

A Importância da Caracterização da Corrente para a Correta Determinação do Comprimento e da Altura das Ondas. Parte 2: Pressão Dinâmica

Andrea Moragas Dias* e Claudio F. Neves*

neves@peno.coppe.ufrj.br

Recebido: 06/02/13 - revisado: 26/05/13 - aceito: 24/06/13

RESUMO

Medições de ondas com base em sensores de pressão geralmente não identificam a presença de correntes ou apenas medem a velocidade em um ponto. Expressões semi-empíricas para funções de transferência entre pressão e elevação da superfície livre são apresentadas na literatura, que também não consideram a velocidade da corrente. O artigo procura quantificar os erros na determinação da altura e do comprimento da onda utilizando a Teoria da Função de Corrente de Dean, para calcular os valores de pressão sob a crista e sob o cavado, comparando-os com aqueles obtidos na ausência de corrente. Resultados da Teoria Linear também são apresentados para quatro tipos de perfis de correntes: uniforme, com vorticidade constante, exponencial e cosseno.

Os resultados são apresentados em função dos seguintes parâmetros: o número de Froude, referido ao valor da corrente na superfície; a razão entre a profundidade local e o valor do comprimento de onda em águas profundas pela Teoria Linear na ausência de corrente; e a vorticidade adimensionalizada pela frequência da onda para um observador fixo. Foram estudados ao todo 240 casos, combinações de profundidades (5, 10 e 20 m), altura (1, 2, 3 e 4 m), período (6, 7, 8, 9 e 10 s) e velocidades de correntes superficiais (0,5, 1,0, 1,5 e 2,0 m/s). Para os casos estudados, os valores da pressão dinâmica podem diferir de 20% a 100%.

Palavras-chave: Ondas. Vorticidade. Interação onda-corrente. Teoria não linear. Pressão dinâmica.

INTRODUÇÃO

O presente trabalho é o segundo de uma série de quatro artigos que têm por objetivo demonstrar a importância de medições de perfis de correntes simultaneamente a medições de ondas, através da quantificação dos erros cometidos na determinação de grandezas cinemáticas e dinâmicas das ondas quando se despreza a presença de uma corrente subjacente. Neste trabalho serão discutidos os aspectos referentes à pressão sob a crista e sob o cavado, a função de transferência de pressão para elevação da superfície livre (função de resposta de pressão) e a importância da inclusão da correta expressão da relação de dispersão. A primeira parte tratou exclusivamente da equação de dispersão. A terceira parte será dedicada à aceleração e ao campo de velocidades orbitais e a quarta parte abordará, finalmente, as propriedades não lineares (energia, tensão de radiação, nível médio) e a conservação da ação da onda.

Na primeira parte (Neves e Dias, 2013), foi apresentada a formulação matemática para o escoamento combinado onda e corrente num plano vertical (2DV), para um referencial que se desloca-se com a celeridade da onda. Nestas coordenadas, o escoamento passa a ser permanente. A formulação proposta, em termo da função de corrente ψ permite a inclusão da vorticidade para a corrente subjacente, ao contrário da formulação mais encontrada na literatura em termos do potencial de velocidades.

A função de corrente satisfaz então o seguinte problema de valor de contorno:

$$-\psi_{xx} - \psi_{zz} = f(\psi) \text{ em } -\infty < x < \infty, -h < z < \eta(x) \quad (1)$$

$$\psi(x, -h) = 0 \quad (2)$$

$$\psi(x, \eta) = \psi_\eta = \text{constante} \quad (3)$$

$$gz + \frac{1}{2}(\psi_x^2 + \psi_z^2) + \int_0^\psi f(\psi) d\psi = Q \text{ em } z = \eta(x) \quad (4)$$

onde $\eta(x)$ define a posição da superfície livre (periódica no espaço), Q é a constante de Bernoulli, f é

*Programa de Engenharia Oceânica, COPPE/UFRJ

uma função arbitrária que fornece a distribuição de vorticidade em função das linhas de corrente, h é a profundidade local e g é a aceleração da gravidade. Obtém-se a pressão dinâmica em qualquer ponto do fluido, com coordenadas (x,z) , através da equação de Bernoulli modificada:

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2}(\psi_x^2 + \psi_z^2) + \int_0^{\psi_*} f(s) ds = Q \quad (5)$$

onde ψ_* corresponde à linha de corrente que contém o ponto desejado. Esta equação é válida para fluidos invíscidos, escoamentos permanentes e inclui um termo relacionado à distribuição de vorticidade. A equação integrada da quantidade de movimento, na presença de vorticidade, exprime-se

$$\nabla \left(\frac{1}{2} \bar{u} \cdot \bar{u} + \frac{p}{\rho} + gz \right) = \bar{u} \times \bar{\Omega} \quad (6)$$

onde \bar{u} é o vetor velocidade total, $\bar{\Omega}$ é o vetor vorticidade, p é a pressão, ρ é a massa específica da água do mar, g é a aceleração da gravidade, e z é a cota em relação ao nível médio. Observe-se que o segundo membro da equação (6) representa um aumento no campo de aceleração do escoamento combinado, perpendicular à velocidade em cada ponto do escoamento, e surge apenas na presença de vorticidade. No caso de escoamentos bidimensionais, este termo representa uma contribuição centrífuga, oposta à aceleração local.

Sensores que registram pressão subsuperficial simultaneamente a medições de velocidade ou do perfil de velocidade acima do instrumento têm sido muito utilizados recentemente, em substituição a instrumentos que mediam apenas a pressão próxima ao fundo. A vantagem operacional deste tipo de equipamentos sobre outros (e.g. boias, *wave staff*) consiste no fato deles ficarem fora do alcance de embarcações e, aparentemente, mais seguros contra ações de vandalismo ou ação mais agressiva das ondas de tempestade (e.g. CHWANG e CHEN, 2003). Em algumas situações, dentro da zona de arrebatamento, os sensores de pressão podem até ficar enterrados na areia (e.g. RAUBENHEIMER et al. 1988). Nestes tipos de instrumentos utilizam-se funções de transferência para se determinar o deslocamento da superfície livre; tais funções dependem, entre outros fatores, da frequência das ondas conforme observado por um equipamento estático, da profundidade

local e da elevação do instrumento na coluna d'água.

Uma desvantagem dos instrumentos baseados em sensores de pressão absoluta, no entanto, é a variação da pressão atmosférica, a qual pode ocorrer na escala de alguns dias (maré meteorológica) ou em escala semidiurna (maré barométrica) defasada da maré oceânica. Como o instrumento é calibrado para um valor fixo de nível do mar, qualquer variação de pressão atmosférica é interpretada automaticamente como uma variação de profundidade, o que nem sempre corresponde à realidade. Uma forma de contornar este problema é o uso de equipamentos baseados em sensores diferenciais de pressão (e.g. BODGE, 1982).

Outro aspecto importante salientado por Sobey e Hughes (1999) é a diferença de qualidade que existe entre os dados de pressão e os de velocidade, no que se refere à precisão, à taxa de aquisição e ao amortecimento ao longo da vertical.

A função de transferência que relaciona as flutuações da pressão a variações na elevação da superfície da água é geralmente baseada na teoria linear de ondas, sem corrente. O presente trabalho propõe uma discussão mais aprofundada sobre as possíveis formas desta função de transferência para perfis selecionados de corrente. Utilizando a Teoria da Função de Corrente (DALRYMPLE 1973), com a introdução de uma corrente uniforme ou com vorticidade uniforme, calculam-se os valores da pressão sob a crista e sob o cavado, para valores dados de altura de onda, período em relação ao fundo (referencial fixo) e lâmina d'água. Conhecida a pressão e os demais parâmetros da onda, utiliza-se a função de transferência dada pela Teoria Linear e transforma-se o valor da pressão no fundo em uma expressão para a superfície livre hipotética. Compara-se então esta superfície livre hipotética com a superfície livre real fornecida pela Teoria da Função de Corrente, confrontando o valor da altura fornecido inicialmente com aquele calculado a partir da superfície livre hipotética (diferença de elevação entre crista e cavado).

A influência de correntes sobre o movimento das ondas e sobre seus parâmetros já se manifesta em primeira ordem, como é o caso do efeito Doppler. Portanto, pode ser equivocado atribuir, exclusivamente a não linearidades, as discrepâncias entre teoria e observação de pressões. Reciprocamente, existe uma influência da onda sobre a corrente, especialmente próximo à superfície livre, devido aos efeitos não lineares: não é tarefa trivial separar a deriva de Stokes (*Stokes drift*) da corrente que é medida em laboratório ou na natureza.

Apesar de haver o reconhecimento teórico destes problemas, pelo menos de forma qualitativa, as informações quantitativas ainda são poucas. Alguns trabalhos experimentais, porém, comprovam a importância da medição simultânea de ondas e correntes, como será visto a seguir (e.g. SMITH, 2002).

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Estudos Experimentais

Encontrar locais na natureza que ofereçam condições satisfatórias para o estudo da interação entre ondas e correntes é muito difícil (LIU et al. 1989). Frequentemente, a morfologia do fundo domina a transformação das ondas, ou a distribuição horizontal das correntes é demasiadamente complexa, ou a arrebatada das ondas gera tanta turbulência que impede a particularização de um determinado efeito (no caso, a influência da corrente sobre a dinâmica da onda). Além disso, a interação entre ondas e correntes pode ser qualificada em interação “forte”, que acontece em intervalos de tempo ou distâncias da ordem de um período ou de um comprimento de onda, respectivamente, e em interação “fraca” que ocorre em escalas de terceira ordem na esbeltez da onda, $(KH)^3$, vezes a celeridade da onda, o que significa que são mudanças muito sutis para serem identificadas em laboratório ou que ocorrem em distâncias muito longas na natureza.

Lai et al. (1989) atribuíram a falta de observações, que suportassem as previsões dos estudos teóricos sobre interação entre ondas e correntes, à dificuldade em realizar medições simultâneas, no tempo e no espaço, do escoamento (ou como mencionam os autores, no domínio da frequência e do número de onda). Tal comentário ainda é pertinente, pois mesmo que se disponha atualmente de perfiladores acústicos de velocidade, seria necessário medir vários perfis simultaneamente, eventualmente associando a medições de radar ou a monitoramento por vídeo para caracterizar a superfície livre.

Estudos em laboratório são igualmente difíceis de serem conduzidos. Em canal de ondas, existe o problema da circulação da água e a necessidade de evitar um eventual bloqueio da corrente pelo gerador de onda (e.g. van HOFEN; KARAKI, 1970; SKYNER; EASSON, 1992; SWAN; JAMES, 1998). Além disso, existem outros fatores práticos: a dificuldade intrínseca de manter um escoamento turbulento razoavelmente uniforme e estacionário através de uma seção transversal do canal; os efeitos da reflexão da onda na extremidade do canal (e.g.

SWAN, 1990); e a dissipação de energia do escoamento. Em bacia de ondas, as condições de ensaio não são menos desafiadoras, existe a possibilidade de formação de escoamentos secundários e dificilmente consegue-se manter a direção da corrente ao longo dos ensaios (e.g. DALRYMPLE; HEIDEMAN, 1989).

Portanto, seja na natureza, seja em laboratório, o estudo da interação de ondas com correntes constitui desafio considerável em termos operacionais, tecnológicos e científicos. Relatam-se a seguir trabalhos que utilizaram sensores de pressão para estimar alturas de onda e eventuais comparações com medições diretas da superfície livre.

Gabriel e Hedges (1986), realizando experimentos em canal de ondas, determinaram o espectro da elevação da superfície a partir de pressões registradas sob ondas irregulares deslocando-se numa corrente contrária. Demonstraram que o efeito Doppler deveria ser considerado quando os espectros de elevação da superfície fossem determinados a partir de medições de pressão feitas em presença de correntes, particularmente quando o transdutor de pressão fosse colocado próximo ao fundo.

O canal de ondas media 15,25 m de comprimento e foi construído de maneira que as ondas fossem geradas em águas calmas e então se propagassem para uma região com um escoamento direcionado em sentido oposto ao da onda. A praia era permeável, composta por uma rampa de madeira com inclinação de 1:6, perfurada a espaços regulares e coberta por uma camada de material emborrachado. A profundidade no trecho de medição era constante e igual a 0,45 m. Transdutores em miniatura foram usados para medir a pressão subsuperficial em três pontos. Um sensor de onda resistivo foi usado para medir os deslocamentos de superfície livre no mesmo plano vertical dos transdutores de pressão, a uma distância de 8,5 m do batedor de ondas.

O método de superposição de ondas foi usado para gerar o sinal de controle digital para o batedor. A condição de onda desejada, para a seção de água calma do canal, era o espectro de equilíbrio de Pierson-Moskowitz válido para uma faixa de frequências entre 3,5 e 20 rad/s.

A distribuição de corrente no canal foi medida com o auxílio de sensores eletromagnéticos e, no local das medições, mostrou não ser uniforme, com variações no campo de velocidade que aumentavam em direção à área de escape da água para as bombas. A corrente média foi calculada a partir de um conjunto das medições efetuadas entre a área de escape e os transdutores de pressão. As medições de

vazão foram feitas em intervalos de amostragem de 30 s a diferentes distâncias do batedor e em diferentes pontos dentro da área de escape. Os ensaios foram realizados em três etapas: medição de ondas em águas calmas, ondas em presença de corrente contrária e apenas na presença de corrente.

O espectro de altura de onda ($S_{\eta\eta}$) é obtido a partir do espectro de pressão (S_{pp}) através da relação

$$S_{\eta\eta} = N^2 S_{pp} \quad (7)$$

onde N é o fator de resposta de pressão. O objetivo era determinar a validade da utilização de fatores de correção, N , para águas calmas em situações onde existissem correntes.

Uma série de testes com ondas regulares demonstrou que o fator de correção para a pressão, N , decrescia com o aumento do número de onda (k). Observou-se também que, para um dado valor de kh , as ondas com menores alturas tendiam a ter os maiores valores de N e que os transdutores mais profundos forneciam os menores valores para N .

Para ondas deslocando-se numa corrente com velocidade média de 0,23 m/s, foram comparados o espectro da superfície observado e aquele previsto a partir do registro de pressão. Em um caso, o efeito Doppler devido à corrente foi ignorado na determinação do número de onda (k) a partir da frequência observada (ω). No outro caso, o efeito Doppler foi considerado através da utilização da equação:

$$(\omega - kU)^2 = gk \tanh kh \quad (8)$$

onde U é a componente da velocidade da corrente na direção da propagação da onda e h é a profundidade local. Denomina-se *frequência intrínseca* da onda, σ , o valor da frequência em relação ao fluido em movimento, $\sigma = \omega - kU$.

Resultados demonstraram que a descon sideração do efeito Doppler subestimava consideravelmente o espectro de altura de onda ($S_{\eta\eta}$) para valores altos de frequência do espectro (20 rad/s). Os erros mostraram-se maiores para os transdutores mais profundos. Entretanto, quando o efeito da corrente foi incluído, verificou-se um bom ajuste entre os espectros observado e previsto na faixa de alta frequência, ficando esse ajuste não tão bom nas proximidades do pico. A grande variação em N causada pela corrente foi atribuída por Gabriel e Hedges (1986) ao grande aumento na altura de onda que ocorre conforme a onda se desloca em direção

oposta ao escoamento. Da mesma forma que grandes erros ocorriam se a presença da corrente fosse ignorada, outros erros poderiam ocorrer se os fatores de correção empíricos selecionados não fossem representativos das condições da onda na presença de corrente.

Cummins e Swan (1994) conduziram ensaios em canal de ondas com 25m de comprimento, 0,30m de largura e 0,70m de profundidade, onde o perfil de corrente poderia ser obtido a partir da operação de um sistema com três tubulações, com descarga e tomada de água em níveis distintos, com vazões calibradas pelo operador até um valor máximo de 450 l/s, velocidades de 0,20 m/s (perfil uniforme) até 0,60 m/s (cisalhamento forte). Os autores ensaiaram ondas monocromáticas e irregulares.

Sobey e Hughes (1999) analisaram os dados de pressão e de velocidade registrados por equipamentos tipo PUV em duas situações: na foz do rio Columbia, na costa noroeste dos EUA, em profundidade de 17,6m, sendo o instrumento posicionado 0,8m acima do fundo, e na plataforma Edith, 9km ao largo da costa da Califórnia, em local de profundidade 46m, sendo o instrumento posicionado a 7,4m abaixo da superfície. Estes autores desenvolveram um método novo de análise, que será discutido mais detalhadamente na Parte 3 desta série de trabalhos, após apresentação dos aspectos cinemáticos.

Wolf e Prandle (1999) relataram a influência das ondas sobre as correntes de maré, e vice-versa, especialmente em função do ângulo relativo entre a propagação da onda e a corrente. No caso de haver a incidência de vento, deveria ser identificada a velocidade relativa entre o vento e a água em movimento, como fator determinante para a geração de ondas. Alertaram esses autores sobre a necessidade de se identificar a frequência intrínseca da onda, mais importante do que a frequência absoluta (ou seja, aquela registrada por um observador fixo em relação ao fundo do mar).

Smith (2002) relatou resultados do estudo realizado na baía Willapa, na costa sudoeste do estado de Washington, EUA, onde uma bóia de superfície, um sensor de pressão no fundo, um correntômetro acústico (ADV) e um perfilador acústico (ADCP) foram instalados. Para valores de corrente entre 0,9 e 1,4 m/s, em lâmina d'água de 10m, a autora relatou erros de 13% a 18% na estimativa da altura da onda caso a corrente fosse desprezada; quando as informações do ADCP (velocidade média no perfil) ou do ADV (velocidade próximo ao fundo) foram incluídas, os erros reduziram a 4% e 8%, respectivamente. Em relação ao espectro obtido pela boia (suposto como verdadeiro), a correção a partir

dos correntômetros subestimou a altura na vazante (onda e corrente em sentidos opostos) e superestimou na enchente (onda e corrente no mesmo sentido).

Chwang e Chen (2003) relataram o monitoramento de ondas geradas por embarcações no interior do Porto Victoria, em Hong-Kong, onde foram instalados 6 equipamentos do tipo PUV (S4ADW) em 17 estações e 1 equipamento do tipo *wave rider* em local externo ao porto. Os autores descrevem detalhadamente as rotinas de medição e as estruturas de apoio para fundeio dos instrumentos. O estudo objetivava caracterizar a reflexão múltipla existente no interior do recinto portuário, que provocava um estado de agitação com padrão espacial irregular, de curto período (comparado com o das ondas geradas por vento, externas ao porto) e ondas muito esbeltas. As expressões das funções de resposta para pressão e para velocidade são apresentadas pelos autores, todas baseadas na Teoria Linear, aparentemente sem levar em consideração o efeito Doppler na equação de dispersão.

Estudos Teóricos e Numéricos

Muitas teorias numéricas foram desenvolvidas para descrever a superposição de ondas e correntes, baseadas no potencial de velocidades, pois supunham o escoamento irrotacional. A Teoria da Função de Corrente desenvolvida por Dean (1965) foi estendida por Dalrymple (1973, 1974) para incluir uma corrente com vorticidade constante em duas camadas (denominada “corrente bilinear” pelo autor), o que representava um aspecto inovador. Dalrymple e Cox (1976) aplicaram a mesma metodologia (modelo numérico tipo Galerkin sujeito à minimização do erro médio quadrático na condição de contorno dinâmica na superfície livre) ao caso de ondas periódicas e simétricas, propagando-se em escoamento rotacional onde a corrente pode ser representada como cosseno trigonométrico ou hiperbólico, dependendo de um sinal na equação governante ser positivo ou negativo. Neves (1987) utilizou a mesma metodologia original de Dean e propôs uma solução formal das equações não lineares do movimento, periódica no espaço, através de dedução analítica em que aplicava o método de separação de variáveis à equação de vorticidade bidimensional, para uma distribuição $f(\Psi) = (a + b \log \Psi) \Psi$.

Mais adiante neste trabalho apresenta-se em detalhe a metodologia da Teoria da Função de Corrente, cujos parâmetros livres são a altura, o período,

a profundidade, a corrente no fundo e a vorticidade (constante). Demonstrar-se-á como todas as propriedades cinemáticas e dinâmicas das ondas são afetadas pela presença de correntes, especialmente pela vorticidade. Correntes favoráveis aumentam as velocidades horizontais sob a crista da onda, o comprimento de onda e a redução da esbeltez, enquanto que correntes contrárias possuem efeitos opostos.

Kishida e Sobey (1988) apresentam um modelo de Stokes de terceira ordem no parâmetro $(kH/2)$, para a função de corrente. Os autores compararam os resultados para número de onda, velocidade, aceleração, pressão e energia com aqueles obtidos pela Teoria de Stokes sem corrente e pela Teoria Linear. Concluíram que a vorticidade, nos valores usuais de interesse prático em engenharia pouco influenciava a solução. No entanto, estes autores trabalharam, a rigor, com valores muito baixos de vorticidade e, além disso, as situações para as quais uma teoria de terceira ordem seja válida ainda está distante das situações mais fortemente não lineares.

Swan (1992) desenvolveu um modelo teórico para explicar a dinâmica de um escoamento rotacional oscilatório, resultante da superposição de uma onda irrotacional com uma corrente fortemente rotacional. Ele concluiu que uma componente adicional aparece em segunda ordem na esbeltez da onda, $(kH)^2$, relacionada diretamente à distribuição de vorticidade, termo que não é previsto na expansão clássica de Stokes para ondas irrotacionais. Em resumo, o escoamento oscilatório na presença de correntes com forte cisalhamento não poderia ser previsto por uma solução irrotacional, como por exemplo, resultante de uma corrente “equivalente”, de magnitude igual ao valor médio na vertical, conforme proposto por Hedges; Lee (1992).

Sobey e Hughes (1999) apresentaram um método numérico, também do tipo Galerkin, porém fundamentado numa expansão em série trigonométrica para o potencial de velocidades. As propriedades dinâmicas de um trem de ondas irregulares eram determinadas por um método de otimização, a partir de registros de pressão e de velocidade horizontal, conhecidas a profundidade e a corrente, que é considerada uniforme na vertical.

Rego (1999) desenvolveu um modelo rotacional de Boussinesq para a propagação da onda em profundidade variável, na presença de corrente, a favor ou contra, com vorticidade constante. A autora investigou situações de bloqueio das ondas pela corrente, a qual era intensificada pela redução gradual da lâmina d'água. Este trabalho comprovou teoricamente que a conjugação entre vorticidade e

declividade de fundo introduz termos adicionais nas expressões da velocidade e da pressão que não encontram equivalentes nas equações de Boussinesq conforme apresentadas por Peregrine (1976).

Olabarrieta et al. (2011) retomaram os estudos na baía de Willapa, alimentando um modelo numérico tridimensional, completamente acoplado, de circulação hidrodinâmica costeira, interação oceano-atmosfera-onda, transporte de sedimentos e evolução morfológica (COAWST). Os autores relataram diversos estudos que comprovaram a redução da altura da onda no caso de corrente e onda deslocarem-se no mesmo sentido e, ao contrário, um aumento significativo da altura da onda em caso de deslocamentos em sentidos opostos.

FORMULAÇÃO TEÓRICA

Aproximações lineares

Quatro exemplos de perfis de correntes foram considerados (Figura 1):

$$\text{Caso I: } -\psi_{xx} - \psi_{zz} = 0 \quad (9)$$

$$\text{Caso II: } -\psi_{xx} - \psi_{zz} = \Omega_0 \quad (10)$$

$$\text{Caso III: } -\psi_{xx} - \psi_{zz} = -\gamma^2 \psi \quad (11)$$

$$\text{Caso IV: } -\psi_{xx} - \psi_{zz} = \gamma^2 \psi \quad (12)$$

As soluções destas equações para a função de corrente ψ , considerando as condições de contorno indicadas pelas equações (1) a (4) para os problemas linearizados, são dadas pelas equações (21) a (25) na Parte 1 (NEVES e DIAS, 2013).

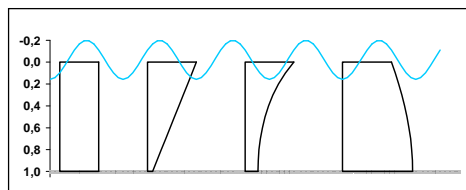


Figura 1- Perfil vertical de correntes para os casos I a IV, respectivamente, da esquerda para a direita.

Influência no Fator de Resposta de Pressão

Busca-se uma relação entre a pressão instantânea e a elevação da superfície livre através de uma expressão do tipo:

$$p(x, z, t) = -\rho g z + \rho g K_p(z, \omega) \eta(x, t) \quad (18)$$

onde a altura de onda é usualmente determinada com base na função de transferência, $K_p(z, \omega)$, deduzida a partir da teoria de ondas de pequena amplitude sem corrente (Teoria Linear):

$$K_p(z, \omega) = \frac{\cosh[k(z+h)]}{\cosh kh} \quad (19)$$

De acordo com Gabriel e Hedges (1987) tal expressão deveria ser preferencialmente utilizada no sentido espectral, em vez de ser usada onda a onda (instantaneamente), ou seja,

$$S_{pp} = K_p^2 S_{\eta\eta} \quad (20)$$

Supondo que estas expressões fossem válidas universalmente, ficaria logo evidente a importância do valor do comprimento de onda (equações 26, 28, 30 e 31 na Parte 1, (NEVES e DIAS, 2013)) no cálculo do fator de resposta de pressão conforme o perfil de velocidade da corrente subjacente. Na Parte 1 já se discutiu o erro cometido ao se calcular o comprimento de onda pela Teoria Linear sem corrente.

Os efeitos não lineares influenciam a estimativa da altura de ondas a partir de registros de pressão pois, a equação (18) subestima a elevação da crista e superestima-se a elevação do cavado. Por estes motivos, funções de transferência empíricas bem como procedimentos numéricos têm sido utilizados para a correção desses efeitos.

Entretanto, problema mais sério aparece quando existe uma corrente rotacional: não somente os efeitos lineares podem aumentar devido à ocorrência de vorticidade horizontal (isto é, cisalhamento no plano vertical), como também o efeito Doppler não pode ser desprezado (e.g. SWAN, 1990).

Para o Caso I, velocidade uniforme, a função de transferência entre a pressão dinâmica e a elevação da superfície livre, K_{1p} , possui a mesma forma analítica apresentada para o caso sem corrente,

$$K_{1p}(z, \omega) = \frac{\cosh[k(z+h)]}{\cosh kh} \quad (21)$$

embora o número de onda deva ser obtido através da equação de dispersão (8), que envolve a frequência intrínseca da onda, $\sigma = \omega - kU_0$,

Apesar das expressões algébricas da pressão dinâmica, para os casos da Teoria Linear sem cor-

rente e com corrente uniforme, serem similares, os valores podem ser significativamente diferentes devido à mudança da escala de tempo intrínseca do movimento. A Tabela 1 mostra os valores do fator de resposta da pressão, para um transdutor localizado no fundo ($z=h$), como função da profundidade relativa aparente ($\omega^2 h/g$) e do número de Froude da corrente à superfície ($U_s/(\omega h)$). A linha central dessa tabela corresponde ao caso sem corrente; deste modo, conhecendo uma situação particular da corrente, o período de onda e a profundidade, é possível obter o erro na estimativa da altura de onda, comparando-se o fator de resposta da pressão previsto com o valor da linha central (para a mesma profundidade relativa aparente).

A Figura 2 ilustra a influência da posição do sensor na coluna d'água no fator de correção espectral, ou seja, $K_{1p}^{-2}(\omega; z)$ para diferentes valores do número de Froude. Esta figura ilustra bem o efeito da corrente, quando se compara com o fator de resposta de pressão sem corrente.

Tabela 1 - Valores de $K_{1p}^{-1} = \cosh kh$ em função de $U_0/(\omega h)$ e $\omega^2 h/g$. Valores negativos de $U_0/(\omega h)$ representam onda propagando-se contra a corrente.

$U_0/(\omega h)$	$\omega^2 h/g$				
	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
-0,20	1,4925	3,9838	–	–	–
-0,15	1,4325	2,7770	16,3113	–	–
-0,10	1,3847	2,2750	5,1450	22,9907	–
-0,09	1,3762	2,2068	4,6044	15,5282	160,6728
-0,08	1,3681	2,1454	4,1861	11,6248	59,3241
-0,07	1,3603	2,0897	3,8529	9,2722	32,6309
-0,06	1,3528	2,0391	3,5814	7,7191	21,4628
-0,05	1,3455	1,9929	3,3558	6,6264	15,6318
-0,04	1,3385	1,9504	3,1653	5,8206	12,1572
-0,03	1,3317	1,9112	3,0025	5,2043	9,8957
-0,02	1,3252	1,8750	2,8615	4,7192	8,3279
-0,01	1,3189	1,8414	2,7384	4,3284	7,1879
0,00	1,3128	1,8102	2,6299	4,0074	6,3279
0,01	1,3069	1,7810	2,5335	3,7393	5,6595
0,02	1,3012	1,7537	2,4474	3,5123	5,1273
0,03	1,2957	1,7282	2,3699	3,3178	4,6949
0,04	1,2904	1,7041	2,2998	3,1494	4,3375
0,05	1,2852	1,6815	2,2361	3,0023	4,0378
0,06	1,2801	1,6602	2,1780	2,8726	3,7833
0,07	1,2753	1,6400	2,1247	2,7576	3,5648
0,08	1,2705	1,6210	2,0757	2,6549	3,3753
0,09	1,2659	1,6029	2,0305	2,5627	3,2096
0,10	1,2614	1,5858	1,9886	2,4794	3,0635
0,15	1,2409	1,5116	1,8186	2,1609	2,5359
0,20	1,2229	1,4525	1,6946	1,9473	2,2084

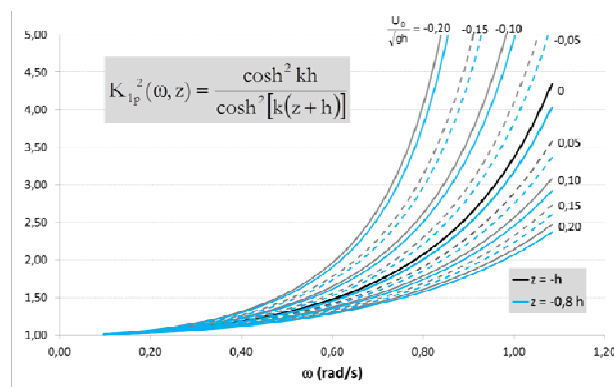


Figura 2 - Função de correção espectral de pressão para superfície livre. ω é a frequência aparente em relação a um observador fixo.

Por exemplo, para uma velocidade (uniforme) igual a 1m/s, período da onda igual a 8s, e profundidade igual a 8m, obtêm-se os parâmetro $\omega^2 h/g$ igual a 0,50 e $U_s/(\omega h)$ igual a $\pm 0,16$, valendo o sinal negativo para onda se propagando em sentido contrário à corrente. Os valores de K_{1p} são respectivamente 1,237 (mesmo sentido) e 1,485 (sentidos opostos), ou seja um erro de 6% ou de -11,6% em relação ao valor sem corrente 1,313. Tal resultado é coerente com os resultados relatados por Smith (2002).

Para o caso em que ocorre uma corrente com vorticidade uniforme, Caso II, o fator de resposta da pressão, K_{2p} , torna-se

$$K_{2p}(z, \omega) = \left\{ 1 - \frac{(\omega - kU_s)^2}{gk \tanh kh} \right\} \frac{\sinh[k(z+h)]}{\sinh kh} + \frac{\omega - k[U_0 + \Omega_0(z+h)]}{\omega - kU_s + \Omega_0 \tanh kh} \frac{\cosh[k(z+h)]}{\cosh kh} \quad (22)$$

O primeiro termo só existe na presença de cisalhamento, anula-se no fundo, e aumenta em magnitude em direção à superfície; este efeito difere de outras teorias, e pode ser explicado como o excesso de aceleração vertical induzido pela vorticidade. A Tabela 2 e a Tabela 3 apresentam valores de K_{2p} no fundo, como função de $U_s/(\omega h)$, $\omega^2 h/g$, e do parâmetro de vorticidade, Ω_0/ω iguais a 0,1 e 0,2, respectivamente.

Tomando novamente um exemplo em que a velocidade na superfície é igual a 1m/s e no fundo é igual a 0,37m/s, período da onda igual a 8s, profundidade igual a 8m e parâmetro de vorticidade igual a 0,1, obtêm-se os parâmetro $\omega^2 h/g$ igual a

0,50 e $U_s/(\omega h)$ igual a $\pm 0,16$, valendo o sinal negativo para onda se propagando em sentido contrário à corrente. Os valores de K_{2p} são respectivamente 1,247 (mesmo sentido) e 1,542 (sentidos opostos), ou seja um erro de 5% ou de -14,5% em relação ao valor sem corrente 1,313.

Na equação $-\nabla^2\psi = \pm \gamma^2\psi$, onde γ é um número real, distinguem-se dois casos, dependendo do sinal. Se for negativo, o perfil de velocidade da corrente terá a forma de função exponencial, enquanto que, se for positivo, a corrente possuirá distribuição em cosseno ao longo da profundidade. Definidas as condições de contorno usuais para o problema linearizado, obtêm-se duas famílias de soluções.

Tabela 2 - Fator de resposta de pressão, K_{2p} , no fundo.
Parâmetro de vorticidade $\Omega_0/\omega = 0,1$.

$U_s/(\omega h)$	$\omega^2 h/g$				
	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
-0,20	1,5503	4,8421	—	—	—
-0,15	1,4750	3,0312	24,6099	—	—
-0,10	1,4168	2,3941	5,6999	28,5106	—
-0,09	1,4066	2,3117	5,0213	18,1423	236,8287
-0,08	1,3969	2,2384	4,5094	13,1076	73,2221
-0,07	1,3877	2,1727	4,1098	10,2092	37,6262
-0,06	1,3788	2,1134	3,7894	8,3552	23,8518
-0,05	1,3702	2,0596	3,5270	7,0808	16,9708
-0,04	1,3620	2,0106	3,3082	6,1577	12,9872
-0,03	1,3541	1,9657	3,1229	5,4618	10,4470
-0,02	1,3465	1,9245	2,9641	4,9205	8,7127
-0,01	1,3392	1,8864	2,8264	4,4887	7,4668
0,00	1,3128	1,8102	2,6299	4,0074	6,3279
0,01	1,3253	1,8185	2,5995	3,8453	5,8181
0,02	1,3188	1,7881	2,5050	3,5999	5,2505
0,03	1,3124	1,7597	2,4204	3,3909	4,7919
0,04	1,3063	1,7331	2,3443	3,2107	4,4147
0,05	1,3004	1,7081	2,2754	3,0540	4,0998
0,06	1,2946	1,6847	2,2128	2,9165	3,8334
0,07	1,2891	1,6626	2,1556	2,7950	3,6054
0,08	1,2837	1,6418	2,1031	2,6868	3,4084
0,09	1,2785	1,6221	2,0549	2,5900	3,2365
0,10	1,2735	1,6035	2,0104	2,5027	3,0854
0,15	1,2504	1,5236	1,8309	2,1714	2,5427
0,20	1,2305	1,4606	1,7013	1,9513	2,2086

A primeira família de soluções, Caso III, aplica-se a um perfil vertical de corrente com decaimento exponencial a partir da superfície livre:

$$U(z) = (U_s - c) \frac{\cosh[\gamma(z+h)]}{\cosh \gamma h} \quad (23)$$

O fator de resposta de pressão, K_{3p} , é

$$K_{3p}(z, \omega) = \frac{\alpha \cosh[\gamma(z+h)] \cosh[\alpha(z+h)]}{\alpha \cosh \gamma h \cosh \alpha h + \gamma \sinh \gamma h \sinh \alpha h} + \frac{\gamma \sinh[\gamma(z+h)] \sinh[\alpha(z+h)]}{\alpha \cosh \gamma h \cosh \alpha h + \gamma \sinh \gamma h \sinh \alpha h} \quad (24)$$

$$\text{onde } \alpha = \sqrt{\gamma^2 + k^2}.$$

Tabela 3 - Fator de resposta de pressão, K_{2p} , no fundo.
Parâmetro de vorticidade $\Omega_0/\omega = 0,2$.

$U_s/(\omega h)$	$\omega^2 h/g$				
	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
-0,20	1,6232	6,2622	—	—	—
-0,15	1,5270	3,3583	43,8093	—	—
-0,10	1,4552	2,5360	6,3854	36,3761	—
-0,09	1,4429	2,4357	5,5242	21,5402	378,5027
-0,08	1,4313	2,3475	4,8922	14,9389	92,6253
-0,07	1,4201	2,2692	4,4097	11,3293	43,9642
-0,06	1,4095	2,1993	4,0296	9,0989	26,7394
-0,05	1,3994	2,1364	3,7229	7,6036	18,5430
-0,04	1,3896	2,0796	3,4703	6,5410	13,9435
-0,03	1,3803	2,0279	3,2588	5,7520	11,0740
-0,02	1,3714	1,9807	3,0791	5,1458	9,1466
-0,01	1,3628	1,9374	2,9246	4,6672	7,7793
0,00	1,3128	1,8102	2,6299	4,0074	6,3279
0,01	1,3467	1,8608	2,6728	3,9625	5,9948
0,02	1,3391	1,8267	2,5688	3,6967	5,3875
0,03	1,3318	1,7950	2,4763	3,4715	4,8998
0,04	1,3248	1,7655	2,3934	3,2784	4,5008
0,05	1,3180	1,7379	2,3187	3,1112	4,1692
0,06	1,3114	1,7121	2,2511	2,9651	3,8897
0,07	1,3051	1,6878	2,1896	2,8364	3,6513
0,08	1,2990	1,6650	2,1334	2,7223	3,4460
0,09	1,2931	1,6436	2,0819	2,6204	3,2674
0,10	1,2874	1,6233	2,0345	2,5289	3,1108
0,15	1,2614	1,5370	1,8447	2,1837	2,5516
0,20	1,2392	1,4697	1,7090	1,9565	2,2102

Observe que a expressão (24) reduz-se à forma usual da teoria linear, sem corrente, no limite quando γ tende a zero. Este seria o caso, por exemplo, de uma corrente gerada por vento sobre a superfície, com forte cisalhamento.

Para a segunda família de soluções, Caso IV, correspondendo à equação governante $-\nabla^2\psi = \gamma^2\psi$, o perfil da corrente é dado pela expressão

$$U(z) = (U_s - c) \frac{\cos[\gamma(z+h)]}{\cos\gamma h} \quad (25)$$

e o fator de resposta de pressão, K_{4p} , é:

$$K_{4p}(z, \omega) = \begin{cases} \frac{\beta h \cos[\gamma(z+h)] \cos[\beta(z+h)]}{\beta h \cos \gamma h \cos \beta h - \gamma h \sin \gamma h \sin \beta h} - \frac{\gamma h \sin[\gamma(z+h)] \sin[\beta(z+h)]}{\beta h \cos \gamma h \cos \beta h - \gamma h \sin \gamma h \sin \beta h} & , \text{se } k^2 < \gamma^2 \\ \frac{\cos[\gamma(z+h)] - \gamma[(z+h)] \sin \gamma[(z+h)]}{\cos \gamma h - \gamma h \sin \gamma h} - \frac{\beta h \cos[\gamma(z+h)] \cosh[\beta(z+h)]}{\beta h \cos \gamma h \cosh \beta h - \gamma h \sinh \gamma h \sinh \beta h} & , \text{se } k^2 = \gamma^2 \\ \frac{\beta h \cos[\gamma(z+h)] \cosh[\beta(z+h)]}{\beta h \cos \gamma h \cosh \beta h - \gamma h \sinh \gamma h \sinh \beta h} - \frac{\gamma h \sin[\gamma(z+h)] \sinh[\beta(z+h)]}{\beta h \cosh \gamma h \cosh \beta h - \gamma h \sinh \gamma h \sinh \beta h} & , \text{se } k^2 > \gamma^2 \end{cases} \quad (26)$$

$$\text{onde } \beta = \sqrt{|\gamma^2 - k^2|}.$$

A Figura 3 apresenta uma comparação entre os valores de K_{np} para uma situação específica de onda e corrente. Observa-se claramente quão importante é a precisa definição do perfil de velocidade (e de vorticidade, também) para a correta estimativa da superfície livre a partir do registro de pressão.

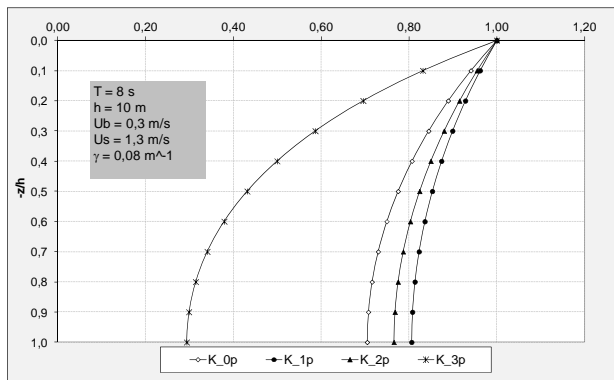


Figura 3 - Fator resposta de pressão para os Casos I a IV.

Teoria da Função de Corrente

Segundo o modelo de Dean (1965), desenvolvido para ondas irrotacionais, a solução do problema não-linear era expressa numa série de funções que satisfaria de forma exata a equação governante no domínio do fluido, a condição de contorno no fundo e a condição de contorno cinemática na superfície livre. Os coeficientes não conhecidos

da série eram determinados através de um processo de minimização do erro médio quadrático na condição de contorno dinâmica da superfície livre. Em sua formulação original, Dean usou a constante de Bernoulli como parâmetro de convergência, deixando livre o ajuste da altura de onda através de aproximações sucessivas. Dalrymple (1973) aprimorou o método introduzindo duas expressões condicionantes na função objetivo a ser minimizada: (1) o nível médio d'água seria nulo (de modo a garantir que a profundidade estabelecida pelo usuário fosse respeitada) e (2) a diferença entre os valores de η na crista e no cavado seria igual à altura de onda estabelecida. O problema de minimização condicionada foi resolvido com o método de multiplicadores de Lagrange.

O presente trabalho restringe-se ao problema de valor de contorno constituído pela equação governante para vorticidade constante, no caso a equação de Poisson:

$$-\nabla^2 \psi = \Omega_0 \quad (27)$$

e pelas condições de contorno no fundo e na superfície livre dadas pelas expressões (2) a (4). Os eixos coordenados são colocados no nível d'água médio. A direção horizontal positiva indica a propagação da onda em relação ao fluido.

Como resultado da linearidade da equação governante (27), um perfil de corrente variando linearmente pode ser superposto a um campo de onda irrotacional, resultando na solução para função de corrente igual a:

$$\psi(x, z) = -(U_0 - c)(z+h) - \frac{1}{2} \Omega_0 (z+h)^2 - \sum_{n=1}^{NN} \frac{X_n}{n} \sinh[nk(z+h)] \cos nkx \quad (28)$$

Esta solução, proposta por Neves (1987), é uma pequena modificação daquela proposta por Dalrymple (1973), pois inclui a divisão por n do termo geral do somatório no segundo membro da equação, o que produz melhores resultados numéricos em ordens mais elevadas. Na expressão (28), as incógnitas são os coeficientes X_n , o comprimento de onda L e o valor da função de corrente na superfície livre, ψ_η . A ordem NN da aproximação é de escolha livre pelo usuário.

Implicitamente admite-se que a forma da onda seja periódica no espaço e desloque-se sem alteração, o que é bem verificado para ondulações

de longo período propagando-se sobre correntes permanentes sem variações espaciais. Na natureza, porém, tais condições nem sempre são encontradas, pois o campo de correntes é espacialmente variável e, devido a efeitos não lineares de interação onda-onda e onda-corrente, pode haver uma lenta evolução da forma da onda.

A forma da expressão adotada para $\psi(x,z)$ satisfaz exatamente a equação diferencial governante e a condição de contorno no fundo. A condição de contorno cinemática na superfície livre é utilizada para obter a função η e as incógnitas são determinadas numericamente de modo que o erro médio quadrático na condição de contorno dinâmica da superfície livre seja minimizado, sujeito às restrições da altura (diferença entre as elevações na crista e no cavado pré-estabelecida) e do nível médio (valor médio da função η ser igual a zero).

Desde que o período, a altura de onda e a profundidade d'água sejam especificados, os parâmetros L (comprimento de onda), Q (constante de Bernoulli, equação (4)) e η (superfície livre), são determinados de modo que a função objetivo, E , seja minimizada:

$$E = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\hat{Q}(\theta) - \bar{Q})^2 d\theta + \lambda_1 \{\hat{\eta}(\pi) - \hat{\eta}(0) - 1\} + \lambda_2 \int_0^\pi \hat{\eta}(\theta) d\theta \quad (29)$$

onde são feitas as transformações para adimensionar as variáveis $\theta = 2\pi x/L$, $\hat{\eta} = \eta/H$ e $\hat{\psi} = \psi/(gHT)$. As constantes λ_1 e λ_2 são multiplicadores de Lagrange e a barra significa média ao longo do comprimento de onda.

A solução é alcançada por um procedimento iterativo. Os valores iniciais adotados para as diversas incógnitas são aqueles obtidos a partir da solução linearizada do problema. A cada iteração, a superfície livre é atualizada, em 10 pontos ao longo de meio comprimento de onda, pela condição de contorno cinemática da superfície livre e o novo valor da função objetivo é computado.

Novos valores das NN+4 incógnitas (NN coeficientes da função de corrente, L , ψ_η e os dois multiplicadores de Lagrange) são computados usando um método de mínimos quadrados não linear. A cada iteração, atualiza-se o valor da função objetivo para pequenos incrementos nos valores das incógnitas, ΔX_n ,

$$E^{i+1} = E^i + \sum_{n=1}^{NN+4} \left(\frac{\partial E}{\partial X_n} \right)^i \Delta X_n \quad (30)$$

O valor do mínimo da função objetivo na j -ésima iteração é obtido diferenciando-se em relação a ΔX_n , obtendo-se um sistema de NN+4 equações com NN+4 incógnitas:

$$\frac{\partial E^{i+1}}{\partial X_m} = \frac{\partial E^i}{\partial X_m} + \sum_{n=1}^{NN+4} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial X_m \partial X_n} \right)^i \Delta X_n = 0 \quad (31)$$

para $m = 1, 2, \dots, NN+4$.

Atualiza-se então a expressão da função de corrente (28), calcula-se a nova posição da superfície livre, η . O processo termina quando a variação relativa do erro médio quadrático na condição de contorno dinâmica da superfície livre é considerada suficientemente pequena (10^{-5}).

RESULTADOS

Dias (1992) utilizou a Teoria da Função de Corrente para vorticidade constante, a fim de comparar os resultados previstos nas situações com e sem corrente, realizando um total de 240 testes para as seguintes combinações dos parâmetros de entrada:

1. profundidades de 5 m, 10 m, e 20 m;
2. alturas de onda de 1 m, 2 m, 3 m, e 4 m e períodos de 6 s, 7 s, 8 s, 9 s, e 10 s
3. correntes superficiais de 0,5 m/s, 1,0 m/s, 1,5 m/s, e 2,0 m/s.

Estas são condições representativas dos estados de mar na costa brasileira e são profundidades em que geralmente se instalam os sensores de pressão; elas estão apresentadas na Figura 4.

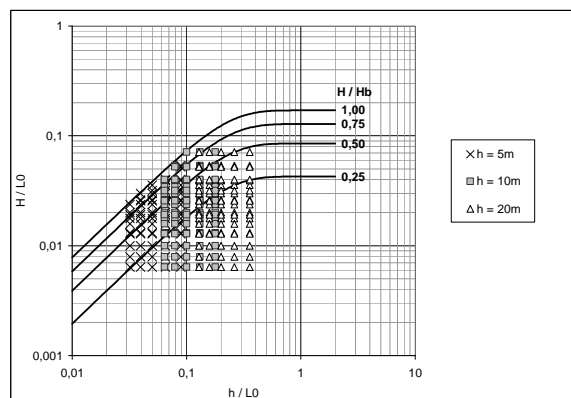


Figura 4 - Regiões de validade para os casos estudados.
(adaptado de Dean, 1974)

A análise do erro nos valores de pressão sob a crista e sob o cavado, considerando as situações com e sem velocidade, baseou-se na expressão:

$$\frac{p(U=0) - p(U \neq 0)}{p(U \neq 0)} \quad (32)$$

Utilizou-se o mesmo procedimento para cálculo dos valores de erro no comprimento de onda (Parte 1).

Dias (1992) concluiu que, ao inferir a altura de onda pela pressão sob a crista sem considerar a presença de corrente, incorre-se em erros que ora subestimam ora superestimam o valor da altura. Observa-se o mesmo problema no cálculo do comprimento de onda, o qual passa a ser influenciado também pela altura de onda, à medida que a onda se torne mais não linear.

Corrente uniforme

Quando a corrente é contrária à onda, o valor de pressão sob a crista é subestimado e, quando a corrente é favorável, ele é superestimado, em relação à situação sem corrente. Este resultado é coerente com as observações relatadas por Smith (2002), assim como pelos estudos teóricos e análise de dados experimentais relatados por Sobey; Hughes (1999).

A Tabela 4 ilustra alguns exemplos numéricos da influência sobre a pressão dinâmica. O aumento do período da onda de 6 s para 10 s, na condição de corrente contrária à onda, resultou na redução do erro nas estimativas da pressão sob a crista. No caso das ondas de menor altura ($H = 1$ m), os desvios provocados pela corrente sobre o valor de pressão sob a crista foram apenas ligeiramente maiores.

Na profundidade de 5 m, com a corrente se deslocando em sentido contrário à onda, diminuiu o valor da pressão sob o cavado para o período de 6 s; com o aumento do período, porém, ocorreu um aumento do valor da pressão (o que talvez possa ser explicado pela diminuição da profundidade relativa da onda); quando a corrente se desloca na mesma direção da onda, salvo o caso em que $T = 6$ s e $H = 1$ m, ocorreu sempre uma diminuição no valor da pressão no cavado.

Resultados para a profundidade de 10 m, no caso de corrente contrária, mostraram que, para as condições simuladas, os desvios na pressão sob a crista variaram na faixa de 21% a 100%, sendo que ondas de menor altura ($H = 1$ m) eram mais influ-

enciadas pela presença de uma corrente contrária do que ondas de maior altura ($H = 3$ m). Com a corrente favorável à onda, o erro situou-se na faixa de -20% a -11%.

Tabela 4 - Erros máximos para onda e corrente deslocando-se no mesmo sentido e em sentidos opostos. (A) pressão sob a crista; (B) pressão sob o cavado.

(A)					
período		h	período		
6 s	10 s		6 s	10 s	
80%	25%	5 m	-20%	-10%	
175%	22%	10 m	-20%	-10%	
950%	30%	20 m	-50%	-15%	
sentidos opostos			mesmo sentido		

(B)					
período		h	período		
6 s	10 s		6 s	10 s	
60%	-22%	5 m	10%	23%	
170%	13%	10 m	-20%	9%	
950%	30%	20 m	-50%	-10%	
sentidos opostos			mesmo sentido		

Para corrente contrária à onda, o valor da pressão sob o cavado da onda diminuiu em relação ao caso sem corrente, Tabela 4, para quase todas as alturas de onda estudadas, exceto nos casos $T = 10$ s e $H = 4$ m, e $T = 10$ s e $H = 3$ m.

Tais efeitos podem ser explicados pela variação da profundidade relativa (h/L) quando considerada a frequência intrínseca.

Em geral, ondas de menor altura foram mais influenciadas pela presença da corrente: quando corrente e onda têm mesmo sentido, a pressão sob o cavado foi superestimada para períodos menores (6 s e 7 s). Com o aumento do período (8 s a 10 s), porém, subestimou-se o valor de pressão sob o cavado para ondas de 3 e 4 m de altura, as quais passaram a ser mais influenciadas que as ondas menores.

Na profundidade de 20 m, observou-se que, se a corrente for contrária à onda, os valores de erro na pressão sob a crista foram mais influenciados (erro variando de 950% a 30%) pela presença de corrente no caso das ondas de menor altura ($H = 1$ m) do que no caso das de maior altura ($H = 3$ m, erro variando de 400% a 30%). Com a corrente favorável à onda, ocorreu o inverso: para $H = 1$ m o erro variou de -50% a -12% e para $H = 3$ m, variou de -50% a -14%.

Já no caso da pressão sob o cavado, ela foi subestimada para todas as alturas de onda com a corrente contrária à onda; quando a corrente era favorável à onda, o valor da pressão foi superestimado. Em geral, para ondas de menor altura, os valores de pressão sob o cavado foram mais influenciados pela corrente do que ondas de maior altura.

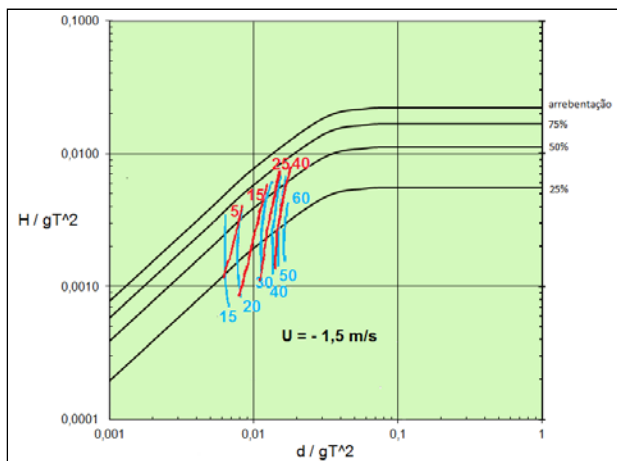


Figura 5 - Erro relativo nos valores de pressão sob a crista (azul) e sob o cavado (vermelho) para os casos estudados de (H, T, d) (Fig.3). Velocidade uniforme $U_0 = -1,5$ m/s.

A Figura 5 exemplifica o comportamento dos erros relativos percentuais encontrados nos valores de pressão sob a crista e sob o cavado em função dos parâmetros profundidade relativa (h/gT^2) e esbeltez (H/gT^2), para uma condição de corrente uniforme. Para todas as profundidades estudadas, observou-se um aumento no erro com o aumento da profundidade relativa e a diminuição da esbeltez da onda. A exceção ocorreu para os valores de pressão sob o cavado quando a profundidade era igual a 5 m: com o aumento da profundidade relativa e a diminuição da esbeltez da onda, o erro diminuiu.

Influência da vorticidade

O programa da Teoria da Função de Corrente foi executado para 4 casos de vorticidade constante ao longo da coluna d'água: $\pm 0,1 \text{ s}^{-1}$ e $\pm 0,2 \text{ s}^{-1}$. Os erros relativos percentuais foram tabelados por Dias (1992), que comparou o valor da pressão obtido com velocidade uniforme, com o valor obtido no caso de haver vorticidade, ou seja,

$$\frac{p(\Omega = 0) - p(\Omega \neq 0)}{p(\Omega \neq 0)} \quad (33)$$

Para vorticidade positiva e a onda propagando-se no mesmo sentido da corrente, observou-se que a pressão sob a crista e sob o cavado são menores que nos casos em que não havia vorticidade. Os erros na pressão sob a crista variaram de 0% a 5% para vorticidade de $0,1 \text{ s}^{-1}$ e de 0% a 14% para vorticidade de $0,2 \text{ s}^{-1}$, e os erros de pressão sob o cavado variaram de 0% a 8% para vorticidade de $0,1 \text{ s}^{-1}$ e de 0% a 20% para vorticidade de $0,2 \text{ s}^{-1}$.

Verificou-se que os erros na pressão sob a crista (0% a 13%) e sob o cavado (0% a 20%) eram ligeiramente maiores para ondas de menor período do que para ondas de maior período. No entanto, os erros na pressão aumentaram com a altura da onda: de 0% a 2% para 1% a 13% sob a crista e de 0% a 3% para 2% a 20% sob o cavado.

A seguir, comparam-se os resultados de corrente com vorticidade uniforme com aqueles obtidos no caso com corrente uniforme e de mesma intensidade na superfície; mesma comparação foi feita com os resultados obtidos no caso sem corrente. Fixada a altura, variou-se o período e, a seguir, fixado o período, variou-se a altura. Os valores de pressão sob a crista e sob o cavado foram menos superestimados em relação ao caso sem corrente do que no caso de corrente uniforme, tanto para os menores períodos quanto para as maiores alturas. Aparentemente, nos casos estudados, tudo se passa como se a presença de vorticidade constante fizesse com que os erros em relação ao caso sem corrente fossem menores do que no caso de uma corrente uniforme. Para as pressões na crista e no cavado, a maior variação em ondas de menor período deveu-se ao aumento da profundidade relativa pois em águas mais profundas, a atenuação da pressão é maior.

Para os casos de vorticidade negativa e onda propagando-se contra a corrente, observou-se que as pressões sob a crista e sob o cavado eram maiores do que nos casos em que não havia vorticidade (corrente uniforme). Os erros na pressão sob a crista variaram de 0% a -35% para vorticidade de $-0,1 \text{ s}^{-1}$ e de 0% a -15% para vorticidade de $-0,2 \text{ s}^{-1}$; os erros de pressão sob o cavado variaram de 0% a -35% para vorticidade de $-0,1 \text{ s}^{-1}$ e de 0% a -20% para vorticidade de $-0,2 \text{ s}^{-1}$.

Para os exemplos considerados, as ondas de menor período apresentaram erros na faixa de -3,5% a -1%, enquanto que as ondas de maior período apresentaram erros de 0% a -7% nos valores da pressão sob a crista. Mantido um valor de altura, as ondas de menor período sofreram uma redução dos valores de pressão, sob a crista e sob o cavado, menor em relação ao caso sem corrente do que em

relação ao caso de corrente uniforme. Para a pressão sob o cavado, as ondas de menor período apresentaram erros na faixa de 0% a -35%, enquanto que as de maior período apresentaram erros na faixa de 0% a -8%. Tal padrão está relacionado ao amortecimento da pressão ao longo da coluna d'água, que depende do número de onda (e consequentemente do período).

Mantido constante o período de onda, as ondas de menor altura tiveram uma diminuição dos valores de pressão sob a crista menor em relação ao caso sem corrente do que no caso de corrente uniforme, para as profundidades de 10m e 20 m; em profundidade de 5 m, as ondas de maior altura tiveram seus valores de pressão sob a crista menos diminuídos. Já para a pressão sob o cavado, em profundidade de 5 e de 10m, as ondas de maior altura apresentaram valores menores em relação ao caso sem corrente do que no caso em que a vorticidade é nula; em profundidade de 20 m, as ondas de menor altura apresentaram seus valores de pressão sob o cavado menos diminuídos. A inversão que ocorre no erro do valor de pressão sob a crista na profundidade de 5 m pode ser explicada pelo fato de que nessa profundidade a pressão medida pelo sensor é quase idêntica à pressão hidrostática, acarretando erros maiores em ondas mais altas.

Ondas de menor altura apresentaram erros maiores (-2% a -35%) que ondas de maior altura (-2% a -13%), na pressão sob a crista, exceto quando a profundidade era de 5 m; neste caso verificou-se uma inversão, com ondas de maior altura apresentando erros maiores (-3% a -6%) do que ondas de menor altura (-2% a -4%).

Na pressão sob o cavado, porém, ondas de maior altura apresentaram erros maiores (-4% a -19%) que as de menor altura (0% a -15%) em profundidade de 5 e 10 m; em profundidade de 20 m, no entanto, as ondas de menor altura apresentaram erros maiores (-7% a -35%) do que ondas mais altas (-7% a -15%).

DISCUSSÃO

A determinação precisa da altura da onda é condição indispensável para qualquer projeto de engenharia costeira. Por exemplo, para o dimensionamento estrutural, sabe-se que as forças provocadas pelas ondas são proporcionais a H^2 ; as equações utilizadas para cálculo do transporte de sedimentos são proporcionais a $H^{2,5}$; o peso dos blocos a serem utilizados em obras de enrocamento é proporcional

a H^3 . Em locais onde, *a priori*, tenha-se conhecimento da interação entre ondas e correntes, recomenda-se que sejam empreendidos esforços para quantificar com precisão a magnitude de tal interação, especialmente a refração induzida pelas correntes, assunto que será abordado na Parte 4 desta série de trabalhos. Medições de perfis verticais e das possíveis variações horizontais das velocidades de correntes, concomitantes a medições de ondas, permitiriam desenvolver formulações teóricas mais abrangentes e exatas para explicação e previsão do fenômeno, bem como otimizar as intervenções de engenharia.

A Tabela 5 apresenta valores teóricos para o erro na estimativa da altura de ondas a partir da pressão no fundo, comparando com os valores fornecidos pela Teoria da Função de Corrente. Neste caso admitiram-se duas situações: o perfil uniforme e uma corrente com vorticidade constante igual a $0,1 \text{ s}^{-1}$.

Tabela 5 - Erro percentual na estimativa de altura de onda em local com profundidade igual a 10 m se uma corrente for desprezada: Erro 1 - corrente uniforme de 1 m/s; Erro 2 - $U_0 = 1 \text{ m/s}$; $\Omega_0 = 0,1 \text{ s}^{-1}$.

T (s)	H (m)	U = 1 m/s		U = -1 m/s	
		Erro 1	Erro 2	Erro 1	Erro 2
7	1,0	11,0%	7,35%	-15,0%	-8,79%
	2,0	11,7%	8,22%	-13,6%	-7,72%
	3,0	12,8%	9,60%	-11,4%	-6,01%
	4,0	14,3%	11,4%	-8,6%	-3,74%
9	1,0	5,69%	3,62%	-7,55%	-3,97%
	2,0	6,16%	4,19%	-6,82%	-3,39%
	3,0	6,87%	5,06%	-5,66%	-2,47%
	4,0	7,75%	6,11%	-4,15%	-1,27%

Quanto menor for o período da onda, maior será o erro relativo na estimativa da altura. Quando a onda se propaga contra a corrente, a altura real é maior do que aquela estimada pela teoria linear sem corrente. Isto se explica porque, neste caso, o período intrínseco é menor do que o período aparente, como apresentado na Parte 1. Portanto, tudo se passa como se a onda se encontrasse em águas mais profundas (relativamente ao comprimento de onda), onde a atenuação da pressão é maior. Por outro lado, quanto menor for o período da onda, mais forte será o efeito da corrente sobre a propagação da onda.

Tais resultados são coerentes com as observações de Gabriel e Hedges (1986), que recomendam que a função de transferência de pressão seja adotada para o espectro (e.g. SMITH, 2002), em vez de adotar a correção ponto a ponto. No entanto, não se confirmou a recomendação daqueles autores em se adotar uma “corrente efetiva”, um valor médio constante na vertical, pois, ao contrário, confirmou-se a observação de Swan (1990) de que a vorticidade próximo à superfície livre é preponderante sobre todos os aspectos cinemáticos (e dinâmicos) da onda.

Atualmente muitos instrumentos combinam conjuntos de sensores que medem a velocidade da corrente simultaneamente a alguma propriedade das ondas. Como exemplo, cita-se o PUV que mede a pressão e a velocidade de correntes em duas direções perpendiculares, em alguma elevação a partir do fundo. Este tipo de sensor representa algum avanço quanto à técnica de medição de ondas, pois fornece informação adicional sobre propriedades cinemáticas e dinâmicas do escoamento e permite inferir a direção de propagação da onda. Outro exemplo são os perfiladores de velocidade combinados à medição de pressão no fundo.

Em primeiro lugar, sabe-se que, em geral, o sensor de pressão para um instrumento submerso não compensa a pressão atmosférica. Registros horários obtidos em Natal, Rio Grande do Norte, e no Aeroporto Santos Dumont, Rio de Janeiro, mostraram claramente a presença de maré barométrica, com amplitude da ordem de 4 a 7 hPa e frequência semidiurna (Figura 6). Ora, tal oscilação atmosférica não está exatamente em fase com a maré oceânica e interfere com a estimativa da altura da coluna d'água. Como o instrumento é calibrado para uma pressão atmosférica constante, qualquer oscilação de curto período na pressão atmosférica interfere com a estimativa da profundidade e consequentemente com o fator de resposta da pressão. Em locais sujeitos a oscilações atmosféricas mais fortes associadas à passagem de ciclones, tal efeito é ainda mais significativo.

Em segundo lugar, conforme informações dos fabricantes e manuais dos equipamentos, não fica evidente tampouco se os equipamentos do tipo PUV consideram a velocidade medida nos diversos cálculos espectrais que são efetuados para calcular direção e altura de onda (e.g. TRAGESSER e ELWANY, 1990). Adaptações ao método de Longuet-Higgins foram propostas por Wolf (1997), enquanto que Sobey e Hughes (1999) propuseram uma metodologia de análise distinta. Estes autores advertem tanto sobre as vantagens do método linear de Fouri-

er (concisão da resposta apresentada), de ampla utilização, quanto sobre as desvantagens (grandes erros na proximidade da superfície livre e o mascaramento da complexidade do fenômeno observado). A análise de resultados de equipamentos PUV voltará a ser discutida na Parte 3 desta série de artigos, quando serão apresentados aspectos cinemáticos da interação onda-corrente.

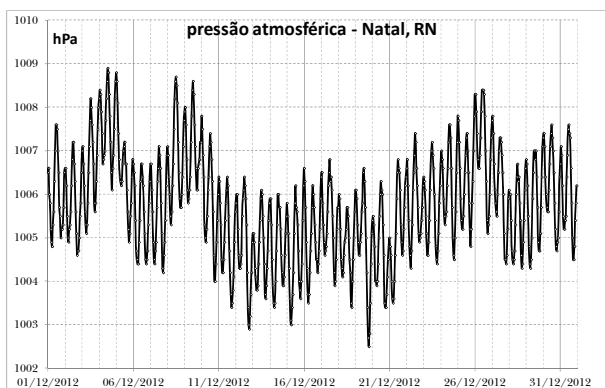


Figura 6 - Pressão atmosférica na estação do INMET em Natal: valores horários em dezembro de 2012.

Em terceiro lugar, a observação da corrente em elevação próxima ao fundo não é suficiente para caracterizar corretamente a altura da onda, pois não fornece o perfil da velocidade da corrente ao longo da profundidade, especialmente próximo à superfície livre cujo valor aparece na relação de dispersão. Perfis de correntes medidos ao largo de Natal, onde a maré astronômica é da ordem de 2,5m, indicaram correntes no fundo e na superfície com magnitudes e direções muito diferentes (comunicação pessoal de Profs. Ada Scudelari e Venerando Amaro).

Em quarto lugar, o método de análise baseado em Longuet-Higgins supõe ainda uma superposição linear de ondas e uma função de transferência linear (eventualmente com corrente subjacente). A transformada de Fourier, porém, calcula integrais em todo o registro, ou seja, calcula propriedades globais, que mascaram a não linearidade local e/ou instantânea. Neste sentido, o método proposto por Sobey e Hughes (1989) oferece nítida vantagem.

Considerando todos esses efeitos e as discrepâncias identificadas entre os resultados teóricos fornecidos pela Teoria da Função de Corrente e a Teoria Linear, conclui-se que a interpretação de resultados de medição de ondas com sensores de pressão deve ser feita com cautela e incorporar ne-

cessariamente a informação da velocidade da corrente subjacente.

CONCLUSÕES

A superposição de ondas e correntes provoca modificações nas propriedades das ondas, o que em geral não é considerado em projetos de engenharia. A fim de quantificar tal influência, quatro tipos de perfil de corrente foram estudados: uniforme, linear (ou vorticidade constante), exponencial e cosseno.

Para estes casos, foram apresentadas as soluções analíticas do problema linearizado para a função de corrente e as correspondentes expressões do fator de resposta de pressão (relação entre a pressão dinâmica em um ponto da coluna d'água com a elevação da superfície livre).

Confirmou-se teoricamente que não apenas a magnitude da velocidade próximo à superfície livre mas também a vorticidade influencia a dinâmica da onda. Estes resultados teóricos indicam que erros significativos podem ocorrer em consequência do desprezo da velocidade da corrente que se desloca juntamente com a onda.

Para o caso de corrente uniforme, os erros na estimativa da pressão sob a crista e sob o cavado variaram de -50% (corrente a favor) a 950% (corrente contrária). Para o comprimento de onda, os erros variaram de -30% (corrente a favor) a 100% (corrente contrária). Como exemplo, quando o período da onda é igual a 8 s, a altura é de 2 m, a profundidade é 10 m, e a corrente é contrária e igual a 1 m/s, o erro encontrado na estimativa da pressão sob a crista é de 13,1%, da pressão sob o cavado é de 8,3%.

Para o caso de corrente com vorticidade uniforme, os erros na estimativa da pressão sob a crista variaram de 13% (vorticidade positiva) a -35% (vorticidade negativa). Para a pressão sob o cavado, os erros variaram de 20% (vorticidade positiva) a -22% (vorticidade negativa). Para o caso de uma onda com período igual a 8 s, altura de 2 m, em profundidade de 10 m, se a velocidade da corrente superficial for igual a 1 m/s (contrária) e a vorticidade for igual a $-0,1 \text{ s}^{-1}$, o erro encontrado na estimativa da pressão sob a crista é de -2,5%, da pressão sob o cavado é de -2,7%.

A quantificação de fenômenos costeiros e os projetos de estruturas oceânicas dependem, em geral, do valor da altura da onda elevada a uma potência maior que 2. Conclui-se que erros significativos podem ser induzidos em tais projetos caso a

altura de onda seja estimada a partir de sensores de pressão.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi originalmente desenvolvido pela primeira autora com o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico que concedeu uma bolsa de mestrado. Posteriormente, o trabalho foi revisto e ampliado pelo segundo autor no âmbito do Projeto CAPES/PROCAD 0144/01-0 e CAPES/PROCAD 053/2007– *Amigos de Boussinesq: Rede Cooperativa de Pesquisa sobre Hidrodinâmica Costeira de Águas Rasas* (COPPE/UFRJ + FEIS/UNESP + IPH/UFRGS + UNIFEI + UFRN).

REFERÊNCIAS

- BODGE, K. *The design, development, and evaluation of Differential Pressure Gauge Directional Wave Monitor*. Misc. Report 82-11. Coastal Engineering Research Center, U.S. Army Corps of Engineers, Fort Belvoir, EUA, 1982.
- CHWANG, A.T.; CHEN, Y. Measurement of ship waves in Victoria Harbor. *Journal of Engineering Mechanics*, v.129, n.10, p.1138-1148, 2003.
- CUMMINS, I.; SWAN, C. Vorticity effect in combined waves and currents. *Proceedings. International Conference on Coastal Engineering*. ASCE. p.618-629, 1994.
- DALRYMPLE, R.A. Water wave models and wave forces with shear currents. 1973. Tese (Ph.D., Dep. Engenharia Costeira e Oceanográfica) - Universidade da Flórida, 1973.
- DALRYMPLE, R.A. A finite amplitude wave on a linear shear current, *Journal of Geophysical Research*, v.79 (30): 4498-4504, 1974.
- DALRYMPLE, R.A.; COX, J.C. Symmetric finite-amplitude rotational water waves, *Journal of Physical Oceanography*, v.6, n.6, p.847-852, 1976.
- DALRYMPLE, R.A.; HEIDEMANM, J.E. *Non-linear Water Waves on a Vertically-Sheared Current Wave and Current Kinematics and Loading*. E&P Forum, Report No. 3.12/156, 69-92, 1989.

- DEAN, R.G. Stream Function representation of non-linear ocean waves, *Journal of Geophysical Research*, v.70, p. 4561-4572, 1965.
- DEAN, R.G. *Evaluation development of water wave theories for engineering application. Volume 1. Presentation of Results*. Special Report No. 1, Coastal Engineering Research Center, U.S. Army Corps of Engineers, Fort Belvoir, EUA, 1974.
- DIAS, A. M. A influência de correntes para a medição de ondas do mar. 1992. 68f. Tese (M.Sc., Prog. Engenharia Oceânica) - COPPE/UFRJ, 1992. Disponível: http://www.oceanica.ufrj.br/intranet/teses/1992_mestrado_andrea_moragas.pdf
- GABRIEL, D.W.; HEDGES, T.S. Effects of currents on interpretation of sub-surface pressure spectra, *Coastal Engineering*, v.10, p. 309-323, 1986.
- HEDGES, T.S.; LEE, B.W. The equivalent uniform current in wave-current computations". *Coastal Engineering*, 16, 301-311, 1992.
- van HOF TEN, J.D.A.; KARAKI, S. Interaction of waves and a turbulent current. Proceedings. *International Conference on Coastal Engineering*. ASCE. p.404-422, 1970.
- KISHIDA, N.; SOBEY, R.J. Stokes' theory for waves on a linear shear current. *J. Engineering Mechanics*, ASCE. v.114, p.1317-1334, 1988.
- LAI, R.J.; LONG, S.R.; HUANG, N.E. Laboratory studies of wave-current interaction". *Journal of Geophysical Research*, 94, C11, p. 16.201-16.214, 1989.
- LIU, A.K.; JACKSON, F.C.; WALSH, E.J.; PENG, C.Y. A case study of wave-current interaction near an oceanic front. *Journal of Geophysical Research*, 94, C11, p. 16.189-16.200, 1989.
- NEVES, C.F. A particular rotational wave theory. 1987. Tese (Ph.D., Dep. Engenharia Costeira e Oceanográfica) - Universidade da Flórida, 1987.
- NEVES, C.F.; DIAS, A.M. A importância da caracterização da corrente para a correta determinação do comprimento e da altura das ondas. Parte 1: embasamento teórico e dispersão. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, v.18, n. 3, 2013.
- OLABARRIETA, M.; WARNER, J.C.; KUMAR, N. Wave-current interaction in Willapa Bay", *Journal of Geophysical Research*, v.116, C12014, 2011. doi:10.1029/2011JC007387.
- PEREGRINE, D.H. Interaction of water waves and currents. *Advances in Applied Mechanics*, v.16, p. 9-117, 1976.
- RAUBENHEIMER, B.; ELGAR, S.; GUZA, R.T. Estimating wave heights from pressure measured in sand bed. *J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, ASCE, v.124, n.3, p. 151-154, 1988.
- REGO, V.S. *Um modelo de ondas tipo Boussinesq para escoamentos com cisalhamento vertical*. 1999. Tese (DSc, Programa de Engenharia Oceânica) - COPPE/UFRJ, 1999.
- SKYNER, D.J.; EASSON, W.J. The effect of sheared currents on wave kinematics and surface parameters. Proceedings. *International Conference on Coastal Engineering*. ASCE. p.618-629, 1992.
- SMITH, J.M. Wave pressure gauge analysis with current. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, ASCE, v.128, n.6, p. 271-275, 2002.
- SOBEY, R.J.; HUGHES, S.A. A locally nonlinear interpretation of PUV measurements. *Coastal Engineering*, v. 36, p. 17-36. 1999.
- SWAN, C. An Experimental Study of Waves on a Strongly Sheared Current Profile. Proceedings. *International Conference on Coastal Engineering*. ASCE. p.489-502, 1990.
- SWAN, C. A stream function solution for waves on a strongly sheared current. Proceedings. *International Conference on Coastal Engineering*. ASCE. p.684-697, 1992.
- SWAN, C.; JAMES, R. L. Random waves on a vertically-sheared current. Proceedings. *International Conference on Coastal Engineering*. ASCE. p.706-719, 1998.
- TRAGESER, J.H.; ELWANY, H. The S4DW, an integrated solution to directional wave measurements. Proceeding. *IEEE Working Conference on Current Measurement*. p.1-14, 1990.
- WOLF, J. The analysis of bottom pressure and current data for waves. Proceedings. *7th International Conference on Electronic Engineering in Oceanography*. Conf. Publication 467, p.165-172, 1997.

WOLF, J. D.; PRANDLE. Some observations of wave-current interaction. *Coastal Engineering*, v.37, p. 471-485, 1999.

The Relevance Of Characterizing The Current For The Correct Determination Of Wave Length And Height. Part 2: Dynamic Pressure

ABSTRACT

Wave measurements based on pressure sensors often do not take into account the presence of currents. Semi-empirical expressions for the frequency transfer functions between pressure and free surface elevations have been presented in the literature, which do not take into account the speed of the underlying current. This fact may lead to errors in the determination of wave heights and length. Using the Stream Function Wave Theory, this work tries to estimate the errors which occur in the values of dynamic pressure under the crest and trough, as well as in the values of wave length, when a current is neglected. Results from linear theory are also presented for four types of current profiles: uniform, with uniform vorticity, exponential and cosine type.

Results are presented in terms of the following parameters: the Froude number referred to the surface current value ($U_s/(gh)^{1/2}$), relative water depth (h/L_0), and dimensionless vorticity (Ω_0/ω), where U_s is the velocity of the current near the surface, ω is the wave frequency in rad/s relative to a fixed observer, h is the water depth, and L_0 is the deep water wave length given by Linear Theory in the absence of current.

Effects of the current on the waves manifest as: Doppler effect (difference between the observed period relative to a fixed reference and the intrinsic wave period, relative to the moving fluid); and non-linearities of the combined flow. A total of 240 cases have been studied, as a combination of water depth (5, 10 and 20 m), wave height (1, 2, 3, and 4m), period (6, 7, 8, 9, and 10s), and surface current value (0.5, 1.0, 1.5, and 2.0 m/s). For the studied cases, values of dynamic pressure and wave length in the presence of current may differ by 20% to 100%.

Keywords: Waves. Vorticity. Wave-current interaction. Stream Function Wave Theory.