

AVALIAÇÃO DA APLICABILIDADE DE UM MODELO SIMPLIFICADO INERCIAL PARA PROPAGAÇÃO DE VAZÃO EM CANAIS

Fernando Mainardi Fan^{1}; Walter Collischonn²; Paulo Monteiro Rógenes Pontes³; Rodrigo Cauduro Dias de Paiva⁴*

Resumo – Representar da melhor maneira possível o processo de propagação de ondas de cheia em rios é fundamental para diversos estudos de hidrologia. Recentemente, um modelo desenvolvido com base na simplificação das equações de Saint-Venant por eliminação do termo advectivo, resultando em uma formulação explícita, tem chamado a atenção para a simulação bidimensional do escoamento em planícies de inundação. Este trabalho tem como objetivo verificar se este modelo, chamado de “inercial”, também pode ser utilizado para a simulação unidimensional de canais na comparação com dois métodos tradicionais. Foram avaliadas as influências das variáveis Δx , Δt , S_0 , n , L sob o hidrograma propagado, onde para cada caso foi verificada a estabilidade do modelo, a conservação de volume, e os hidrogramas foram comparados aos dos métodos tradicionalmente utilizados Muskingum-Cunge (MCL) e Muskingum-Cunge Não-Linear (MCNL). Para cada teste foi computada a condição de Courant-Freidrichs-Levy e o número de Froude, com o objetivo de definir condições de aplicabilidade do método. Como resultado, conclui-se que o modelo inercial é aplicável para a simulação de canais na comparação com a aplicação dos modelos tradicionais MCL e MCNL (principalmente ao último). Contudo, devem ser observados alguns critérios, dados principalmente pela condição de Courant-Freidrichs-Levy, e são sugeridos outros testes.

Palavras-Chave – Propagação de vazão; Simulação Hidrológica, Modelo Inercial

EVALUATION OF THE USE OF A SIMPLIFIED INERTIAL MODEL TO THE PROPAGATION OF FLOW IN CHANNELS

Abstract – Representing the best way possible the process of wave propagation is fundamental to various hydrological studies. Recently, a model developed based on a simplification of the Saint-Venant equations by eliminating the advective term, resulting in an explicit formulation, has drawn the attention for propagation of floodplains flows in a two-dimensional base. This study aims to verify if this model, called "inertial", can be used for the simulation of one-dimensional channels, in comparison to traditional methods. We assessed the influence of the variables Δx , Δt , S_0 , n , L , where in each case was verified the stability of the inertial model, the volume conservation and resulting hydrographs were compared to Muskingum-Cunge (MCL) and Muskingum-Cunge Nonlinear (MCNL) results, which are classic methods. Courant-Freidrichs-Levy condition and Froude number of the flow were computed in order to parameterize the observed results and define applicability conditions. As a general result, it is concluded that the inertial model is applicable to the simulation of channels propagation with similar results to the application of the traditional models MCL and MCNL (mostly the latter). However, some criteria must be met for the use of the inertial model, especially based on the Courant-Freidrichs-Levy condition, and other tests are suggested.

Keywords – Flow Routing, Hydrologic Simulation, Inertial Model

¹ Doutorando no Instituto de Pesquisas Hidráulicas (IPH) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS); fernando.fan@ufrgs.br

² Professor adjunto do IPH/UFRGS; collischonn@iph.ufrgs.br

³ Doutorando no IPH/UFRGS; p.rogenes@gmail.com,

⁴ Pesquisador e Doutor pelo IPH/UFRGS; rodrigocpaiva@gmail.com

* Autor Correspondente

INTRODUÇÃO

Entender e representar da melhor maneira possível o processo de escoamento da água em rios é de grande importância para diversos estudos hidrológicos. Para tanto, geralmente utilizam-se as equações de Saint-Venant, exigindo grande quantidade de dados e capacidade computacional, ou equações simplificadas, que possuem uma série de limitações como, por exemplo, não representação de efeitos de jusante ou planícies de inundação (Chow et al., 1988; Fread, 1993; Tucci, 2005; Paiva et al., 2012; Pontes & Collischonn, 2012).

Recentemente, Bates et al. (2010) apresentaram uma simplificação das equações de Saint-Venant com interesse na modelagem de planícies de inundação, negligenciando apenas o termo de advecção da equação de conservação de movimento de Saint-Venant. O sistema de equações diferenciais parciais resultante é referido normalmente na literatura como modelo “inercial simplificado”, “inercial local”, ou simplesmente “inercial” (Bates et al, 2010; Almeida et. al., 2012). Em comparação com outras simplificações das equações de Saint-Venant, que negligenciam completamente o termo de inércia, esta simplificação possui vantagens na aplicação de métodos numéricos, com uma estabilidade alta que permite a aplicação de métodos explícitos, principalmente para grades refinadas, representando um ganho computacional de interesse para a simulação de planícies (Almeida et al., 2012)

A dedução completa das equações a partir da equação diferencial inercial pode ser encontrada em Bates et al. (2010) e Almeida et al. (2012). Abaixo, são reproduzidas as versões explícitas finais do equacionamento, a ser aplicado para a simulação sobre superfície constituída de células computacionais:

$$\frac{t+\Delta t h^{ij} - t_h^{ij}}{\Delta t} = \frac{t_{Q_x^{i-1j}} - t_{Q_x^{ij}} + t_{Q_y^{ij-1}} - t_{Q_y^{ij}}}{\Delta x \Delta y} \quad (1)$$

$$q_{t+\Delta t}^{i-1/2} = \frac{q_t^{i-1/2} - g h_f \frac{\Delta t}{\Delta x} [(h_t+z)^i - (h_t+z)^{i-1}]}{(1+g\Delta t n^2 |q_t^{i-1/2}| / h_f^{7/3})} \quad (2)$$

Sendo h a altura da lâmina de água na célula em metros; Q a vazão entre duas faces de células em m^3/s , q a vazão sobre unidade de largura entre duas faces de células em m^2/s ; g a aceleração da gravidade em m/s^2 , h_f a máxima diferença entre $Max[(h+z)^i, (h+z)^{i-1}]$ e $Max[z^i, z^{i-1}]$ em metros, n o coeficiente de rugosidade de manning, Δx o comprimento da célula em metros e Δt é o passo de tempo de cálculo em segundos. O índice i denota espaço.

Na aplicação das equações para a simulação de planícies, a Equação 2 é utilizada para computar o fluxo entre as células em todas as direções (onde Δx é igual a um Δy para o fluxo em sentido transversal, considerando que as células são regulares), e a Equação 1 atualiza a altura de água com base nos fluxos computados nas diferentes direções.

Segundo os autores, este método numérico resultante é relativamente simples e extremamente eficiente do ponto de vista computacional, representando um excelente compromisso entre precisão e performance para a simulação do fluxo em planícies gradualmente variado no tempo e em regime subcrítico (Bates et al., 2010; Almeida et al. (2012).

A partir do exposto, apesar de ter sido desenvolvido para a solução de propagação em planícies, nota-se no modelo explícito de Bates um grande potencial para possíveis aplicações na simulação de propagação em trechos de rio, onde se pode considerar o sentido longitudinal do escoamento como predominante.

Caso a utilização desta formulação do modelo inercial se apresentar como possível de ser utilizada para a propagação de cheias em trechos de rio, uma ferramenta simples de ser utilizada para a análise de propagação de vazões se mostrará disponível, com uma solução explícita, e que pode representar também efeitos de jusante, o que significa um ganho em relação às formulações simplificadas atualmente utilizadas.

Desta forma, o objetivo do presente estudo é responder aos seguintes questionamentos: (i) É possível utilizar o modelo inercial simplificado apresentado por Bates et al. (2010) para a simulação de canais, como um modelo de propagação de cheias? (ii) Se sim, quais são os critérios gerais de aplicabilidade e estabilidade do método?

METODOLOGIA

Para a verificação da aplicabilidade do modelo inercial foi realizado um experimento numérico de propagação de uma onda de cheia em um canal retangular definido. O hidrograma de entrada propagado foi gerado a partir do equacionamento do hidrograma sintético NERC (1975) apud Todini (2007), dado por:

$$Q(t) = Q_{base} + (Q_{pico} - Q_{base}) \cdot \left[\frac{t}{T_p} \cdot \exp\left(1 - \frac{t}{T_p}\right) \right]^\beta \quad (3)$$

Sendo: $Q_{base} = 5 \text{ m}^3/\text{s}$; $Q_{pico} = 300 \text{ m}^3/\text{s}$; $T_p = 96$, horas e $\beta = 10$ (Parâmetro de curvatura do hidrograma). As características de referência do canal simulado são: $B = 30\text{m}$; $L = 50\text{km}$; $S_0 = 0.0007 \text{ m/m}$; $n = 0.045$; Os parâmetros de referência e condições iniciais utilizadas no modelo são: $\Delta x = 2000 \text{ m}$; $\Delta t = 60 \text{ s}$ e vazão de $5 \text{ m}^3/\text{s}$, que correspondem a uma profundidade de 2,2 metros.

Foram apuradas as seguintes condições nos resultados da propagação com o modelo inercial: (i) Estabilidade numérica da solução adotada; (ii) Conservação de volume do método; e (iii) Comparação com outros métodos de propagação de vazão.

Para a realização destas verificações, o experimento numérico consistiu na alteração sistemática dos parâmetros S_0 , n , Δx , Δt e L , mantendo os demais parâmetros fixados, onde as condições de cada teste foram compiladas e analisadas. A estabilidade numérica de cada simulação foi verificada a partir da existência de instabilidades visuais nos resultados, onde também foi computado o maior número da condição de Courant-Levy-Strauss (Cr) e o maior número de Froude (F) de cada caso simulado. Para a verificação da conservação de volume dos métodos foi verificada a diferença entre o volume do hidrograma de entrada (montante) e o volume do hidrograma após a propagação (jusante).

Por fim, os hidrogramas propagados também foram comparados com os obtidos com a propagação através dos métodos de Muskingum-Cunge Linear (MCL) e Não-Linear (MCNL), com o objetivo de verificar a similaridade entre os resultados do modelo inercial e estes métodos tradicionalmente utilizados. Para as comparações foram apurados os tempos de deslocamento (t_i , t_{vp} e t_f), ascensão (t_a), recessão (t_r), e vazão de pico (Q_p) do hidrograma propagado. A Figura 01 apresenta uma ilustração das variáveis monitoradas. Elas foram computadas para todas as técnicas de propagação. Como vazão de referência (Q_{ref}) para a determinação do início e final das ondas de cheia foi escolhido o valor de $10\text{m}^3/\text{s}$.

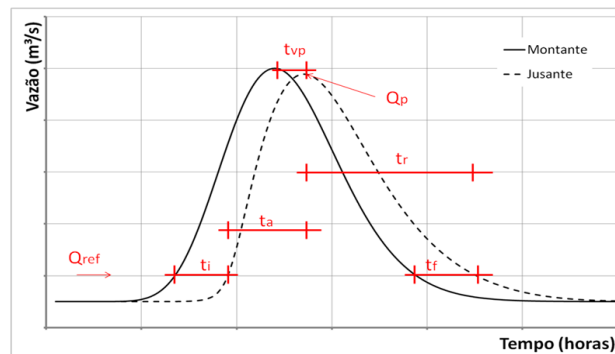


Figura 01. Variáveis computadas para comparação dos hidrogramas propagados. Sendo: t_i o tempo de início do hidrograma; t_a o tempo de ascensão do hidrograma; t_{vp} o tempo de viagem do pico do hidrograma; t_r o tempo de recessão do hidrograma; t_f o tempo de fim do hidrograma; Q_p a vazão de pico do hidrograma; e Q_{ref} a vazão de referência do hidrograma.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

A seguir, são apresentados os resultados obtidos com cada teste realizado, em conjunto com uma breve discussão.

Análise de Variação do Δx

Os valores de Δx testados variaram entre 500m e 10000m. A condição de Courant-Freidrichs-Levy variou entre 0,82 e 0,04 e o número de Froude para todos os casos foi de 0,31. Nos testes com a variação do parâmetro Δx não foram verificadas instabilidades na solução numérica adotada. A Tabela 1 apresenta os resultados dos parâmetros de verificação calculados para cada escoamento propagado.

De uma forma geral, o hidrograma inercial e o MCNL se aproximaram, com Q_p uma hora defasada. Em comparação com o MCL o hidrograma do modelo inercial se apresentou como mais rápido na ascensão (t_a) e mais lento na recessão (t_r), com a vazão de pico ocorrendo duas horas antes. A Figura 02 apresenta a comparação entre os hidrogramas obtidos para $\Delta x=2000m$.

Tabela 1. Resultados dos testes de propagação variando Δx .

Modelo	Δx	Cr	F	Q_p	t_i	T_a	t_{vp}	t_r	t_f	$E.vol$
	m	-	-	m³/s	h	H	h	h	h	%
MCL	500	0,82	0,31	299,6	5	63	6	115	6	0,0
	1000	0,41	0,31	299,6	5	63	6	115	6	0,0
	2000	0,20	0,31	299,6	5	63	6	115	6	0,0
	5000	0,08	0,31	299,6	5	63	6	115	6	0,0
	10000	0,04	0,31	299,6	5	63	6	115	6	0,0
MCNL	500	0,82	0,31	299,6	14	54	5	126	16	0,4
	1000	0,41	0,31	299,6	14	54	5	126	16	0,4
	2000	0,20	0,31	299,6	14	54	5	126	16	0,4
	5000	0,08	0,31	299,6	14	54	5	126	16	0,4
	10000	0,04	0,31	299,6	14	54	5	126	16	0,4
INERCIAL	500	0,82	0,31	299,8	15	52	4	126	15	0,0
	1000	0,41	0,31	299,8	15	52	4	126	15	0,0
	2000	0,20	0,31	299,7	15	52	4	126	16	0,0
	5000	0,08	0,31	299,6	14	53	4	126	16	0,0
	10000	0,04	0,31	299,4	13	54	4	127	16	0,0

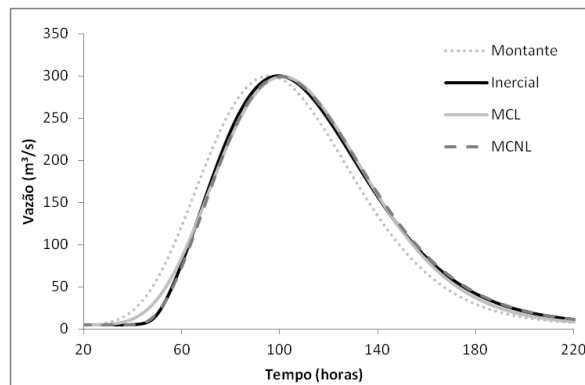


Figura 02. Comparação entre os hidrogramas obtidos para $\Delta x=2000m$.

Análise de Variação do Δt

Os valores de Δt testados variaram entre 30s e 360s, onde a condição de Courant-Freidrichs-Levy variou entre 0,10 e 1,22. Nos testes foram verificadas instabilidades na solução numérica adotada para valores de Δt maiores que 240s, o que correspondeu a valores de Cr maiores que 0,82. Isto representa a primeira limitação verificada para o uso do método (valores menores do que 1 são recomendados no trabalho onde o método é descrito). A Figura 03 apresenta a instabilidade verificada para $\Delta t = 270s$ e a Tabela 2 apresenta os resultados dos parâmetros de verificação calculados para os casos onde foi possível calcular a propagação ($\Delta t \leq 240s$).

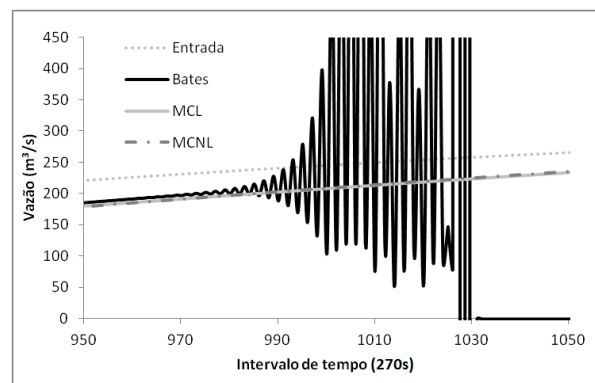


Figura 03. Instabilidade verificada no modelo inercial para $\Delta t = 270s$ (condição de Courant-Freidrichs-Levy igual a 0,94).

Tabela 2. Resultados dos testes de propagação variando Δt .

Modelo	Δt	Cr	F	Qp	t_i	Ta	tp	tr	tf	$E.vol$
	s	-	-	m^3/s	h	H	h	h	h	%
MCL	30	0,10	0,31	299,6	5	63	6	115	6	0,0
	45	0,15	0,31	299,6	5	63	6	115	6	0,0
	60	0,20	0,31	299,6	5	63	6	115	6	0,0
	90	0,31	0,31	299,6	5	63	6	115	6	0,0
	180	0,61	0,31	299,6	6	63	6	115	6	0,0
	240	0,82	0,31	299,6	6	63	6	115	6	0,0
MCNL	30	0,10	0,31	299,6	14	54	5	126	16	0,4
	45	0,15	0,31	299,6	14	54	5	126	16	0,4
	60	0,20	0,31	299,6	14	54	5	126	16	0,4

	90	0,31	0,31	299,6	14	54	5	126	16	0,3
	180	0,61	0,31	299,6	14	54	5	126	16	0,4
	240	0,82	0,31	299,6	14	54	5	126	16	0,3
INERCIAL	30	0,10	0,31	299,7	15	52	4	126	16	0,0
	45	0,15	0,31	299,7	15	52	4	126	16	0,0
	60	0,20	0,31	299,7	15	52	4	126	16	0,0
	90	0,31	0,31	299,7	15	52	4	126	16	0,0
	180	0,61	0,31	299,7	15	52	4	126	16	0,0
	240	0,82	0,31	299,7	15	52	4	126	16	0,0

A partir da Tabela 2, em comparação com o modelo MCL, verifica-se que o hidrograma inercial chega cerca de 10 horas depois (t_i), tem uma subida mais rápida (t_a) e uma descida mais alongada (t_r). Além disso, a vazão de pico foi computada pelo modelo inercial cerca de duas horas antes (t_{vp}) e com um valor de Q_p um pouco maior. Já em comparação com o método MCNL, é possível afirmar que ambos os modelos resultam em hidrogramas próximos, com a diferença que o modelo inercial foi cerca de duas horas mais rápido na ascensão e uma hora no tempo de pico do hidrograma (com valores de Q_p também um pouco mais elevados).

Análise de Variação do Coeficiente de Rugosidade de Manning (n)

Os valores de n testados variaram entre 0,01 e 0,07, onde a condição de Courant-Freidrichs-Levy variou entre 0,14 e 0,23 e o número de Froude entre 0,96 e 0,17. A tabela 3 apresenta os resultados dos parâmetros de verificação para os métodos utilizados.

Tabela 3. Resultados dos testes de propagação variando n .

Modelo	n	Cr	F	Q_p	T_i	T_a	t_{vp}	t_r	t_f	$E.vol$
	-	-	-	m ³ /s	H	H	h	h	h	%
MCL	0,01	0,14	0,96	299,9	2	63	2	115	2	0,0
	0,02	0,17	0,52	299,9	4	63	4	115	4	0,0
	0,035	0,20	0,31	299,6	5	63	6	115	6	0,0
	0,045	0,22	0,25	299,3	6	63	7	115	7	0,0
	0,055	0,23	0,21	299	7	63	8	115	8	0,0
	0,07	0,25	0,17	298,3	9	64	9	115	10	0,0
MCNL	0,01	0,14	0,96	299,9	7	58	2	120	7	0,1
	0,02	0,17	0,52	299,9	10	56	3	123	11	0,2
	0,035	0,20	0,31	299,6	14	54	5	126	16	0,4
	0,045	0,22	0,25	299,3	16	53	6	128	19	0,5
	0,055	0,23	0,21	298,9	17	53	7	129	22	0,6
	0,07	0,25	0,17	298,1	19	52	9	131	25	0,8
INERCIAL	0,01	0,14	0,96	300	7	58	2	120	7	0,0
	0,02	0,17	0,52	299,9	11	55	3	123	11	0,0
	0,035	0,20	0,31	299,7	15	52	4	126	16	0,0
	0,045	0,22	0,25	299,6	17	51	5	128	18	0,0
	0,055	0,23	0,21	299,4	18	50	5	130	20	0,0
	0,07	0,25	0,17	299,2	21	48	6	132	24	0,0

Nos testes de avaliação da propagação em função do atrito verificou-se que os hidrogramas resultantes do modelo inercial e do modelo MCNL são muito semelhantes para locais com baixo atrito ($n \leq 0,035$, onde também ocorrem os menores valores de Cr), já para locais com atrito mais elevado o comportamento do modelo inercial apresentou vazão de pico adiantada em cerca de duas

horas, além de Q_p mais elevada. Em relação à comparação com o método MCL, o modelo inercial apresenta uma onda de cheia mais lenta na chegada e com ascensão mais veloz, com adiantamento do pico. O modelo MCL possui uma recessão mais rápida e o modelo inercial uma recessão mais prolongada.

Análise de Variação da Declividade de Fundo do Canal (S_0)

Os valores de S_0 testados variaram entre 0,0001 e 0,005, com condição de Courant-Freidrichs-Levy entre 0,27 e 0,15 e número de Froude entre 0,13 e 0,76. A Tabela 4 apresenta os resultados dos parâmetros de verificação para os métodos utilizados.

Tabela 4. Resultados dos testes de propagação variando S_0 .

Modelo	S_0	Cr	F	Q_p	t_i	t_a	t_{vp}	t_r	t_f	$E.vol$
	m/m	-	-	m ³ /s	h	h	h	h	h	%
MCL	0,0001	0,27	0,13	279,8	6	69	11	119	16	0,0
	0,00025	0,24	0,20	296,8	7	64	8	115	9	0,0
	0,0007	0,20	0,31	299,6	5	63	6	115	6	0,0
	0,001	0,19	0,37	299,8	5	63	5	115	5	0,0
	0,002	0,17	0,50	299,9	4	63	4	115	4	0,0
	0,005	0,15	0,76	300	3	63	3	115	3	0,0
MCNL	0,0001	0,27	0,13	276,5	18	56	11	136	32	-1,3
	0,00025	0,24	0,20	296,4	17	53	8	130	23	0,4
	0,0007	0,20	0,31	299,6	14	54	5	126	16	0,4
	0,001	0,19	0,37	299,8	13	55	4	125	15	0,3
	0,002	0,17	0,50	299,9	10	56	3	123	12	0,3
	0,005	0,15	0,76	300	8	57	3	121	9	0,1
INERCIAL	0,0001	0,27	0,13	295,3	21	49	7	137	30	0,0
	0,00025	0,24	0,20	298,8	18	50	5	131	21	0,0
	0,0007	0,20	0,31	299,7	15	52	4	126	16	0,0
	0,001	0,19	0,37	299,8	13	53	4	125	14	0,0
	0,002	0,17	0,50	299,9	11	55	3	123	11	0,0
	0,005	0,15	0,76	299,9	8	57	2	121	9	0,0

De uma forma geral, é observada uma grande semelhança entre os hidrogramas propagados pelo modelo inercial e pelo modelo MCNL, onde a principal diferença é a subida um pouco mais rápida com Q_p um pouco adiantada do modelo inercial. Em comparação com o modelo MCL, para as declividades altas e médias é observado o mesmo comportamento que nos testes anteriores, onde o modelo inercial apresenta uma chegada da mais atrasada da onda de cheia e uma ascensão mais veloz do hidrograma, com adiantamento do pico. Também, a recessão do modelo inercial é mais prolongada.

CONCLUSÕES

Como resultado geral das análises comparativas foi verificado que o hidrograma propagado pelo modelo inercial é similar ao do modelo MCNL, mas com o início da onda de cheia brevemente mais demorado e ascensão mais rápida, resultando em um pico levemente adiantado. Em comparação com o modelo MCL, o modelo inercial apresenta um hidrograma mais assimétrico, com uma subida mais rápida (início também mais tardio) e uma recessão mais alongada. Porém,

todas as diferenças averiguadas constituem-se de aproximadamente algumas horas de escoamento, onde nenhum dos métodos pode ser tratado como uma verdade absoluta de referência. Além disso, o modelo inercial se apresentou como 100% conservativo.

Desta forma, como o modelo inercial apresentou resultados próximos aos modelos MCL e MCNL, tradicionalmente utilizados para a propagação de ondas de cheias, além da propriedade de conservação de massa, a resposta para as perguntas-objetivo deste trabalho é que o modelo inercial é aplicável para a simulação da propagação de vazão em canais, com resultados próximos ao da aplicação dos modelos tradicionais MCL e MCNL (principalmente ao último). Contudo, devem ser observados alguns critérios para a utilização do modelo, dados principalmente pela condição de Courant-Freidrichs-Levy, onde a solução adotada se mostrou instável para valores da condição maiores que 0,82.

Ainda, é possível afirmar que valores menores da condição de Courant-Freidrichs-Levy devem ser adotados caso seja desejado um hidrograma mais suavizado na subida e semelhante ao hidrograma do método MCNL, onde valores menores ou iguais a 0,20 são sugeridos através dos testes. Estes resultados podem estar relacionados à dispersão numérica. É importante destacar que todas as afirmações e constatações estão condicionadas às condições do experimento realizado e aos limites testados para cada variável de análise.

Devido à aplicabilidade apresentada pelo modelo inercial para a simulação da propagação de cheias em canais, pretende-se dar continuidade a pesquisa, onde serão realizados os seguintes testes: (i) verificação da aplicabilidade de outras formulações do modelo inercial, sugeridas por Almeida et al. (2012); (ii) Comparação do modelo inercial com modelo hidrodinâmico completo; (iii) implementação do modelo inercial em um modelo hidrológico de grande-escala.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, G. A. M. DE, P. BATES, J. E. FREER, AND M. SOUVIGNET (2012), Improving the stability of a simple formulation of the shallow water equations for 2-D flood modeling, *Water Resources. Research.*, 48, W05528, doi:10.1029/2011WR011570.
- BATES, P. D., M. S. HORRITT, AND T. J. FEWTRELL (2010), A simple inertial formulation of the shallow water equations for efficient two-dimensional flood inundation modelling, *Journal of Hydrology.*, 387, 33–45, doi:10.1016/j.jhydrol.2010.03.027.
- CHOW, V.T, D.R. MAIDMENT AND L.W. MAYS (1988), *Applied Hydrology*, McGraw-Hill Inc., New York, 1988.
- FREAD D.L. (1993), Flow Routing in *Handbook of Hydrology*, ed. by D.R. Maidment, McGraw-Hill Inc., New York, 10.1-10.36.
- PAIVA, R. C. D., COLLISCHONN, W. AND BUARQUE, D. C. (2012), Validation of a full hydrodynamic model for large-scale hydrologic modelling in the Amazon. *Hydrological Processes*. doi: 10.1002/hyp.8425.
- PONTES, P. R. M.; COLLISCHONN, W., (2012). Conservação de volume em modelos simplificados de propagação de vazão. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*. Porto Alegre, (In Press).
- TUCCI, C. E. M. (2005). *Modelos Hidrológicos*; colaboração da Associação Brasileira de Recursos Hídricos/ABRH. — 2.ed. — Porto Alegre: Editora da UFRGS.