (u_1) que tem o mesmo tipo de dependência funcional com o período e o número de Froude.

Quanto à *influência da vazão* do rio no amortecimento da maré fluvial, a solução indicou que:

- A intensidade da atenuação da maré *diminui* com o aumento da vazão do rio. Ao contrário dos outros resultados obtidos, este resultado contrasta com as observações de Godin. Essa aparente contradição parece estar vinculada a uma das hipóteses fundamentais do problema, qual seja, a de que o escoamento básico deve se dar em regime permanente uniforme. Uma investigação qualitativa feita na seção final do trabalho sugere que uma possível (e provável) não-uniformidade no escoamento básico do rio poderia explicar tal comportamento, porém uma comprovação definitiva sobre esse tópico necessita ainda de uma investigação mais aprofundada.

AGRADECIMENTO

O autor contou com o suporte do CNPq para realização do presente trabalho na forma de uma bolsa de pesquisa individual (Proc. 300152/82-5).

REFERÊNCIAS

- GODIN G. (1984). The Tide in Rivers, *International Hydrographic Review*, Monaco, LXI (2), 159:170.
- GODIN G. (1985). Modification of River Tides by the Discharge, *J. of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, ASCE, 111 (2): 257-274.
- GODIN G. (1991). Frictional Effects in River Tides, in: *Tidal Hydrodynamics*, Parker, B. B. (ed.), John Wiley & Sons, 379:402.
- GODIN G. (1999). The Propagation of Tides up Rivers with Special Considerations on the Upper Saint-Lawrence River, *Estuarine, Coastal and Shelf Science* 48: 307-324.
- LIGHTHILL, M. J.; WHITHAM, G. B. (1955). On Kinematic Waves I. Flood Movements in Long Rivers, *Proc. Royal Society of London, A*, 229, 281:316.
- MELO F^o, E. (1998). Considerações Sobre a Hidráulica de Canais Fluviais e de Canais de Maré, *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, 3 (2):95-107.
- SELLIN, R. H. J. (1969). *Flow in Channels*, MacMillan Co. Eng. Hydraulics Series.
- VONGVISESSONJAI, S.; ROJANAKAMTHORN, S. (1989). Interaction of Tide and River Flow, *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, ASCE, 115 (1): 86-104.

River Tides. Part 2: Applications***ABSTRACT***

Two applications of the solution obtained in Part 1 are presented: one for the case of a river tide dominated by friction ($M < 1$) and another one for a case dominated by inertia ($M > 1$). Next, the following topics are investigated: i) Influence of the tidal periods on the rate of the damping; ii) Comparison between the envelopes of the maximum and minimum water levels with backwater profiles; iii) Existence of maximum and minimum values for the penetration distance of the tide; iv) Behavior of the propagation speed; v) Influence of the periods on the over-elevation of the mean river level and current; vi) Influence of the river discharge on the damping of the tide; vii) Effect of a discharge increase on the damping of the tide in a river with non-uniform background flow. Several new results on these topics are presented.

Key Words: tides; fluvial; applications.