

A Importância da Caracterização da Corrente para a Correta Determinação do Comprimento e da Altura das Ondas. Parte 1: Embasamento Teórico e Dispersão

Claudio Freitas Neves^{*} e Andrea Moragas Dias^{*}

neves@peno.coppe.ufrj.br

Recebido: 28/12/12 - revisado: 26/05/13 - aceito: 04/07/13

RESUMO

Os tipos de sensores utilizados nas medições de ondas frequentemente não identificam a presença de correntes. Isto pode levar a erros na determinação da altura e do comprimento da onda. Utilizando a Teoria da Função de Corrente de Dean, este trabalho procura avaliar os erros existentes nos valores de comprimento de onda, quando se despreza a corrente. Resultados da Teoria Linear também são apresentados para quatro tipos de perfis de velocidade de corrente: uniforme, com vorticidade constante, exponencial e coseno. Os seguintes parâmetros são utilizados para comparação de resultados: o número de Froude, referido ao valor da corrente na superfície; a razão entre a profundidade local e o valor do comprimento de onda em águas profundas pela Teoria Linear na ausência de corrente; e a vorticidade adimensionalizada pela frequência da onda para um observador fixo. Os efeitos da corrente sobre a onda manifestam-se tanto como um desvio de frequência (efeito Doppler) entre aquela observada em um referencial fixo e a frequência intrínseca da onda em relação ao fluido em movimento, quanto na não linearidade do escoamento combinado onda-corrente. Para os casos estudados, os valores do comprimento de onda podem diferir de 5% a 90% em relação ao caso sem corrente.

Palavras-chave: Ondas. Vorticidade. Interação onda-corrente. Teoria da Função de Corrente. Dispersão.

INTRODUÇÃO

Devido à presença constante de ventos e de outras forças geradoras de correntes sobre corpos d'água, raramente as ondas propagam-se ou são geradas em fluidos quiescentes. Os gradientes horizontais e verticais de velocidade determinam a distribuição de vorticidade que, por sua vez, influencia a dinâmica do escoamento oscilatório. Deste modo, a realização, na Natureza e em laboratório, de medições detalhadas do campo de velocidades é fundamental, não apenas para a verificação experimental de teorias rotacionais de ondas, mas para a correta estimativa da altura e do período das ondas.

O presente trabalho é o primeiro de uma série de quatro artigos que têm por objetivo demonstrar a importância de medições de perfis de correntes simultaneamente a medições de ondas, quantificando os erros cometidos na determinação de grandezas cinemáticas e dinâmicas das ondas

quando se despreza a presença de uma corrente subjacente. Neste trabalho serão discutidos apenas os aspectos referentes à equação de dispersão. A segunda parte abordará a influência da dispersão para a determinação correta da pressão dinâmica (sob a crista e sob o cavado) e sua conversão em altura de onda na superfície livre. A terceira parte será dedicada à aceleração e ao campo de velocidades orbitais e a quarta parte abordará, finalmente, as propriedades não lineares (tensão de radiação, nível médio) e a conservação da ação da onda (*wave action*).

As teorias matemáticas que descrevem a propagação das ondas na superfície do mar foram amplamente baseadas na hipótese de escoamentos irrotacionais (e.g. JONSSON, 1989; JONSSON; SKOVGAARD; WANG, 1970). Entretanto, é evidente que é inadequada a descrição matemática das ondas sem a inclusão de efeitos de correntes quase estacionárias, com as suas heterogeneidades espaciais. Na prática, contudo, dificuldades operacionais ou econômicas impedem medições simultâneas de correntes e ondas, embora tal situação esteja se revertendo com o advento dos perfiladores acústicos (ADCP), com o uso mais difundido de sen-

*Programa de Engenharia Ocêânica, COPPE/UFRJ

soriamento remoto e com exigências mais rigorosas nos projetos de engenharia costeira e oceânica.

Dalrymple (1973) alertava que algumas técnicas para a quantificação de forças sobre uma estrutura, causadas por ondas deslocando-se numa corrente cisalhante, envolviam simplesmente a superposição linear da corrente sobre uma onda irrotacional, sem considerar os efeitos não-lineares que ocorrem na superfície livre. Se tal procedimento naquela época era questionável, atualmente não é mais aceitável.

Sensores que registram acelerações verticais (bóias), pressão subsuperficial, ou deslocamento da superfície livre (*wave staff*) são regularmente utilizados para a determinação da superfície livre das ondas. Nos dois primeiros casos, utilizam-se funções de transferência para obter o deslocamento da superfície livre; tais funções dependem, entre outros fatores, da frequência das ondas conforme observada por um equipamento estático, da profundidade local e da elevação do instrumento na coluna d'água. No Brasil, por muitos anos utilizaram-se sensores de pressão por serem equipamentos mais baratos e menos suscetíveis a avarias ou vandalismo. A função de transferência que relaciona as flutuações da pressão a variações na elevação da superfície livre é geralmente baseada na teoria linear de ondas.

Segundo Biesel (GABRIEL; HEDGES, 1986), um problema comum na utilização da teoria linear de ondas para determinar propriedades cinemáticas da onda na superfície livre a partir de registros de pressão é o erro devido às não linearidades; outros autores, citados nesta mesma referência, alertam para a discrepância entre a relação de dispersão real e a aproximação linear. Tentativas para superar as limitações da teoria linear de ondas foram centradas na incorporação de um fator de correção empírico à função de transferência linear, sendo esperado que tal fator dependesse não somente das propriedades da onda, mas também da elevação dos sensores em relação ao nível médio do mar (CAVALERI; EWING; SMITH, 1978).

Acontece, porém, que a influência de correntes sobre o movimento das ondas e sobre seus parâmetros já se manifesta em primeira ordem, como é o caso do efeito Doppler. Portanto, pode ser equivocado atribuir, exclusivamente à não linearidade, as discrepâncias entre teoria e observação de pressões.

Embora haja o reconhecimento teórico do problema, pelo menos de forma qualitativa, as informações quantitativas ainda são poucas. Medições de perfis verticais de correntes tornaram-se possíveis após o uso de perfiladores acústicos, que fornecem

informações de alta frequência e com boa resolução espacial. Nestes casos, em geral não se obtêm informações sobre as ondas, embora alguns trabalhos experimentais comprovem a importância da medição simultânea de ondas e correntes (e.g. SMITH, 2002).

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Sob o ponto de vista prático, o problema da superposição de ondas e correntes foi fortemente motivado pelos chamados “quebra-mares pneumáticos”, um tubo perfurado assentado sobre o fundo do mar, dentro do qual injeta-se ar comprimido, criando uma cortina de bolhas na água. Em 1942, Sir G. I. Taylor, em palestras ao Almirantado Britânico levantara a hipótese de que tal cortina de bolhas pudesse ser útil como um escudo contra as ondas. Taylor (1955) mostrou então, teoricamente, que as bolhas produziam uma corrente de água ascendente que se expandia numa corrente horizontal próximo à superfície. Pareceu-lhe mais provável então que as ondas fossem bloqueadas por esta corrente induzida e não pela ação direta das bolhas nem pela diferença de densidade da emulsão.

Taylor descobriu que uma corrente, direcionada contra as ondas, impedia a propagação de todas aquelas cujo comprimento fosse menor que um determinado valor crítico. Seu estudo baseou-se na investigação matemática das condições sob as quais ocorreria tal bloqueio. Foram considerados dois tipos de perfis de correntes: com velocidade uniforme até uma profundidade z_1 ou com velocidade decrescente linearmente desde a superfície até se anular numa profundidade z_1 .

Coube então a Evans (1955) realizar os experimentos que comprovaram que as ondas eram de fato bloqueadas pela corrente contrária produzida pela cortina de bolhas e mediu a distribuição de velocidade na corrente. Desde então, o assunto vem sendo objeto de investigação por vários autores (PAPROTA, 2013).

Estudos Experimentais

van Hoften e Karaki (1970) estudaram a dissipaçao de energia das ondas e as trocas energéticas entre onda e corrente. O canal media 15,8m de comprimento, 60cm de largura e profundidade total de 70cm, com lâmina d'água de 15,2cm; ondas com freqüências de 1,3 a 2,5 Hz eram geradas por um mecanismo tipo plunger posicionado a montante do

canal (ou seja, onda e corrente fluíam no mesmo sentido) e as velocidades da corrente variavam de 15 a 60 cm/s (vazões de 14 a 55 l/s). As velocidades foram medidas com anemômetros de filme quente em diversas elevações e posições ao longo do canal. A superfície livre foi medida a cada 15cm ao longo de 10m da seção de ensaio do canal. Medições foram efetuadas apenas com a corrente, apenas com ondas e com a superposição dos dois escoamentos. Este estudo concluiu que a velocidade orbital das ondas distorce o perfil da corrente, existe produção de energia turbulenta próximo à superfície como resultado da interação com as ondas, e aumenta o gradiente da velocidade no fundo (tensão). Os autores não mencionam o aparecimento de velocidades ou efeitos transversais, já que as ondas eram medidas apenas no centro do canal. Eles mencionam, no entanto, a importância de fenômenos de reflexão.

Battjes (1981) estudou os efeitos de correntes de maré sobre a magnitude das alturas de ondas no estuário Oosterschelde, Holanda. As observações indicavam que, para uma mesma lámina d'água e para o mesmo clima de ondas, a altura significativa apresentava um comportamento histerético ao longo de um ciclo de maré, ou seja, para uma mesma lámina d'água, a altura significativa na vazante era diferente daquela na enchente. Considerou-se então a hipótese de que este fenômeno pudesse ser devido à influência das correntes de maré. Como a construção do sistema de proteção contra marés meteorológicas na costa da Holanda (Projeto Delta) alteraria o regime de correntes ao largo daquele estuário, havia a expectativa de mudanças no clima de ondas na costa e, em especial, impactos significativos sobre os diques.

Para os estudos de refração por correntes e profundidades variáveis, foi utilizado um modelo de onda de crista longa, monocromática, baseado na teoria linear de escoamento potencial; a arrebentação nos bancos era modelada por uma formulação semi-empírica para a altura de onda. O tempo de deslocamento do grupo de onda era pequeno quando comparado ao período da maré, o que tornava razoável a hipótese de quase estacionariedade para a corrente. Tais modelos comprovaram a histerese das alturas de ondas, conforme observado na Natureza.

Os testes numéricos foram efetuados para dois casos diferentes. No primeiro caso, o nível de maré era constante e as isóbatas eram retilíneas e paralelas em toda a região do canal até águas profundas. Somente três cenários de correntes estacionárias foram considerados: um típico de preamar,

um de baixa-mar e um para água calma (corrente nula). Os cálculos foram feitos para uma onda incidente com período igual a 8 s e com direção (em águas profundas) de 45 graus com as isóbatas. A profundidade era de 4 m sobre os bancos e de 20 m na parte mais funda do canal.

Os resultados mostraram que, sobre os bancos, o comprimento de onda era bastante afetado (17%) pela intensidade das correntes de maré, enquanto a altura de onda era pouco afetada (3%). Na área de transição dos bancos para o canal, a altura de onda diminuía na baixa-mar e aumentava na preamar, enquanto que dentro do canal, a altura de onda durante a preamar era em torno de 11% maior em relação ao caso de ausência de correntes, e durante a baixa-mar era cerca de 11% menor.

No segundo caso, o nível de maré e as velocidades variavam continuamente, simulando um ciclo de maré completo. O período de onda incidente era de 6 s e a direção de incidência era oblíqua aos principais canais do delta.

A análise dos resultados intermediários demonstrou que o aumento da altura de onda, do banco Banjaard para o canal, era maior quando a profundidade no banco (e também a altura de onda limitante) era mínima, porque os efeitos de refração entre o banco e o canal neste caso eram máximos.

Como a elevação da maré era uniforme na área estudada, em dois instantes de mesmo valor de nível de maré (um na enchente e outro na vazante) as situações diferiam somente em relação às correntes de maré. Consequentemente a histerese calculada seria devida somente às correntes de maré. Essa última conclusão foi então admitida como evidência suficiente para explicar as causas da histerese observada na Natureza.

Gabriel e Hedges (1986), realizando experimentos em canal de ondas, determinaram o espectro da elevação da superfície a partir de pressões registradas sob ondas irregulares deslocando-se numa corrente contrária. Demonstrou-se que o efeito Doppler devia ser considerado quando os espectros de elevação da superfície fossem determinados a partir de medições de pressão sub-superficiais feitas em presença de correntes, particularmente quando o transdutor de pressão fosse colocado próximo ao fundo do mar.

Para ondas deslocando-se numa corrente com velocidade média de 0,23 m/s, foram analisados o espectro observado e o previsto para o deslocamento da superfície a partir do registro de pressão. Em um caso, o efeito Doppler devido à corrente foi ignorado na determinação do número de onda (k) a partir da frequência observada (ω). No outro

caso, o efeito Doppler foi considerado através da utilização da equação:

$$(\omega - kU)^2 = gk \tanh kh \quad (1)$$

onde U é a componente da velocidade da corrente na direção da propagação da onda e h é a profundidade local. Denomina-se *frequência intrínseca* da onda, σ , o valor da frequência em relação ao fluido em movimento, $\sigma = \omega - kU$.

Smith (2002) relata os resultados do estudo realizado na baía Willapa, na costa sudoeste do estado de Washington, EUA, para fins de navegação, onde uma bóia de superfície e um sensor de pressão no fundo foram instalados, com o propósito de avaliar as feições de onda na presença de correntes. Os valores máximos de corrente de maré observados eram 1,4 m/s na vazante e 0,9 m/s na enchente. Ao desprezar a presença da corrente, a autora obteve erros de 20% na estimativa de alturas de onda, sendo que as alturas eram superestimadas na enchente (mesmo sentido de propagação de onda e corrente) e subestimadas na vazante (sentidos opostos de propagação).

Estudos Teóricos

Talvez o trabalho teórico mais completo sobre escoamentos bidimensionais num plano vertical com vorticidade arbitrária deva-se a Dubreil-Jacotin (1934). Para uma onda de forma permanente, propagando-se sobre uma corrente permanente, o escoamento combinado é permanente quando observado em um sistema de coordenadas que se desloca com a velocidade de propagação da onda. Neste sistema de coordenadas, através de uma transformação de variáveis $\Psi(X, Y) \rightarrow Y(\Psi, X)$, a autora obteve uma equação diferencial em termos da posição vertical Y da linha de corrente:

$$\begin{aligned} & \left[1 + \left(\frac{\partial Y}{\partial X} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 Y}{\partial \Psi^2} - 2 \frac{\partial Y}{\partial X} \frac{\partial Y}{\partial \Psi} \frac{\partial^2 Y}{\partial X \partial \Psi} + \left(\frac{\partial Y}{\partial \Psi} \right)^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} \\ &= - \left(\frac{\partial Y}{\partial \Psi} \right)^3 f(\Psi) \end{aligned} \quad (2)$$

onde $f(\Psi)$ é uma função que define a distribuição de vorticidade para cada linha de corrente. A solução numérica desta equação, em diferenças finitas, foi desenvolvida por Dalrymple (1973).

Hunt (1955) propôs soluções para o problema linearizado de ondas longas e curtas que se propagam contra ou a favor de correntes, cujo perfil de velocidade varia com a potência 1/7 da elevação em relação ao fundo.

$$U(y) = U_s (y/h)^{1/7} \quad (3)$$

onde y é a coordenada vertical a partir do fundo, h é a profundidade total e U_s a velocidade junto à superfície livre. As expressões da celeridade da onda (e consequentemente o número de onda e a equação de dispersão) são obtidas em séries de potências do número de Froude para a velocidade da corrente na superfície livre.

A equação apresentada por Hunt para a solução linearizada envolve a segunda derivada do perfil de velocidade. Yih (1972) retomou a mesma equação, abordando-a sob o ponto de vista da estabilidade (linear) do escoamento e as condições para existência teórica de modos neutros.

Hunt (1955) também apresentou soluções não lineares para onda solitária e cnoidal, propagando-se contra e a favor de uma corrente com o perfil de corrente dado pela equação (3).

Dean (1965) desenvolveu um método numérico que permitia determinar as características cinemáticas e dinâmicas de ondas não lineares de qualquer ordem. Podendo ser considerado dentro da categoria de métodos de Galerkin, parte-se de uma formulação pré-estabelecida para a solução, com coeficientes a serem determinados por um processo de minimização de uma função “objetivo”. Dalrymple (1973, 1974) estendeu o método para ondas que se propagavam numa corrente com vorticidade constante em até duas camadas.

A validade do modelo na representação do fenômeno real na Natureza era confirmada analiticamente pelo fato dos erros nas condições de contorno poderem ser tão pequenos quanto desejável.

Dalrymple concluiu que o efeito da corrente linear cisalhante numa onda de dada altura manifestava-se como uma mudança do comprimento de onda, o que por sua vez resulta em alterações na cinemática das partículas. Embora o modelo de Dalrymple não considerasse os efeitos transientes de uma onda propagando-se de uma zona sem correntes para uma região com corrente, ele evidenciava a influência da altura, da magnitude da corrente e do sentido de propagação na relação de dispersão.

Para validação do modelo, foram utilizadas as medições do experimento realizado entre setembro de 1960 e novembro de 1963 (Wave Project II),

conduzido no Golfo do México em lâmina d'água de 30 m, durante o qual foram observadas ondas de 12 m de altura por ocasião do furacão Carla. Sensores de pressão foram colocados em oito elevações ao longo de um pilar, desde o fundo até a superfície, e a elevação da superfície livre foi observada diretamente com o auxílio de um *wave-staff*. A comparação entre os resultados teóricos previstos pela teoria de Dean (apenas corrente) e a teoria de Dalrymple (com vorticidade $\Omega_0 = 0,025 \text{ s}^{-1}$) indicou diferenças de 10% entre as velocidades máximas previstas pelas respectivas teorias, embora os erros na condição de contorno dinâmica na superfície livre para a mesma ordem de aproximação numérica fossem praticamente os mesmos. É importante observar que diferenças de 10% na estimativa da velocidade implicam em diferenças de 20% na estimativa da força de arraste sobre a estrutura, e isto foi verificado para uma variação de velocidade de apenas 2,5 cm/s em 1 m ao longo da vertical.

Dalrymple e Cox (1976) apresentaram duas formas de solução para função de corrente, aplicada ao caso de ondas periódicas e simétricas, propagando-se em escoamento rotacional. Neste caso, a magnitude da vorticidade variava linearmente com a magnitude da função de corrente. O método de perturbação numérica convergia rapidamente para uma onda de altura e período determinados, em lâmina d'água especificada, e com distribuição de vorticidade determinada pela expressão $f(\psi) = \pm \gamma^2 \psi$ onde ψ é a função de corrente. Isto corresponde a correntes que variam com a profundidade como cosseno trigonométrico ou hiperbólico, dependendo do sinal ser positivo ou negativo, respectivamente. O parâmetro γ governa a magnitude da vorticidade.

Os autores concluíram que os modelos de onda, incluindo os efeitos de correntes favoráveis ou opostas, eram analiticamente válidos, satisfaziam todas as condições de contorno de modo exato, à exceção da condição de contorno dinâmica na superfície livre que era satisfeita na forma média quadrática.

Todas as propriedades cinemáticas e dinâmicas das ondas são afetadas pela presença de correntes, lembrando-se que os parâmetros livres no caso são a altura, o período e a profundidade. Correntes favoráveis demonstraram aumentar as velocidades horizontais sob a crista da onda, o comprimento de onda e a elevação da crista, enquanto que correntes contrárias possuem efeitos opostos.

Neves (1987) propôs uma solução formal das equações do movimento de Euler, periódica no

espaço, aplicando o método de separação de variáveis à equação de vorticidade bidimensional. Fisicamente, a solução corresponde a ondas que se propagam numa corrente cuja distribuição de vorticidade expressa-se como $f(\psi) = (a + b \log \psi)\psi$, onde a e b são constantes reais. Consequentemente pode ser utilizada para modelar ondas num escoamento rotacional, enquanto o perfil da corrente é descrito por uma função particular:

$$U^2(z) = \psi^2(z) [(a - b) + b \log \psi] + m \quad (3)$$

onde m é uma constante.

Apesar do autor não apresentar uma demonstração matemática rigorosa da existência de solução satisfazendo todas as condições de contorno usuais para escoamentos de superfície livre, há evidência numérica da validade da teoria na medida em que foi possível minimizar o erro médio quadrático na condição de contorno dinâmica da superfície livre, utilizando o mesmo método de Dalrymple (1973), Dalrymple e Cox (1976) e Dean (1965).

O comprimento de onda e os perfis de velocidade mostraram um melhor ajuste com ondas lineares, particularmente em relação à forma do perfil, que é mais simétrico em lugar de ter cristas pontudas e cavados achataados. Os valores para comprimento de onda diferiram por menos que 3% da Teoria de Onda de Função de Corrente de primeira ordem, embora a diferença pudesse ser tão grande quanto 13% para as teorias de maior ordem, o que demonstra a inadequação de utilizar o perfil de vorticidade constante para representar um escoamento com outra distribuição de vorticidade.

Kirby e Chen (1989), utilizando um método de perturbações em função do parâmetro $\epsilon = U/c \ll 1$, desenvolveram uma aproximação para a expressão da equação de dispersão no caso de ondas superpostas a correntes com perfil de velocidade arbitrário ao longo da profundidade, porém fracas em relação à celeridade da onda. Aplicando a diversos exemplos de perfis de velocidade, os autores demonstram a necessidade de levar a expansão até $O(\epsilon^2)$ em águas rasas e intermediárias e evidenciam os erros cometidos ao negligenciar a presença da corrente.

FORMULAÇÃO TEÓRICA

Colocação do problema matemático

Em um fluido inviscido e incompressível, ondas de crista longa deslocam-se colineares a cor-

rentes, em profundidade constante, sobre fundo rígido e impermeável. Admite-se ainda que a onda se propague sem alteração na forma e com celeridade constante. Trata-se de um problema bidimensional em perfil (2DV) e, para um sistema referencial de coordenadas que se desloque com velocidade igual à celeridade da onda, o problema torna-se estacionário.

As diferenças principais entre as teorias matemáticas clássicas apresentadas na literatura e a teoria aqui utilizada consistem na não linearidade do problema, na presença de vorticidade e o efeito Doppler.

Em primeiro lugar, sabe-se que ondógrafos de pressão tendem a subestimar a elevação da crista e a superestimar a elevação do cavado. Esta é uma característica não linear, pois a diferença entre as oscilações da pressão dinâmica e o deslocamento da superfície livre são proporcionais à esbeltez da onda (razão entre altura e comprimento da onda).

Em segundo lugar, sabe-se que a vorticidade altera significativamente a dinâmica do escoamento, como será comprovado adiante. Tais efeitos não são considerados quando se utilizam, para fins de projeto, teorias fundamentadas no potencial de velocidades, linearmente superpostas a correntes observadas na natureza, reconhecidamente rotacionais.

Em terceiro lugar, o período da onda que é observado em um referencial fixo (período aparente) é diferente daquele medido em um referencial que se desloca com o fluido (período intrínseco), fenômeno esse denominado efeito Doppler.

Sob o ponto de vista teórico, é preferível utilizar a função de corrente, pois o uso do potencial de velocidades é restrito a escoamentos irrotacionais.

A equação diferencial governante em duas dimensões no plano vertical é determinada a partir das equações de Euler, referidas a um observador que acompanha a onda:

$$(u - c)(u - c)_x + w(u - c)_z = -\frac{1}{\rho} p_x \quad (4)$$

$$(u - c)w_x + ww_z = -\frac{1}{\rho} p_z - g \quad (5)$$

onde u e w são as componentes horizontal e vertical da velocidade do escoamento combinado(onda + corrente), p é a pressão dinâmica, g é a aceleração da gravidade e c é a celeridade da onda. Neste referencial móvel, o escoamento é permanente.

Sendo o fluido incompressível, a equação da continuidade é expressa como:

$$(u - c)_x + w_z = 0 \quad (6)$$

e neste caso pode-se garantir a existência de uma função de corrente, $\psi(x, z)$, definida como:

$$u - c = -\psi_z \quad c \quad w = \psi_x \quad (7)$$

Em termos da função de corrente, expressa-se a vorticidade Ω como

$$\Omega = (u - c)_z - w_x = -\psi_{zz} - \psi_{xx} \quad (8)$$

Substituindo a expressão da função de corrente em (4) e (5) e eliminando o termo de pressão por diferenciação cruzada, chega-se à equação:

$$\psi_x \nabla^2 \psi_z - \psi_z \nabla^2 \psi_x = 0 \quad (9)$$

Esta equação estabelece que a vorticidade do escoamento ($-\nabla^2 \psi$) é constante ao longo de uma linha de corrente. Integrando esta equação ao longo de uma linha de corrente, chega-se à equação governante para o fluido (e.g. LAMB, 1945):

$$-\nabla^2 \psi = f(\psi) \quad (10)$$

onde f é uma função arbitrária.

A função de corrente satisfaz então o seguinte problema de valor de contorno:

$$-\psi_{xx} - \psi_{zz} = f(\psi) \text{ em } -\infty < x < \infty, -h < z < \eta(x) \quad (11)$$

$$\psi(x, -h) = 0 \quad (12)$$

$$\psi(x, \eta) = \psi_\eta = \text{constante} \quad (13)$$

$$gz + \frac{1}{2} (\psi_x^2 + \psi_z^2) + \int_0^{\eta} f(\psi) d\psi = Q \text{ em } z = \eta(x) \quad (14)$$

onde $\eta(x)$ define a posição da superfície livre (periódica no espaço), Q é a constante de Bernoulli, f é uma função arbitrária que fornece a distribuição de vorticidade em função das linhas de corrente.

Obtém-se a pressão dinâmica em qualquer ponto do fluido, com coordenadas (x, z) , através da equação de Bernoulli:

$$\frac{P}{\rho} + gz + \frac{1}{2}(\psi_x^2 + \psi_z^2) + \int_0^{\psi_*} f(s) ds = Q \quad (15)$$

onde ψ_* corresponde à linha de corrente que contém o ponto dado. Esta equação é válida para fluidos inviscidos, escoamentos permanentes e inclui um termo relacionado à distribuição de vorticidade.

Na presença de vorticidade, o principal efeito pode ser entendido através da equação integrada da quantidade de movimento

$$\nabla \left(\frac{1}{2} \vec{u} \cdot \vec{u} + \frac{P}{\rho} + gz \right) = \vec{u} \times \vec{\Omega} \quad (16)$$

onde \vec{u} é o vetor velocidade total, $\vec{\Omega}$ é o vetor vorticidade, P é a pressão, ρ é a massa específica da água do mar, g é a aceleração da gravidade, e z é a cota em relação ao nível médio.

O segundo membro da equação (16) representa um aumento no campo de aceleração do escoamento combinado que resulta da interação onda-corrente, na presença de vorticidade. Para escoamentos bi-dimensionais, este termo é perpendicular à velocidade em todos os pontos do escoamento. Sob a crista e o cavado, por exemplo, ele representa um acréscimo à aceleração vertical.

Aproximações lineares

Quatro exemplos de perfis de correntes (Figura 1) serão utilizados a fim de ilustrar a influência do efeito Doppler e da vorticidade sobre a equação de dispersão e sobre o fator de resposta de pressão.

No primeiro exemplo a velocidade é constante, U_0 , ao longo da vertical. No segundo exemplo, a velocidade varia de U_0 no fundo até $U_s = U_0 + \Omega_0 h$ na superfície livre. No terceiro e quarto exemplos, o perfil de velocidade pode ser expresso como seno (cosseno) hiperbólico ou trigonométrico. Estes exemplos correspondem respectivamente às equações governantes:

$$\text{Caso I: } -\psi_{xx} - \psi_{zz} = 0 \quad (17)$$

$$\text{Caso II: } -\psi_{xx} - \psi_{zz} = \Omega_0 \quad (18)$$

$$\text{Caso III: } -\psi_{xx} - \psi_{zz} = -\gamma^2 \psi \quad (19)$$

$$\text{Caso IV: } -\psi_{xx} - \psi_{zz} = \gamma^2 \psi \quad (20)$$

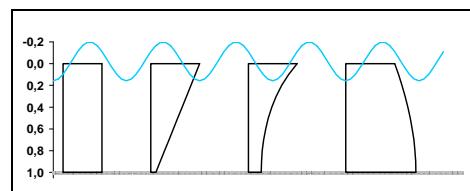


Figura 1 - Perfil vertical de correntes para os casos I a IV, respectivamente, da esquerda para a direita

Para as condições de contorno indicadas pelas equações (12) a (14), as soluções para os problemas linearizados são as seguintes:

$$\text{Caso I: } \psi(x, z) = -(U_0 - c)(z + h) - \frac{H}{2} \frac{g}{\omega - kU_0} \frac{\sinh[k(z + h)]}{\cosh kh} \cos kx \quad (21)$$

$$\text{Caso II: } \psi(x, z) = -(U_0 - c)(z + h) - \frac{1}{2} \Omega_0 (z + h)^2 - \frac{H}{2} \left(\frac{g}{\omega - kU_s} - \frac{\Omega}{k} \right) \frac{\sinh[k(z + h)]}{\cosh kh} \cos kx \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \text{Caso III: } \psi(x, z) = & -\frac{(U_s - c)}{\gamma} \frac{\sinh[\gamma(z + h)]}{\cosh \gamma h} \pm \\ & \pm \frac{H}{2} \sqrt{\frac{g \tanh \alpha h}{\alpha - \gamma \tanh \gamma h \tanh \alpha h}} \frac{\sinh[\alpha(z + h)]}{\sinh \alpha h} \cos kx \end{aligned} \quad (23)$$

$$\text{Caso IV: } \psi(x, z) = -\frac{(U_s - c)}{\gamma} \frac{\sin[\beta(z + h)]}{\cos \beta h} \pm \frac{H}{2} A_4(z) \cos kx \quad (24)$$

onde, U_s é a velocidade da corrente à superfície, no Caso II $U_s = U_0 + \Omega_0 h$, e, nos Casos III e IV, $\alpha = \sqrt{\gamma^2 + k^2}$ e $\beta = \sqrt{|\gamma^2 - k^2|}$, respectivamente.

Para o Caso IV, a função $A_4(z)$ é expressa como:

$$A_4(z) = \begin{cases} \sqrt{\frac{gh \tan \beta h}{\beta h - \gamma h \tan \gamma h \tan \beta h}} \frac{\sin[\beta(z + h)]}{\sin \beta h}, & \text{se } k^2 < \gamma^2 \\ \sqrt{\frac{gh}{1 + \gamma h \tan \gamma h}} \left(1 + \frac{z}{h} \right), & \text{se } k^2 = \gamma^2 \\ \sqrt{\frac{gh \tanh \beta h}{\beta h - \gamma h \tan \gamma h \tanh \beta h}} \frac{\sinh[\beta(z + h)]}{\sinh \beta h}, & \text{se } k^2 > \gamma^2 \end{cases} \quad (25)$$

Influência no Comprimento de Onda: Equação de Dispersão

No caso I, a velocidade da corrente, colinear à onda, é constante e a relação de dispersão é expressa por:

$$(\omega - kU_0)^2 = gk \tanh kh \quad (26)$$

Esta expressão é formalmente semelhante à equação de dispersão linear para o caso de não haver corrente, apenas substituindo a frequência intrínseca $\omega - kU_0$ pela frequência aparente (ω) em relação a um observador fixo em relação ao fundo.

A equação (26) pode ser reescrita de forma adimensional

$$\left(\frac{\omega\sqrt{h}}{\sqrt{g}} - kh \frac{U_0}{\sqrt{gh}} \right)^2 = kh \tanh kh \quad (27)$$

permitindo a determinação da profundidade relativa (kh) em função do valor em águas profundas da profundidade relativa (ω^2h/g) e do número de Froude da corrente ($U_0/(gh)^{1/2}$), parâmetros que dependem de grandezas medidas no campo (período aparente, profundidade local e velocidade da corrente).

A presença de corrente altera o valor do comprimento de onda na medida em que o período da onda em relação ao fluido em movimento não é o mesmo que o período em relação ao fundo fixo (efeito Doppler). Consequentemente, todas as grandezas que dependem do número de onda serão afetadas, mesmo que suas expressões sejam formalmente iguais às aquelas deduzidas para a teoria linear na ausência de correntes.

A Figura 2 ilustra a equação de dispersão para o caso de fluido em repouso (número de Froude igual a zero) e para casos com corrente uniforme (número de Froude variando de 0,05 a 0,6). Valores negativos de kh correspondem a ondas propagando-se em sentido contrário à corrente. Neste gráfico estão indicados dois conjuntos de solução, um referente à raiz positiva da equação de dispersão, e outro referente à raiz negativa (linha tracejada).

Na ausência de corrente, uma vez conhecidos os valores de freqüência aparente e profundidade, ou seja para um valor fixado de $\omega\sqrt{h}/g$, existem duas soluções simétricas para kh , indicando que

a propagação da onda é isotrópica. Na presença de corrente favorável, obtém-se um valor kh menor (ou seja, comprimento de onda maior), solução A no gráfico da Figura 2, enquanto que na presença de corrente contrária, obtém-se um valor negativo para kh de maior valor absoluto, correspondendo a um comprimento de onda menor, solução B no gráfico.

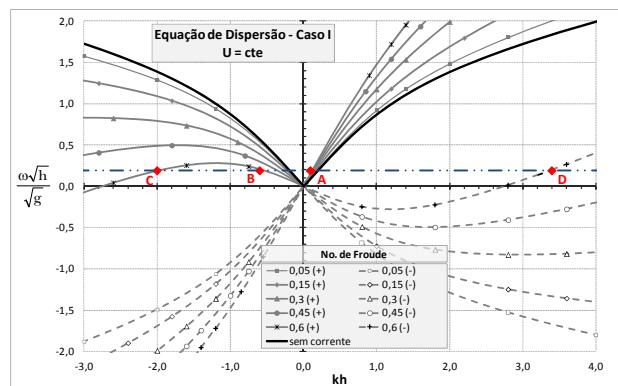


Figura 2 - Relação de dispersão: solução sem corrente (linha mais forte) e com corrente uniforme. Valores da abscissa (kh) e da ordenada ($(\omega(h/g)^{1/2})$ adimensionais

Existe, porém, outra influência da corrente que não possui analogia com a situação sem corrente. Para um determinado valor do número de Froude para uma corrente contrária (lado do gráfico com valores negativos de kh), existe um valor limite para o período da onda abaixo do qual a onda não pode se propagar contra a corrente (ou seja, um valor máximo do parâmetro $\omega\sqrt{h}/g$). Este resultado é coerente com as observações de Evans (1955) e Taylor (1955). Além disso, a equação de dispersão admite duas outras soluções, uma para onda propagando-se a favor da corrente (solução D) e outra para onda contrária à corrente (solução C), ambas com números de onda muito elevados. São ondas de curto comprimento, embora o período de propagação em relação a um observador fixo (período aparente) seja mais longo do que aquele que existiria para uma onda de igual comprimento, na mesma profundidade, na ausência de corrente. Peregrine (1976) apresenta uma explicação física muito clara para essas ondas em termos da velocidade de propagação de energia.

Para o Caso II, em que a vorticidade é constante, a equação de dispersão é expressa por:

$$(\omega - kU_s)^2 = \{ gk - \Omega_0 [\omega - kU_s] \} \tanh kh \quad (28)$$

onde $U_s = U_0 + \Omega_0 h$ é a velocidade na superfície ($z = 0$) e U_0 é a velocidade em $z = -h$. A relação de dispersão adimensional nesse caso torna-se

$$\left(\frac{\omega\sqrt{h}}{\sqrt{g}} - kh \frac{U_s}{\sqrt{gh}} \right)^2 = \left\{ kh - \frac{\Omega_0 \sqrt{h}}{\sqrt{g}} \left[\frac{\omega\sqrt{h}}{\sqrt{g}} - kh \frac{U_s}{\sqrt{gh}} \right] \right\} \tanh kh \quad (29)$$

e neste caso observa-se, no segundo membro da equação, um termo que depende explicitamente da vorticidade. A frequência relativa é determinada em função de dois parâmetros adimensionais, o número de Froude da corrente, referido à superfície livre, $F = U_s/(gh)^{1/2}$ e o parâmetro de vorticidade $W = \Omega_0(h/g)^{1/2}$.

Teoricamente o comprimento da onda é influenciado pela velocidade da corrente superficial, embora alguns correntômetros meçam apenas as velocidades próximas ao fundo. Tais medições são insuficientes para prever as propriedades dinâmicas e o comprimento de onda.

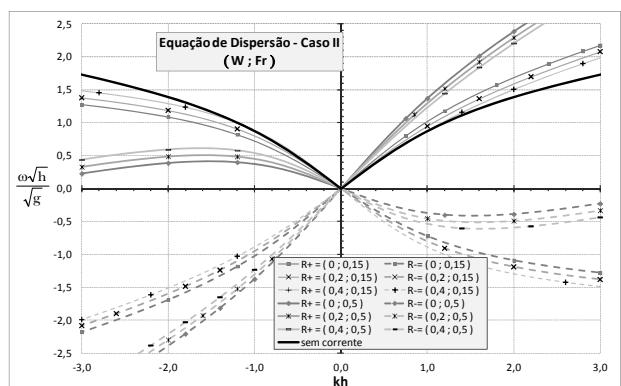


Figura 3 - Relação de dispersão para corrente com vorticidade uniforme: solução sem corrente e com corrente, para valores de ($W = \Omega_0(h/g)^{1/2}$; parâmetro de vorticidade e $Fr =$ número de Froude); na legenda, R^+ e R^- são raízes positiva e negativa da equação de dispersão, respectivamente no lado positivo e negativo do eixo das ordenadas

Semelhante ao caso de velocidade constante, ocorrem variações no comprimento de onda devido à presença de vorticidade. Para corrente e onda propagando-se na mesma direção, o aumento da vorticidade acarreta a diminuição do comprimento de onda, o efeito sendo oposto quando onda e corrente são contrárias. Existem também duas

soluções adicionais com valores altos de kh , conforme descrito no Caso I. A solução é apresentada na Figura 3. Comparando-se os casos com e sem vorticidade, verifica-se que a presença de vorticidade tem um efeito menor do que o da corrente e, além disso, faz com que a solução seja intermediária entre a situação sem corrente e aquela com corrente uniforme.

Essas variações provocadas pela corrente no valor do comprimento de onda tornam-se importantes na medida em que se observa que várias grandezas de importância para projetos de engenharia são determinadas a partir do comprimento de onda. De fato, a celeridade da onda, o número de onda, a superfície livre, a função de corrente, a relação de dispersão, as componentes horizontal e vertical da velocidade da onda, a pressão dinâmica, as componentes da aceleração da onda são todos dependentes do comprimento de onda. Em trabalhos futuros serão discutidas as influências sobre o fator de resposta de pressão e sobre a função de transferência de espectro de aceleração para espectro de elevação da superfície livre.

Para a vorticidade proporcional a ψ , existem duas famílias de soluções, dependendo do sinal, positivo ou negativo, na equação governante. Para o Caso III, Figura 4, a equação de dispersão é dada por

$$(\omega - kU_s)^2 = \frac{g k^2 h \tanh \alpha h}{\alpha h - \gamma h \tanh \gamma h \tanh \alpha h} \quad (30)$$

onde $\alpha = \sqrt{\gamma^2 + k^2}$. A figura 4 apresenta o gráfico desta expressão para diferentes valores de γh e do número de Froude, $U_s/(gh)^{1/2}$. Valores menores de γh fornecem perfis de velocidade que se aproximam de um perfil uniforme, enquanto que valores maiores produzem perfis de velocidade com variação exponencial, próximo do que se observa em correntes induzidas por ventos.

Verifica-se, neste caso, um comportamento da equação de dispersão semelhante àquele observado nos casos anteriores de corrente uniforme ou de vorticidade constante. Existe maior sensibilidade ao número de Froude do que ao parâmetro γh , considerando as curvas para $\gamma h=0,2$ e $1,5$ nos três exemplos mostrados com número de Froude, Fr , igual a $0,1, 0,25$ e $0,5$. Um resultado inesperado ocorre para $\gamma h=1,5$ e $Fr=0,1$, pois ambas as soluções para corrente, favorável ou contrária à onda, fornecem valores

menores de número de onda (comprimentos maiores) do que aqueles encontrados na solução sem corrente.

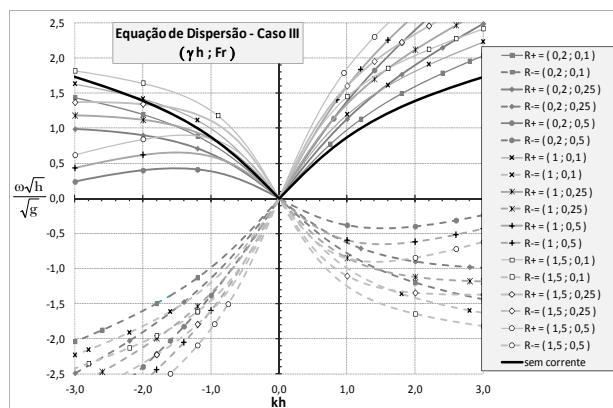


Figura 4 - Equação de dispersão (Caso III) para diferentes valores de γh e do número de Froude (Fr); na legenda, R^+ e R^- são raízes positiva e negativa da equação de dispersão, respectivamente no lado positivo e negativo do eixo das ordenadas

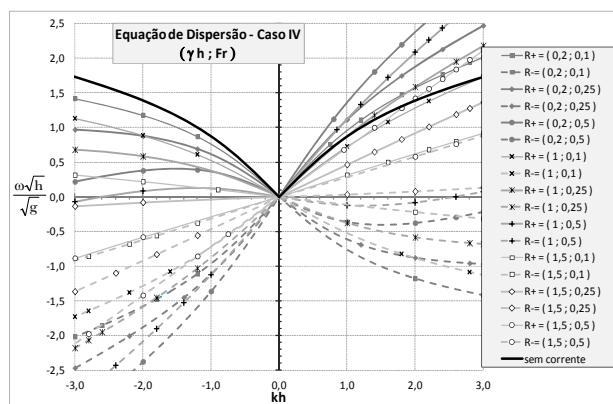


Figura 5 - Equação de dispersão (Caso IV) para diferentes valores de γh e do número de Froude (Fr); na legenda, R^+ e R^- são raízes positiva e negativa da equação de dispersão

Para o Caso IV, Figura 5, a forma da equação de dispersão (31) dependerá de k^2 ser menor, igual ou maior que γ^2 .

$$(\omega - kU_s)^2 = \begin{cases} \frac{gk^2h \tan \beta h}{\beta h + \gamma h \tan \gamma h \tan \beta h} & , \text{ se } k^2 < \gamma^2 \\ \frac{gk^2h}{1 + \gamma h \tan \gamma h} & , \text{ se } k^2 = \gamma^2 \\ \frac{gk^2h \tanh \beta h}{\beta h + \gamma h \tan \gamma h \tanh \beta h} & , \text{ se } k^2 > \gamma^2 \end{cases} \quad (31)$$

onde $\beta = \sqrt{\gamma^2 - k^2}$.

RESULTADOS

Os 240 testes numéricos efetuados por Dias (1992), utilizando a Teoria da Função de Corrente para velocidade ou vorticidade constante, procuraram reproduzir situações típicas na prática de medições de ondas a fim de comparar os resultados previstos em duas situações, com e sem corrente. Os principais parâmetros foram assim escolhidos:

1. profundidades de 5 m, 10 m, e 20 m; determinou-se trabalhar nesta faixa visto ser nela que geralmente se instalam os sensores de pressão;
2. alturas de onda de 1 m, 2 m, 3 m, e 4 m e períodos de 6 s, 7 s, 8 s, 9 s, e 10 s por serem bastante representativos das condições de mar presentes na costa brasileira;
3. correntes superficiais de 0,5 m/s, 1,0 m/s, 1,5 m/s, e 2,0 m/s por abrangerem uma faixa de correntes bastante diversificada.

Estas condições estão apresentadas na Figura 6, baseada em Dean (1974), para classificar as regiões de validade das teorias de onda em termos da fração da altura (H) em relação à altura de arrebentação (H_b) (máxima estimada).

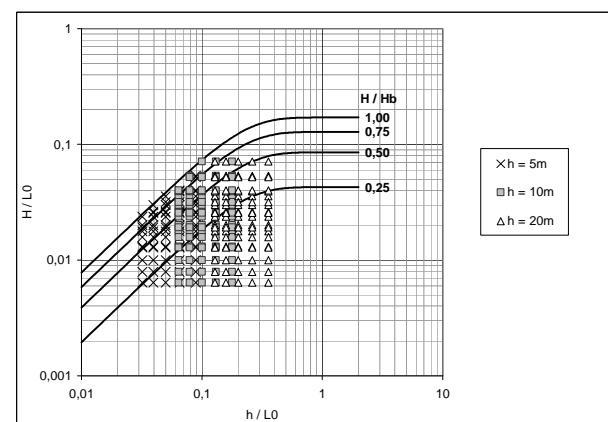


Figura 6 - Regiões de validade para os casos estudados

A partir dos dados gerados pelo programa da Teoria da Função de Corrente (NEVES, 1987), quando há uma corrente com velocidade ou vorticidade constante.

dade constante deslocando-se com a onda, montaram-se tabelas, como a ilustrada na Tabela 1. Para cada valor de período de onda ($T = 6, 7, 8, 9, \text{ e } 10 \text{ s}$), altura ($H = 1, 2, 3 \text{ e } 4 \text{ m}$) e profundidade ($h = 5, 10, \text{ e } 20 \text{ m}$), foram calculados os erros percentuais entre os valores previstos de comprimento de onda na situação sem corrente em relação ao valor teórico mais correto que considera a presença de corrente. Enquanto a seção anterior abordou os efeitos sobre a equação de dispersão linear, agora investigam-se os efeitos não lineares no comprimento de ondas.

Para cálculo do erro, utilizaram-se valores de L adimensionaisizados por L_0 , comprimento de onda em águas profundas pela Teoria Linear sem corrente, de acordo com a fórmula:

$$\frac{L/L_0(U_0=0) - L/L_0(U_0 \neq 0)}{L/L_0(U_0 \neq 0)} \quad (32)$$

Tabela 1 - Erros relativos percentuais para comprimento de onda. Corrente uniforme; $T = 10 \text{ s}; h = 20 \text{ m}$

| $H \text{ (m)}$ | | | | | | |
|------------------|------------|---------|--------|---------|--------|--|
| $U_s/(\omega h)$ | U (m/s) | 1 | | 2 | | |
| | | L/L_0 | erro % | L/L_0 | erro % | |
| -0,159 | -2,0 | 0,593 | 31,0 | 0,596 | 30,8 | |
| -0,119 | -1,5 | 0,643 | 20,8 | 0,646 | 20,7 | |
| -0,080 | -1,0 | 0,690 | 12,6 | 0,693 | 12,5 | |
| -0,040 | -0,5 | 0,735 | 5,8 | 0,737 | 5,8 | |
| 0,000 | 0,0 | 0,777 | 0,0 | 0,779 | 0,0 | |
| 0,040 | 0,5 | 0,818 | -5,0 | 0,821 | -5,0 | |
| 0,080 | 1,0 | 0,858 | -9,5 | 0,861 | -9,4 | |
| 0,119 | 1,5 | 0,898 | -13,4 | 0,900 | -13,4 | |
| 0,159 | 2,0 | 0,936 | -17,0 | 0,938 | -16,9 | |
| $H \text{ (m)}$ | | | | | | |
| $U_s/(\omega h)$ | U (m/s) | 3 | | 4 | | |
| | | L/L_0 | erro % | L/L_0 | erro % | |
| -0,159 | -2,0 | 0,601 | 30,3 | 0,607 | 29,8 | |
| -0,119 | -1,5 | 0,650 | 20,4 | 0,656 | 20,1 | |
| -0,080 | -1,0 | 0,696 | 12,4 | 0,702 | 12,3 | |
| -0,040 | -0,5 | 0,741 | 5,7 | 0,746 | 5,7 | |
| 0,000 | 0,0 | 0,783 | 0,0 | 0,788 | 0,0 | |
| 0,040 | 0,5 | 0,824 | -5,0 | 0,829 | -4,9 | |
| 0,080 | 1,0 | 0,864 | -9,4 | 0,869 | -9,3 | |
| 0,119 | 1,5 | 0,903 | -13,3 | 0,908 | -13,2 | |
| 0,159 | 2,0 | 0,942 | -16,9 | 0,947 | -16,8 | |

Baseando-se na análise dos gráficos, Dias (1992) conclui que, ao estimar o comprimento de onda pela Teoria Linear sem corrente, incorre-se em erros que ora subestimam ora superestimam o

valor correto. Além disso, devido às não linearidades, o comprimento de onda passa a ser influenciado também pela altura de onda.

Comprimento de onda com corrente uniforme

Para os valores de profundidades considerados, confirmou-se o resultado teórico que prevê comprimentos de onda menores (ou maiores) quando a corrente é contrária (ou favorável) à onda, do que aqueles previstos para situação de fluido em repouso. De modo geral, quando a corrente desloca-se em direção contrária à onda, os erros cometidos na determinação do comprimento de onda são maiores do que no caso da corrente se deslocando na mesma direção.

Para todas as profundidades consideradas, observa-se que o erro diminui com o aumento do período, ao se desprezar a corrente para cálculo do comprimento de onda. Na profundidade de 5 m o erro variou de um máximo de 80% para $T = 6 \text{ s}$ a 50% para $T = 10 \text{ s}$ (quando a corrente é contrária) e de -27% para $T = 6 \text{ s}$ a -24% para $T = 10 \text{ s}$ (quando a corrente é favorável).

Na profundidade de 10 m, o erro variou de um máximo de 80% para $T = 6 \text{ s}$ a 35% para $T = 10 \text{ s}$ (quando a corrente é contrária) e de -21% para $T = 6 \text{ s}$ a -20% para $T = 10 \text{ s}$ (quando a corrente é favorável) (Figura 7).

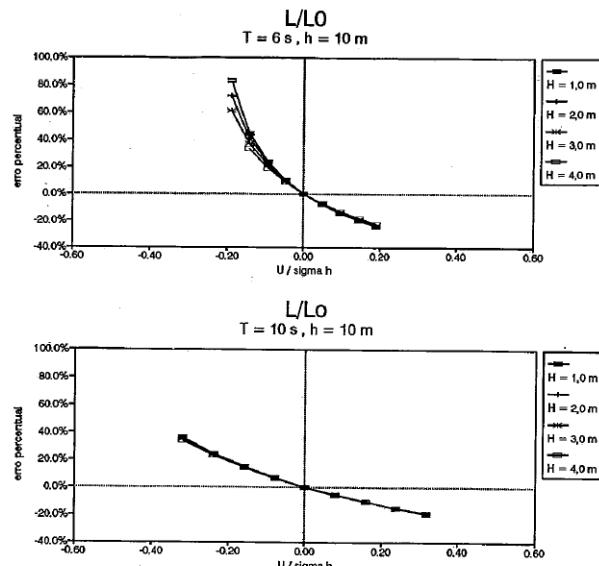


Figura 7 - Comparação entre o comprimento de onda com e sem corrente. Valores negativos correspondem a onda propagando-se contra a corrente

Na profundidade de 20 m, o erro cometido na estimativa do comprimento de onda, ao se desprezar a corrente, variou de um máximo de 100% para $T = 6$ s a 30% para $T = 10$ s (quando a corrente é contrária) e de -23% para $T = 6$ s a -18% para $T = 10$ s (quando a corrente é favorável).

A influência do valor de altura de onda na determinação do comprimento de onda é consequência das não linearidades da onda. Verificou-se, contudo, que a presença de corrente influencia mais o valor do comprimento de onda nas situações de menor altura ($H = 1$ m) do que nas situações de ondas mais altas ($H = 3$ m).

Influência da vorticidade

Com os dados gerados pelo programa de Neves (1987) para os casos em que a vorticidade é constante ao longo da coluna d'água, montaram-se tabelas (Tabela 2), para os valores de vorticidade iguais a $0,1\text{ s}^{-1}$, $0,2\text{ s}^{-1}$, $-0,1\text{ s}^{-1}$, e $-0,2\text{ s}^{-1}$.

As tabelas fornecem os erros relativos percentuais obtidos quando se compara o valor do comprimento de onda obtido quando não há vorticidade, com o valor obtido no caso de haver vorticidade; os valores mostrados foram calculados segundo:

$$\frac{L/L_0(\Omega_0 = 0)}{L/L_0(\Omega_0 \neq 0)} - 1 \quad (33)$$

Nestes casos procurou-se manter o mesmo valor de corrente na superfície e a mesma profundidade.

Para os casos de vorticidade positiva e mesmo sentido de propagação de onda e corrente. Observou-se que os comprimentos de onda eram menores do que nos casos de corrente uniforme de mesmo valor na superfície (vorticidade nula). Os erros relativos percentuais variaram de 2% a 7% para vorticidade $0,1\text{ s}^{-1}$ e de 5,5% a 9% para vorticidade $0,2\text{ s}^{-1}$.

Investigou-se então a influência da altura e do período no cálculo do comprimento de onda, face aos efeitos não lineares. Os erros no comprimento de onda foram menores (2% a 7,5%) para ondas de maior altura do que para ondas mais baixas (3% a 9%). A seguir, fixou-se um valor para o período e variou-se a altura da onda; para as menores alturas, o comprimento de onda aumentou menos em relação ao valor no caso sem corrente do

que no caso com vorticidade nula, ou seja, a sensibilidade à presença da vorticidade é mais significativa para as ondas menores.

Tabela 2 - Erros percentuais para comprimento de onda: corrente com vorticidade constante versus corrente sem vorticidade. Profundidade $h = 20$ m; período $T = 6$ s; corrente na superfície $U_s = 2,0\text{ m/s}$

| | T (s) | | | | | H (m) |
|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
| L/L_0 (*) | 1,328 | 1,214 | 1,11 | 1,017 | 0,936 | |
| L/L_0 (**) | 1,246 | 1,138 | 1,04 | 0,953 | 0,877 | 1 |
| Erro | 6,60% | 6,70% | 6,80% | 6,70% | 6,70% | |
| L/L_0 (*) | 1,333 | 1,218 | 1,113 | 1,02 | 0,938 | |
| L/L_0 (**) | 1,252 | 1,142 | 1,043 | 0,956 | 0,88 | 2 |
| Erro | 6,50% | 6,70% | 6,70% | 6,70% | 6,60% | |
| L/L_0 (*) | 1,341 | 1,224 | 1,117 | 1,024 | 0,942 | |
| L/L_0 (**) | 1,262 | 1,149 | 1,049 | 0,961 | 0,884 | 3 |
| Erro | 6,30% | 6,50% | 6,60% | 6,60% | 6,50% | |
| L/L_0 (*) | 1,353 | 1,232 | 1,124 | 1,029 | 0,947 | |
| L/L_0 (**) | 1,276 | 1,159 | 1,056 | 0,967 | 0,89 | 4 |
| Erro | 6,00% | 6,30% | 6,40% | 6,40% | 6,40% | |

(*) sem vorticidade

(**) com vorticidade igual a $0,1\text{ s}^{-1}$.

O erro relativo no comprimento de onda foi pouco influenciado pelo período da onda ($U_s/\omega h$), situando-se na faixa entre 2,7% a 8,9% para ondas de menor período e de 3% a 8,8% para as de maior período. A vorticidade mostrou-se como um efeito determinante, seguido pela altura da onda, nas estimativas dos erros em relação ao caso sem corrente ou com corrente e vorticidade nula.

Para os casos de vorticidade negativa e a onda propagando-se contra a corrente, observou-se que, na presença de vorticidade, os comprimentos de onda eram maiores do que nos casos de velocidade uniforme. Os erros relativos percentuais foram de -2% a -15% para vorticidade de $-0,1\text{ s}^{-1}$ e de -6% a -22% para vorticidade de $-0,2\text{ s}^{-1}$. Para ondas de menor altura, os erros foram maiores (-3% a -22%) do que para ondas mais altas (-3% a -13%). Ondas de menor período apresentaram erros de comprimento de onda maiores (-3% a -22%) que ondas de maior período (-3% a -14%). Mais uma vez, a vorticidade mostrou-se um efeito determinante nas avaliações dos erros.

CONCLUSÕES

Medições de perfis verticais e de possíveis variações horizontais das velocidades de correntes, concomitantes a medições de ondas, permitiriam desenvolver formulações teóricas mais abrangentes e exatas para explicação e previsão das transformações sofridas pelas ondas em águas rasas.

Atualmente verifica-se um significativo aumento das técnicas de sensoriamento remoto das ondas, seja por intermédio de satélites, seja por radares localizados em aviões ou fixos em terra. Neste tipo de medições, a capacidade de reflexão da superfície do mar depende da altura e do comprimento das ondas. Ora, a presença de correntes com variações espaciais influencia tanto o comprimento quanto a altura das ondas. A literatura mostra ainda que variações espaciais do campo de correntes podem introduzir modificações ainda mais significativas no campo de ondas. Existe, porém, nestes casos, a impossibilidade em caracterizar, por sensoriamento remoto, a intensidade da corrente superficial e, simultaneamente, a distribuição vertical de velocidade.

A superposição de ondas e correntes provoca modificações nas propriedades das ondas, o que em geral não é considerado em projetos de engenharia. A fim de quantificar tal influência, quatro tipos de perfil de corrente foram estudados: uniforme, linear (ou vorticidade constante), exponencial e cosseno. Para estes casos, foram apresentadas as soluções analíticas do problema linearizado expresso em termos da função de corrente.

As expressões para a equação de dispersão (quantificação do efeito Doppler) foram apresentadas para cada caso. Confirmou-se teoricamente que, não apenas a magnitude da velocidade próximo à superfície livre influencia o comprimento de onda, mas também a vorticidade. Estes resultados teóricos indicam que erros significativos podem ocorrer em consequência do desprezo da velocidade da corrente que se desloca juntamente com a onda.

Para o caso de corrente uniforme, os erros na estimativa do comprimento de onda variaram de -30% (corrente a favor) a 80% (corrente contrária), eventualmente podendo atingir valores maiores para outro conjunto de parâmetros de entrada. Como exemplo, quando o período da onda é igual a 8 s, a altura é de 2 m, a profundidade é 10 m, e a corrente é contrária e igual a 1 m/s, o erro encontrado na estimativa do comprimento de onda é de 16,7%.

Para o caso de corrente com vorticidade uniforme, os erros na estimativa do comprimento de onda variaram de 9% (vorticidade positiva) a -22% (vorticidade negativa). Para o caso de uma onda com período de 8 s, altura de 2 m, em profundidade de 10 m, se a velocidade da corrente superficial for igual a 1 m/s (contrária) e a vorticidade for igual a $-0,1 \text{ s}^{-1}$, o erro encontrado na estimativa do comprimento de onda é de -6,3%.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi originalmente desenvolvido pela segunda autora com o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico que concedeu uma bolsa de mestrado. Posteriormente, o trabalho foi revisto e ampliado pelo primeiro autor no âmbito dos Projetos CAPES/PROCAD 0144/01-0 e 053/2007– *Amigos de Boussinesq: Rede Cooperativa de Pesquisa sobre Hidrodinâmica Costeira e de Águas Rasas* (COPPE/UFRJ + FEIS/UNESP + IPH/UFRGS + UNIFEI + UFRN).

REFERENCIAS

- BATTJES, J. A. A case study of wave height variations due to currents in a tidal entrance. *Coastal Engineering*, v. 6, n. 1, p. 47-57, 1981.
- CAVALERI, L.; EWING, J. A.; SMITH, N. D. Measurement of the pressure and velocity field below surface waves. In: FAVRE, A.; HASSELMANN, K. (Ed.). *Turbulent fluxes through the sea surface, wave dynamics and prediction*. New York: Plenum Press, 1978. p. 257-272.
- DALRYMPLE, R. A. A finite amplitude wave on a linear shear current. *Journal of Geophysical Research*, v. 79, n. 30, p. 4498-4504, 1974.
- DALRYMPLE, R. A. *Water wave models and wave forces with shear currents*. Florida: Civil and Coastal Engineering, University of Florida, 1973.
- DALRYMPLE, R. A.; COX, J. C. Symmetric finite-amplitude rotational water waves. *Journal of Physical Oceanography*, v. 6, n. 6, p. 847-852, 1976.

DEAN, R. G. *Evaluation development of water wave theories for engineering application*. Fort Belvoir, Va: U.S. Coastal Engineering Research Center, 1974. v. 1: Presentation of results. (Special Report, no. 1).

DEAN, R. G. Stream Function representation of nonlinear ocean waves. *Journal of Geophysical Research*, v. 70, n. 18, p. 4561-4572, 1965.

DIAS, A. M. *A influência de correntes para a medição de ondas do mar*. 68 f. 1992. Dissertação (Mestrado) - COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1992. Disponível em: <http://www.oceanica.ufpj.br/intranet/teses/1992_mestrado_andrea_moragas.pdf>.

DUBREUIL-JACOTIN, M. L. Sur la determination rigoureuse des ondes permanents périodiques d'ampleur finie. *Journal de Mathématiques*, v. XIII, n. 3, p. 217-290, 1934.

EVANS, J. T. Pneumatic and similar breakwaters. *Proceedings of the Royal Society, Series A*, v. 231, n. 1187, p. 457-466, 1955.

GABRIEL, D. W.; HEDGES, T. S. Effects of currents on interpretation of sub-surface pressure spectra. *Coastal Engineering*, v. 10, n. 4, p. 309-323, 1986.

van HOFSTEN, J. D. A.; KARAKI, S. Interaction of waves and a turbulent current. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COASTAL ENGINEERING, 12., 1970, Washington, D.C. *Proceedings...* New York: ASCE, 1970. p.404-422.

HUNT, J. N. Gravity waves in flowing water. *Proceedings of the Royal Society, Series A*, v. 231, n. 1187, p. 496-504, 1955.

JONSSON, I. G. *Wave-current interactions*. Denmark: Tech. University of Denmark, Institute Hydrodynamics and Hydraulic Engineering - ISVA, 1989.

JONSSON, I. G.; SKOVGAARD, C.; WANG, J. D. Interaction between waves and currents. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COASTAL ENGINEERING, 12., 1970, Washington, D.C. *Proceedings...* New York: ASCE, 1970. p.489-507.

KIRBY, J. T.; CHEN, T.-M. Surface waves on vertically sheared flow: approximate dispersion relations. *Journal of Geophysical Research*, v. 94, C1, p. 1013-1027, 1989.

LAMB, H. *Hydrodynamics*. New York: Dover, 1945.

NEVES, C. F. *A particular rotational wave theory*. Florida: University of Florida, 1987.

PAPROTA, M. Laboratory investigations of wave transmission through a submerged aerial barrier. In: SHORT COURSE/CONFERENCE ON APPLIED COASTAL RESEARCH, 6., 2013, Lisboa. *Proceedings...* Lisboa: [s.n.], 2013.

PEREGRINE, D. H. Interaction of water waves and currents. *Advances in Applied Mechanics*, v. 16, p. 9-117, 1976.

SMITH, J. M. Wave pressure gauge analysis with current. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, v. 128, n. 6, p. 271-275, 2002.

TAYLOR, G. I. The action of a surface current used as a breakwater. *Proceedings Royal Society of London*, ser. A., v. 231, p. 466-478, 1955.

YIH, C.-S. Surface waves in flowing water. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 51, n. 2, p. 209-220, 1972.

The Relevance Of Characterizing The Current For The Correct Determination Of Wave Length And Height. Part I: Wave Length And Dispersion

ABSTRACT

Waves are often measured by sensor that do not take the presence of currents into account. This may lead to errors in the determination of wave heights and length. Using the Stream Function Wave Theory, this work tries to estimate the errors which occur in wave length estimates, when a current is neglected. Results of linear theory are also presented for four types of current profiles: uniform, with uniform vorticity, exponential and cosine type.

Results are presented in terms of the following parameters: the Froude number referred to the surface current value ($U_s / (gh)^{1/2}$), relative water depth (h/L_0), and dimensionless vorticity (Ω_0/Ω), where U_s is the velocity of the current near the surface, Ω is the wave frequency in rad/s relative to a fixed observer, h is the water depth, and L_0 is the deep water wave length given by Linear Theory in the absence of current.

Effects of the current on the waves present as: Doppler effect (difference between the observed period relative to a fixed reference and the intrinsic wave period, relative to the moving fluid); non-linearities of the combined flow. For the studied cases, values of the errors in wave length in the presence of current may differ by 5% to 90% from the case without current.

Keywords: waves; vorticity, wave-current interaction; Stream Function Wave Theory