

ANÁLISE HIDRÁULICA DO GOLPE DE ARIETE ATRAVÉS DO EQUACIONAMENTO DA TENSÃO DE CISALHAMENTO.

Francis Valter Pêpe França^{1} & Pedro Alves Silva² & Rosielle Souza Pegado³; Marcone Susumu Gomazako⁴; Roberto José dos Santos⁵; Luiz Alberto da França Braga⁶; Rafaela Russo de Carvalho⁷*

RESUMO – Este artigo trata da utilização de um equacionamento matemático que permite a introdução da tensão de cisalhamento (τ_0) na parede do conduto forçado, como alternativa ao fator de atrito (f).

Espera-se obter, com este novo equacionamento, um aumento na precisão na análise de transitórios hidráulicos e conseqüente redução de custos relativos à aquisição e instalação dos dispositivos hidráulicos que protegem as adutoras do referido fenômeno hidráulico.

Palavras-Chave – Investigação Hidráulica; Golpe de Ariete; Tensão de Cisalhamento.

ANALYSIS OF HYDRAULIC WATERHAMMER EQUATING THROUGH THE TENSION SHEAR.

Abstract - This article discusses the use of a mathematical equation which allows the introduction of shear stress (τ_0) in the wall of the pressurized flow, as an alternative to friction factor (f).

We expect to achieve with this new equation, an increase in accuracy in the analysis of hydraulic transients and consequent reduction of costs related to the acquisition and installation of hydraulic devices that protect pipelines of said hydraulic transients.

Keywords - Hydraulic Research, Water Hammer, Shear Stress.

^{1*} UFRB - Universidade Federal do Recôncavo da Bahia em convênio com o IFSP; francispepe@usp.com

² SABESP - Companhia de Saneamento Básico do Estado de São Paulo; pedroasilva@sabesp.com.br

³ UFPA - Universidade Federal do Pará. rpegado@yahoo.com.br

⁴ IFSP - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo. gomazako@hotmail.com

⁵ IFSP - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo. robertomczrb@gmail.com

⁶ UFRB - Universidade Federal do Recôncavo da Bahia; engluiz.fb@bol.com.br

⁷ IFSP - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo. Rafaelarusso_10@yahoo.com.br

1. INTRODUÇÃO

A análise de escoamento transitório em conduto cilíndrico circular faz-se, em hidráulica, sobre um sistema de duas equações diferenciais parciais. Uma garantindo o princípio da conservação de massa de um sistema, geralmente expressa na forma:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

E outra seguindo o princípio da quantidade de movimento, apresentada normalmente como:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{f}{2DA} Q|Q| = 0 \quad (2)$$

Nesta equação (2) o último termo do primeiro membro modela, indiretamente, a transformação de energia em calor. Este fenômeno é conhecido por perda de carga (energia dissipada por unidade de peso).

Esta última parcela do primeiro membro da equação (2), $\frac{f}{2DA} Q|Q|$ apresenta-se desta forma por ter sido modelada com auxílio da fórmula universal de perda de carga distribuída:

$$\Delta H = \frac{8fLQ|Q|}{\pi D^5 g} \quad (3)$$

Que é válida para escoamento permanente em conduto cilíndrico circular.

Entre as premissas para o estabelecimento da equação (3) está a de que a tensão de cisalhamento (τ_0) que a parede do tubo aplica sobre o escoamento é proporcional ao quadrado da velocidade média (\bar{u}), isto é,

$$\tau_0 \sim \bar{u}^2 \quad (4)$$

Esta mesma premissa pode ser encontrada em outros fenômenos onde se faz presente a tensão de cisalhamento (τ_0) sobre uma superfície, como na queda de um pára-quadrista, no arraste sobre a fuselagem de um automóvel ou de um avião e sobre o casco de um barco.

Em todos estes casos a premissa de que ($\tau_0 \sim \bar{u}^2$) é de boa qualidade, principalmente pelo fato de que o perfil de velocidades que se estabelece a partir da superfície sólida é uma função apenas crescente.

A definição do fator de atrito (f), presente na fórmula universal de perda de carga distribuída, surgiu para se transformar a proporcionalidade indicada na equação (4) em uma igualdade, ou seja:

$$\tau_0 = \left(\frac{f}{8}\rho\right) \bar{u}^2 \quad (5)$$

Os cálculos de condições transitórias em hidráulica realizados, ou com a adoção de um fator de atrito (f) constante ou com um fator de atrito (f) dependente da vazão (Q), têm atendido, satisfatoriamente, as necessidades de dimensionamento das tubulações na engenharia hidráulica. Mesmo assim, resta uma falha conceitual que precisa ser superada para uma modelação mais realística do escoamento transitório.

Existe um momento durante a ocorrência do transitório, no qual é possível ter-se a velocidade média nula ($\bar{u} = 0$) com tensão na parede diferente de zero ($\tau_0 \neq 0$). Nesta condição, e que certamente ocorre na reversão do perfil, não vale a premissa ($\tau_0 \sim \bar{u}^2$).

Por esta razão, qualquer que seja a melhoria na modelação do fator de atrito (f), sempre haverá falha pelo fato da perda de carga depender de $fQ|Q|$, pois quando $\bar{u} = 0$, tem-se $Q = 0$, para qualquer que seja a melhoria no modelo do fator de atrito, com implicação de perda igual a zero, o que não é verdade quando ($\tau_0 \neq 0$).

O caminho para superar esta falha conceitual consiste em se obter um modelo realístico de perfil de velocidade $u(r, \omega, t)$ que permita a determinação do gradiente do perfil de velocidades junto à parede:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r}(r, \omega, t) \right|_{r=R} \quad (6)$$

Com isto pode-se obter a tensão na parede:

$$\tau_0 = -\mu \left. \frac{\partial u}{\partial r}(r, \omega, t) \right|_{r=R} \quad (7)$$

Portanto, neste artigo, não será estudada uma melhoria para modelação do fator de atrito (f), uma vez que sempre haverá falha nesta tentativa, pelo fato da perda de carga depender de $fQ|Q|$, pois quando $\bar{u} = 0$, tem-se $Q=0$, para qualquer que seja a melhoria no modelo do fator de atrito, com implicação de perda igual a zero, o que não é verdade quando $\tau_0 \neq 0$.

2. METODOLOGIA

A metodologia utilizada para a análise do golpe de aríete foi, primeiramente, desenvolver um modelo tentativa, com o estudo da formulação para a tensão de cisalhamento com o escoamento de um fluido em regime laminar entre duas placas planas proposta por Landau e Lifshitz (1989). Eles consideraram (a_0) o valor máximo para o gradiente de velocidade do escoamento entre as duas placas planas, portanto:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = a_0 e^{-i\omega t} \quad (8)$$

$$v = \frac{ia_0}{\omega} e^{-i\omega t} \left[1 - \frac{\cos(kr)}{\cos(kR)} \right] \quad (9)$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{ia_0}{\omega} e^{-i\omega t} \left[k \frac{\text{sen}(kr)}{\cos(kR)} \right] \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{ia_0 k}{\omega} e^{-i\omega t} \left[\frac{\text{sen}(kr)}{\cos(kR)} \right] \quad (11)$$

$\frac{\text{sen}(kr)}{\cos(kR)}$ resulta em uma função do tipo ($a + bi$), então:

$$\frac{\text{sen}(kr)}{\cos(kR)} = \tan(kR) \quad (12)$$

$$\tan(kR) = \left(\frac{1+i}{\delta}\right)R + \frac{1}{3}\left(\frac{1+i}{\delta}\right)^3 R^3 + \frac{2}{15}\left(\frac{1+i}{\delta}\right)^5 R^5 + \dots \quad (13)$$

$$\frac{\text{sen}(kr)}{\cos(kR)} = \left(\frac{R}{\delta} + \frac{R^3}{3\delta^3} - \frac{R^3}{\delta^3} + \frac{2R^5}{15\delta^5} - \frac{4R^5}{3\delta^5} + \frac{2R^5}{3\delta^5}\right) + i\left(\frac{R}{\delta} + \frac{R^3}{\delta^3} - \frac{R^3}{3\delta^3} + \frac{2R^5}{3\delta^5} - \frac{4R^5}{3\delta^5} + \frac{2R^5}{15\delta^5}\right) \quad (14)$$

O resultado da equação (14) é uma função do tipo $(a + bi)$. Então, realizando a substituição na eq.(11), temos:

$$\frac{\partial v}{\partial r}\Big|_{r=R} = \frac{a_0}{\omega\delta} [(\text{sen } \omega t - \cos \omega t) + i(\cos \omega t + \text{sen } \omega t)(a + bi)] \quad (15)$$

A parte real da equação (15) é:

$$\text{Real} \frac{\partial v}{\partial r}\Big|_{r=R} = \frac{a_0}{\omega\delta} [a(\text{sen } \omega t - \cos \omega t) - b(\cos \omega t + \text{sen } \omega t)] \quad (16)$$

Estando a velocidade angular (ω) relacionada com a frequência (f) e o período (T), além da celeridade do fluido (a) e o comprimento da tubulação (L), conforme as relações abaixo:

$$\omega = \frac{8\pi L}{a} \quad (17)$$

Este desenvolvimento baseado na formulação de Landau e Lifshitz (1989) para um escoamento entre placas planas, quando relacionado a equação (7) define que:

$$\tau_0 = \mu \text{Real} \frac{\partial v}{\partial r}\Big|_{r=R} \quad (18)$$

Então, com base na formulação para o perfil de velocidades em regime laminar com transitório harmônico e na distribuição de velocidades na teoria da entropia máxima, é possível propor um modelo do tipo:

$$u = \text{Real} \left\{ \frac{R^2 b_0 e^{i\omega t}}{i\omega \rho M 4\mu} \ln \left[1 + (e^M - 1) \left(1 - \frac{J_0(kr)}{J_0(kR)} \right) \right] \right\} \quad (19)$$

Usando a equação anterior do modelo proposto e realizando as primeiras simplificações para facilitar as operações matemáticas, tem-se:

$$u = \text{Real} \left\{ -C i e^{i\omega t} \ln \left[1 + (e^M - 1) \left(1 - \frac{J_0(kr)}{J_0(kR)} \right) \right] \right\} \quad (20)$$

Onde a constante (C) é expressa por:

$$C = \left(\frac{R^2 b_0}{\omega \rho M 4 \mu} \right) \quad (21)$$

Sendo (b_0) o gradiente de pressão expresso como a perda de carga inicial por unidade de comprimento:

$$b_0 = \frac{-\rho g \Delta H}{L} \quad (22)$$

Desenvolvendo a equação (20), tem-se:

$$u = -C \cdot \text{Real} \left\{ i e^{i\omega t} \ln \left[1 + (e^M - 1) \left(1 - \frac{J_0(kr)}{J_0(kR)} \right) \right] \right\} \quad (23)$$

$$\left. \frac{du}{dr} \right|_{r=R} = C \cdot \text{Real} \left[i e^{i\omega t} (e^M - 1) \left. \frac{\left(\frac{dJ_0(kr)}{dr} \right)}{J_0(kR)} \right]_{r=R} \quad (24)$$

A partir da equação (24) e realizando simplificações para facilitar as operações matemáticas, tem-se:

$$\left. \frac{du}{dr} \right|_{r=R} = C_0 \cdot \text{Real} \left[i e^{i\omega t} \left. \frac{\left(\frac{dJ_0(kr)}{dr} \right)}{J_0(kR)} \right]_{r=R} \quad (25)$$

$$\left. \frac{du}{dr} \right|_{r=R} = C_0 \cdot \text{Real} \left[i e^{i\omega t} \left. \frac{-kJ_1(kr)}{J_0(kR)} \right]_{r=R} \quad (26)$$

$$\left. \frac{du}{dr} \right|_{r=R} = C_0 \cdot \text{Real} \left[-i e^{i\omega t} \left. \frac{kJ_1(kr)}{J_0(kR)} \right] \quad (27)$$

Para um argumento (k) de ordem de grandeza elevada, vale a expressão de Bessel:

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\cos \left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (28)$$

Calculando o termo $\frac{J_1(kr)}{J_0(kR)}$, da equação (27), temos:

$$\frac{J_1(kr)}{J_0(kR)} = \frac{\cos \left(kR - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \dots \right)}{\cos \left(kR - \frac{\pi}{4} \right)} \quad (29)$$

$$kR - \frac{3\pi}{4} = \frac{(4R - 3\delta\pi) + i4R}{4\delta} \quad (30)$$

A eq.(30) quando colocada na forma ($m+in$) apresenta mais duas constantes (m) e (n) que trarão uma simplificação matemática à pesquisa.

$$m = \frac{4R-3\delta\pi}{4\delta} \quad (31)$$

$$n = \frac{R}{\delta} \quad (32)$$

O resultado da equação (29) com a utilização de várias constantes que auxiliam no cálculo é:

$$\frac{J_1(kr)}{J_0(kR)} = \frac{\alpha+bi}{\alpha+\beta i} \chi \frac{\alpha-\beta i}{\alpha-\beta i} \quad (33)$$

$$\frac{J_1(kr)}{J_0(kR)} = \frac{(\alpha\alpha+b\beta)+i(\alpha b-a\beta)}{(\alpha^2+\beta^2)} \quad (34)$$

A equação (34) pode ser escrita na forma $(\theta+\varphi i)$, onde:

$$\theta = \frac{(\alpha\alpha+b\beta)}{(\alpha^2+\beta^2)} \quad (35)$$

$$\varphi = \frac{i(\alpha b-a\beta)}{(\alpha^2+\beta^2)} \quad (36)$$

Desenvolvendo a expressão entre colchetes da equação (27)

$$-ie^{i\omega t} \frac{kJ_1(kr)}{J_0(kR)} = -i(\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t) \left(\frac{1+i}{\delta}\right) (\theta + \varphi i) \quad (37)$$

$$-ie^{i\omega t} \frac{kJ_1(kr)}{J_0(kR)} = (-i \cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t) \frac{[(\theta-\varphi)+i(\theta+\varphi)]}{\delta} \quad (38)$$

$$\begin{aligned}
 -ie^{i\omega t} \frac{kJ_1(kr)}{J_0(kR)} &= \frac{[(\theta-\varphi) \operatorname{sen} \omega t + (\theta+\varphi) \cos \omega t]}{\delta} + \\
 &\frac{i[(\theta+\varphi) \operatorname{sen} \omega t - (\theta-\varphi) \cos \omega t]}{\delta}
 \end{aligned} \quad (39)$$

De acordo com a equação (27), a parte real da equação (39) deverá ser utilizada. Então a equação (27) se tornará:

$$\left. \frac{du}{dr} \right|_{r=R} = C_0 \frac{[(\theta-\varphi) \operatorname{sen} \omega t + (\theta+\varphi) \cos \omega t]}{\delta} \quad (40)$$

Desenvolvendo a expressão da tensão de cisalhamento (τ_0) mostrada na equação (7), com a substituição da expressão encontrada na equação (40), tem-se:

$$\tau_0 = \mu C_0 \frac{[(\theta-\varphi) \operatorname{sen} \omega t + (\theta+\varphi) \cos \omega t]}{\delta} \quad (41)$$

A equação (41) é a tensão de cisalhamento na parede do conduto forçado, modelada pelo gradiente harmônico de pressão.

3. RESULTADOS

A utilização da formulação da tensão de cisalhamento (41) em substituição ao fator de atrito (f) trouxe resultados extremamente semelhantes aos obtidos com a utilização de métodos numéricos para a solução de transitórios hidráulicos em condutos forçados com o tradicional fator de atrito (f).

Algumas simulações foram realizadas com o Esquema Numérico de MacCormack e o Método das Características com resultados semelhantes, como mostrado na figura 1, abaixo:

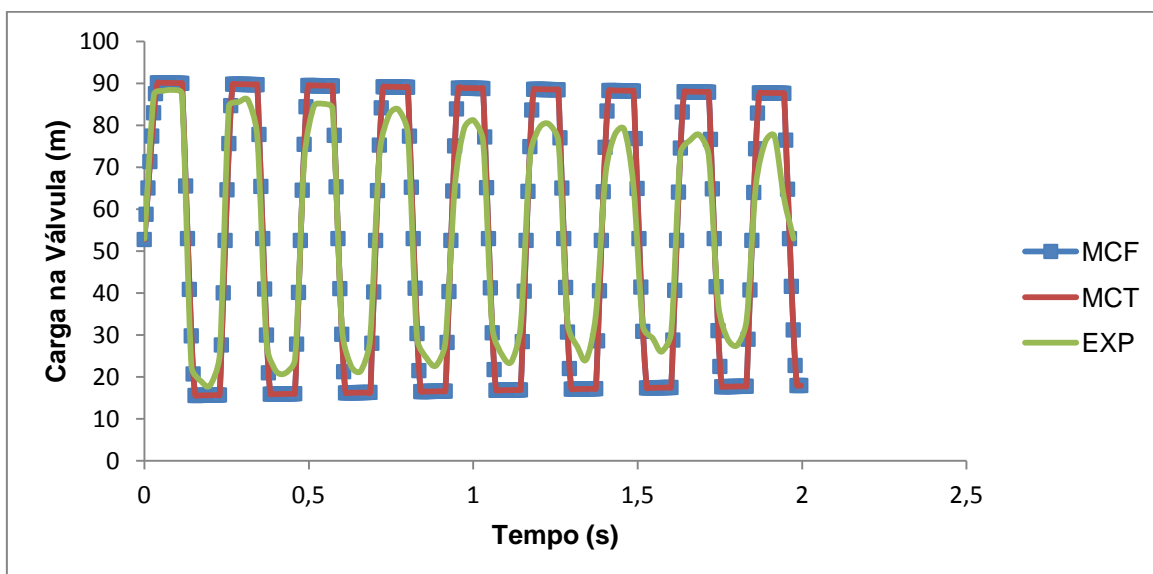


Figura 1 – Gráfico da superposição dos resultados experimentais com aqueles obtidos através da simulação pelo Esquema de MacCormack com fator de atrito (f) constante e com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão usando 50 seções para os dados do pesquisador Pezinga.

EXP é a curva dos dados experimentais, MCF é a curva da simulação feita pelo Esquema de MacCormack com o fator de atrito (f) constante usando 50 seções e MCT é a da simulação pelo Esquema de MacCormack com tensão de cisalhamento modelada por gradiente harmônico de pressão usando 50 seções.

4. CONCLUSÃO

A análise do golpe de aríete com tensão de cisalhamento na parede do conduto forçado modelada por gradiente harmônico de pressão apresenta-se como alternativa aos método de análise de transitórios em sua versão com fator de atrito constante, entretanto, apesar de retratar realisticamente a expressão matemática do evento físico, a diferença (pouco significativa) observada entre os resultados produzidos pelas duas modelações não indica que deva ser promovida nenhuma mudança no tratamento que vem sendo dado a análise dos transitórios nas últimas décadas.

Admitir o fator de atrito constante ou variável, dependente da vazão do escoamento, continuará trazendo bons resultados e, principalmente, a favor da segurança, na análise dos transitórios hidráulicos em engenharia. Este fato é de fácil comprovação, uma vez que a ocorrência da reversão do gradiente longitudinal de pressão associada à reversão do sentido do perfil de velocidades, instante no qual o fator de atrito é matematicamente nulo, mas a tensão de cisalhamento não é, ocorre em uma fração de tempo, comparada a toda a duração do transitório hidráulico.

5. REFERÊNCIAS

- ALLEVI, L. *Theorie General du Moviment Varie de L'eau Dans Less Tuyaux de Conduit*. Reveu de Mecanique. Paris, France. V. 14, 10 – 22 and 230 – 259, 1904.
- BERGERON, L. *Estude des Coups de Beler Dans les Conduits, Nouvel Exose de la Methode Graphique*. La Technique Moderne. V. 28, pp. 37 and 75, 1936.
- BIRD, R. B.; STEWART, W. E.; LIGHTFOOT, E. N. *Transport Fenomena*. Jonh Wiley. NY, 780p, 1960.
- FRANÇA, F. V. *Verificação da Adequação do Esquema Numérico de MacCormack na Solução de Transientes Hidráulicos em Conduitos Forçados*. Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Mestre em Engenharia. São Paulo, 2006.
- FRANÇA, F. V. *Transitório Hidráulico com Tensão de Cisalhamento na Parede do Conduto Modelada por Gradiente Harmônico de Pressão*. Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Mestre em Engenharia. São Paulo, 2006.
- GUIDAOUI, M. S.; MANSOUR, S. *Efficient treatment of the varyd-brown unsteady shear in pipe transients*. Journal of Hydraulic Engineering. v. 108, n. 11, p. 102-112, 2002.
- LANDAU, L. D., LIFSHITZ, E. M. *Fluid Mechanics*. Pergamo Press. Oxford. 2ª ED. 539p, 1989.
- LIMA, L. F. *Termo de atrito em escoamento transitório para condutos forçados*. Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Doutor em Engenharia. São Paulo, 2006.
- MACCORMACK, R. W. *A Perspective on a Quarter Century of CFD Research*. American Institute of Aeronautics and Astronautics. n. 93-3291-CP, 1993.
- PEZZINGA, G. *Quasi-2D Model Unsteady Flow in Pipe Networks*. Journal of Hydraulic Engineering, ASCE. V 125, pp 667 – 685. 1999.
- WYLIE, E. B. ; STREETER, V. L. *Fluid Transients*. New York, McGraw-Hill Book Company, 1978.
- WOMERSLEY, J. R. *Method for than Calculation of Velocity, Rate of Flow and Viscous Drag in Arteries when Pressure Gradient is Know*. J. Phhyiol. London. N. 127, P.P. 553 – 563, 1955.