

MODELAGEM MULTIVARIADA DAS VAZÕES AFLUENTES ÀS USINAS HIDRELÉTRICAS BRASILEIRAS

Daniel H. M. Detzel^{1}; Miriam Rita Moro Mine²; Marcelo R. Bessa³; Claudio Andres Villegas Vallejos⁴; Márcio Luis Bloor⁵; Carlos Fernando Bley Carneiro⁶*

Resumo – A modelagem de grandes sistemas hídricos mostra-se desafiadora à medida que se aumentam a complexidade e o número de variáveis envolvidas. O caminho comumente encontrado é empregar simplificações como, por exemplo, agregação de reservatórios que operam em uma mesma região. No entanto, estas simplificações podem omitir características importantes do sistema, tornando-o pouco flexível e colocando em risco a confiabilidade dos resultados. No presente artigo, apresenta-se um método alternativo para modelagem de séries de vazões, baseado em formulação CARMA. O modelo é aplicado com sucesso às vazões mensais das 146 usinas hidrelétricas que compõem o Sistema Elétrico Brasileiro, sendo capaz de reproduzir estatísticas de curto e longo termos, além de preservar as correlações espaciais entre as usinas.

Palavras-Chave – modelo contemporâneo, séries sintéticas mensais, usinas hidrelétricas

STREAMFLOW MULTIVARIATE MODEL FOR BRAZILIAN HYDROPOWER PLANTS

Abstract – Modeling large water systems proves to be challenging as the complexity and the number of variables involved increase. It is common to employ simplifications as, for example, aggregation of reservoirs that operate on the same region. However, these simplifications may omit important system features, making it inflexible and jeopardizing the results reliability. In this paper, it is presented an alternative method for modeling streamflow series, based on CARMA formulation. The model is successfully applied to monthly streamflow from 146 hydroelectric plants that comprise the Brazilian Electric System, being able to reproduce short and long terms statistics and preserves the spatial correlations among the plants.

Keywords – contemporaneous model, synthetic streamflow series, hydropower plants

INTRODUÇÃO

Modelos estocásticos para geração de séries sintéticas de vazões tiveram uso crescente a partir do momento em que se percebeu que a série histórica sozinha era insuficiente para o planejamento apropriado de sistemas de recursos hídricos. Desde os estudos pioneiros de Thomas e Fiering (1962) e Matalas (1967), diversas técnicas de geração foram desenvolvidas e aplicadas a séries de vazões de diferentes escalas temporais. Em comum, a grande maioria se baseia em métodos clássicos do tipo Box & Jenkins (ou modelos ARIMA, Box *et al.*, 1994), a fim de modelar apropriadamente a estrutura de correlações inerente às afluições de um rio.

¹ Pesquisador no LACTEC . BR-116, Km 98, Nº 8813 – Centro Politécnico da UFPR, 81531-980 Curitiba. E-mail: daniel@lactec.org.br

² Professora Associada da UFPR, Centro Politécnico, Jardim das Américas, Curitiba. E-mail: mrmine.dhs@ufpr.br

³ Pesquisador no LACTEC. BR-116, Km 98, Nº 8813 – Centro Politécnico da UFPR, 81531-980 Curitiba. E-mail: bessa@lactec.org.br

⁴ Pesquisador no LACTEC. BR-116, Km 98, Nº 8813 – Centro Politécnico da UFPR, 81531-980 Curitiba. E-mail: claudioav@lactec.org.br

⁵ Pesquisador na COPEL. R. José Izidoro Biazzetto, 158 - Santo Inácio, 81200-240 Curitiba. E-mail: mlbloor@copel.com

⁶ Pesquisador na COPEL. R. José Izidoro Biazzetto, 158 - Santo Inácio, 81200-240 Curitiba. E-mail: carlos.bley@copel.com .

* Autor Correspondente

Em se tratando de séries mensais, a sazonalidade é um elemento extra de grande importância a ser considerado. Para tanto, a geração pode ser feita utilizando modelos do tipo PARMA ou SARIMA, que contam com um grupo de parâmetros específicos para representação da sazonalidade (Mondal e Wasimi, 2006; Haltiner e Salas, 1988). Alternativamente, podem-se gerar séries anuais e submetê-las a métodos de desagregação (Mejia e Rousselle, 1976; Pereira *et al.*, 1984). Independentemente da técnica escolhida, o uso dos modelos Box & Jenkins possui eficiência comprovada na modelagem de vazões mensais (Castellano-Méndez *et al.*, 2004).

No Brasil, a geração de energia elétrica está sujeita às variações sazonais de diferentes regiões hidrológicas, pois em torno de 85% da energia provém de usinas hidrelétricas. Esta característica agrega elevado grau de incerteza ao planejamento do sistema, justificando por si só o seu estudo. Na intenção de contornar o problema da dimensão e complexidade do Sistema Elétrico Brasileiro (SEB), o planejamento de médio-longo prazo (horizonte de 60 meses) é feito através de uma técnica de agregação de reservatórios (Arvanitidis e Rosing, 1970), na qual usinas instaladas em uma mesma região hidrológica são representadas por um reservatório equivalente de energia (CEPEL, 1999). Dessa forma, considera-se o SEB constituído por quatro subsistemas: Sudeste/Centro Oeste, Sul, Nordeste e Norte. As vazões mensais às usinas são também agregadas e tratadas como energias naturais afluentes através de um modelo do tipo PAR.

Entende-se que a agregação em sistemas equivalentes é uma simplificação necessária a certos sistemas para tornar viável seu planejamento, contudo omite características individuais das usinas e peculiaridades hidrológicas das bacias nas quais elas operam. Como solução alternativa, propõe-se neste artigo a modelagem individual das vazões mensais afluentes às usinas do SEB através da formulação CARMA, ou autorregressiva com médias móveis contemporânea. Para manter a parcimônia do modelo, a sazonalidade e estacionariedade estatística das séries são tratadas à parte.

O restante do artigo está organizado da seguinte forma: o próximo item e seus subitens descrevem o modelo utilizado para gerar as séries. Na sequência é apresentada uma descrição sucinta do sistema utilizado e suas características hidrológicas, seguidas dos resultados e da conclusão do artigo.

MATERIAIS E MÉTODOS

Descrição do modelo de geração

A geração dos cenários sintéticos mensais de vazão se deu por meio de um modelo estocástico linear, não periódico, multivariado do tipo CARMA, ou autorregressivo com médias móveis contemporâneo. Sejam os vetores de vazões $\mathbf{Z}_t = (Z_{t1}, Z_{t2}, \dots, Z_{tk})'$ e resíduos $\mathbf{a}_t = (a_{t1}, a_{t2}, \dots, a_{tk})'$, definidos para k usinas no tempo t . O modelo CARMA(p, q) é dado, genericamente, pela equação (1):

$$\boldsymbol{\varphi}_i(B)\mathbf{Z}_{ti} = \boldsymbol{\theta}_i(B)\mathbf{a}_{ti}, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (1)$$

onde $\boldsymbol{\varphi}_i$ é o i -ésimo operador AR de ordem p ($p = \max(p_1, \dots, p_k)$), sendo $\boldsymbol{\varphi}_i(B) = 1 - \varphi_{i1}B - \varphi_{i2}B^2 - \dots - \varphi_{ip}B^p$. Da mesma forma, $\boldsymbol{\theta}_i$ é o i -ésimo operador MA de ordem q ($q = \max(q_1, \dots, q_k)$), sendo $\boldsymbol{\theta}_i(B) = 1 - \theta_{i1}B - \theta_{i2}B^2 - \dots - \theta_{iq}B^q$. O operador B representa as defasagens do modelo, de tal forma que $B^L z = z_{t-L}$ e $B^L a = a_{t-L}$. Para respeitar as respectivas condições de estacionariedade e invertibilidade da formulação (Box *et al.*, 1994), $\boldsymbol{\varphi}_i(B) = 0$ e $\boldsymbol{\theta}_i(B) = 0$ devem permanecer fora do círculo unitário. Por fim, assume-se o vetor de resíduos

independentes e normalmente e distribuídos $\mathbf{a}_t \sim NID(0, \Delta)$, sendo Δ a matriz de variância-covariância de \mathbf{a}_t .

A principal diferença da formulação CARMA para um modelo ARMA multivariado tradicional reside no fato de que as matrizes de parâmetros do modelo contemporâneo são diagonais. Assim, ele respeita, além das estatísticas básicas, as autocorrelações individuais de cada série histórica. A correlação espacial é preservada sucintamente (*lag zero*) através do vetor de resíduos, modelado a partir da equação (2):

$$\mathbf{a}_t = \Lambda \boldsymbol{\varepsilon}_i \quad (2)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ é um vetor de variáveis aleatórias normais independentes e identicamente distribuídas $\boldsymbol{\varepsilon}_i \sim NIID(0, 1)$ e Λ é uma matriz-parâmetro de tamanho $k \times k$.

Para o ajuste do modelo, aplicou-se transformação logarítmica às séries de vazões, suficientes para estabilizar suas variâncias e aproximá-las de uma distribuição gaussiana (Kelman *et al.*, 1987). Ademais, a sazonalidade das séries foi removida através de padronização individual por média e desvio padrão (Hipel e McLeod, 1994). Como mencionado anteriormente, esse procedimento foi empregado em detrimento do uso de um modelo periódico na intenção de manter o modelo final parcimonioso.

Identificação do modelo

Guardadas as dimensões da área de estudo, os modelos foram identificados empregando-se os chamados Critérios de Informação, que são funções matemáticas estruturadas de forma a confrontar o ajuste oferecido pelo modelo com o número de parâmetros utilizado por ele. Neste artigo, optou-se por usar o Critério de Informação Bayesiano (BIC – Schwartz, 1978), definido através da equação (3):

$$BIC = -2 \ln L(r) + \ln nr \quad (3)$$

onde $L(r)$ é a função de verossimilhança para r parâmetros e n é o número de elementos da série. A equação (3) é aplicada para todos os modelos candidatos e a formulação escolhida é a que apresentar o mínimo BIC. Para o presente trabalho, cinco modelos foram testados para cada série: CAR(1), CAR(2), CARMA(1,1), CARMA(2,1) e CARMA(2,2). A restrição de ordem máxima dois se deu por ela ser suficiente para o ajuste de modelos lineares a séries estacionárias (Box *et al.*, 1994).

Estimação dos parâmetros do modelo

Ao utilizar matrizes diagonais de parâmetros para as porções AR e MA, o modelo contemporâneo permite que sejam estimados parâmetros de forma isolada para cada série. Dessa maneira, aplicou-se o método da máxima verossimilhança de forma individual a cada usina, utilizando a função de log-verossimilhança mostrada na equação (4):

$$\ln L(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta}) = -n \ln \sigma_a^2 - \frac{S(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta})}{2\sigma_a^2} \quad (4)$$

onde σ_a^2 é a variância da série de resíduos e $S(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta})$ é a função soma dos quadrados dos resíduos. Para que sejam respeitadas as condições de estacionariedade de invertibilidade do modelo, restrições específicas são impostas aos parâmetros (ver Box *et al.*, 1994).

A geração do campo especial correlacionado é feita através da matriz-parâmetro Λ , mostrada na equação (2). Para tanto, pode-se estimá-la buscando solução para a equação (5):

$$\Lambda\Lambda' = M \quad (5)$$

De acordo com Salas *et al.* (1980) qualquer solução que satisfaça a equação (5) é uma solução válida. No presente estudo, primeiramente estimou-se a matriz M substituindo-a pela matriz de correlações cruzadas dos resíduos (Matalas, 1967). Na sequência, aplicou-se a decomposição de Cholesky sobre M , resultando na matriz triangular Λ . Ressalta-se que este procedimento é válido somente para matrizes M positivo-definidas.

Validação do modelo

Seguindo recomendações de Haltiner e Salas (1988), o modelo foi validado em três etapas: (i) validação teórica, (ii) validação de estatísticas de curto termo e (iii) validação de estatísticas de longo termo. A primeira etapa se refere às propriedades dos resíduos obtidos com o modelo ajustado. Foram feitas inferências acerca dos pressupostos adotados para os resíduos na teoria de Box & Jenkins: independência temporal e espacial, homocedasticidade e distribuição aproximadamente normal.

A segunda e terceira etapas tratam de verificações comparativas entre as séries históricas e sintéticas geradas. Na segunda, a intenção é somente validar a implementação computacional do método, pois estes valores foram utilizados na construção e estimação do modelo. Determinaram-se médias, variâncias, coeficientes de assimetria, autocorrelações de *lags* 1 e 2 e a matriz de correlações espaciais.

Para a terceira etapa, os indicadores escolhidos estão fortemente relacionados com as épocas de estiagens e acumulação de água em reservatórios. Para avaliar os períodos secos, a análise se baseou na teoria das corridas (ou sequências), na qual são contados quantos elementos em sequência estão abaixo de um valor de corte. No caso dos períodos de cheia, utilizou-se o conceito de máximo déficit acumulado para um dado nível de regularização de 80%.

DESCRIÇÃO DA ÁREA DE ESTUDO

O modelo CARMA foi aplicado a um conjunto de 146 séries de afluições às usinas hidrelétricas pertinentes ao SEB (referência: dez./2007). A Figura 1 exhibe a distribuição das usinas sobre o território brasileiro, juntamente com os histogramas de vazões médias mensais para oito regiões distintas. As divisões no mapa se referem aos subsistemas que constituem o SEB: as regiões 1 e 2 se localizam no subsistema Norte, a região 3 no subsistema Nordeste, as áreas 4 a 6 representam o subsistema Sudeste/Centro-Oeste e as regiões 7 e 8 se localizam no subsistema Sul.

As séries históricas de vazões mensais foram coletadas do Operador Nacional do Sistema Elétrico (ONS), limitando-se ao período entre jan./1931 e dez./2007 (total de 924 meses) para todas as usinas. Os registros se referem às afluições naturalizadas e se encontram todos consistidos e sem falhas. A única análise realizada sobre as séries foi no tocante à sua condição de estacionariedade estatística. Em concordância com o propósito de utilizar um modelo parcimonioso para a geração dos cenários, optou-se por não utilizar formulações com séries diferenciadas (modelos ARIMA), por acarretar a necessidade de estimação de uma carga extra de parâmetros.

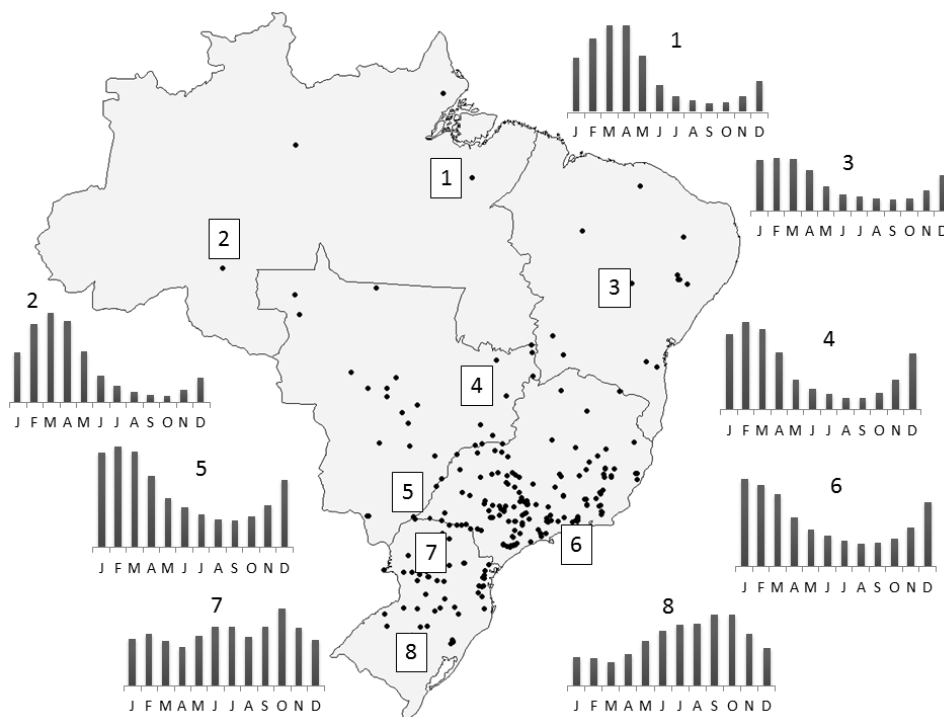


Figura 1 – Usinas utilizadas no estudo e histogramas de vazões médias mensais para algumas regiões

Todo o conjunto de séries foi submetido a cinco testes estatísticos (t-Student, Cox-Stuart, Wilcoxon, Spearman e Mann-Kendall) para a detecção de variações na média e tendências. Como resultado, 75 das 146 séries apresentaram indícios de não estacionariedade e foram submetidas a um procedimento de correção. Os detalhes sobre a execução dos testes e correção das séries não estacionárias podem ser conferidos no estudo de Detzel *et al.* (2011).

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para validar o método utilizado, foram geradas 2000 séries sintéticas para cada usina, todas com o mesmo comprimento da série histórica. A primeira fase de verificações foi referente aos resíduos do modelo, obtendo-se resultados positivos para a grande maioria dos testes.

A Tabela 1 exhibe resultados comparativos das estatísticas de curto termo entre as séries históricas e as médias das séries sintéticas para oito usinas do estudo. Os números na primeira coluna coincidem com as regiões apontadas na Figura 1. Nota-se que, de um modo geral, as estatísticas foram muito bem reproduzidas pelo modelo estocástico. Imprecisões são observadas justamente nas usinas que operam em regiões nas quais a hidrologia não possui épocas sazonais bem definidas.

A Figura 3 representa de forma esquemática as matrizes de correlações espaciais históricas e sintéticas geradas pelo modelo contemporâneo. Adotou-se uma escala de cores, na qual quanto mais verde mais o coeficiente se aproxima da correlação perfeita. A escala tem seu mínimo em -0,40, correlação histórica mais baixa encontrada entre as usinas do estudo.

Nota-se que, mesmo com o tamanho e complexidade do sistema modelado, as correlações espaciais foram respeitadas apropriadamente. As pequenas “ilhas” de correlações elevadas, se referem às usinas que operam em cascata num mesmo rio. Por outro lado, a grande faixa de correlações negativas aponta o comportamento hidrológico contrário entre usinas localizadas no

subsistema Sul e as usinas que operam nos demais subsistemas. Para um sistema interligado como o SEB, esse comportamento é positivo, visto que épocas de seca com baixa capacidade de geração hídrica em um subsistema podem ser complementadas pela geração de usinas localizadas em outro subsistema. Por esse motivo, a reprodução desta característica pelo modelo estocástico é de grande importância.

Tabela 1 – Estatísticas de curto termo para oito usinas

Região – Usina [Modelo]	Tipo	MLT (m³/s)	D. Padrão (m³/s)	Assim.	Autocorr. lag1	Autocorr. lag2	Mínimo (m³/s)	Máximo (m³/s)
1 – Tucuruí [AR(1)]	SH	11.003	9.241	1,10	0,81	0,44	1.269	51.539
	SS	11.019	9.276	1,13	0,82	0,45	1.200	51.891
2 – Samuel [AR(1)]	SH	352	293	0,79	0,80	0,41	16	1.339
	SS	352	294	0,78	0,81	0,41	20	1.299
3 – Sobradinho [AR(1)]	SH	2.687	1.976	1,64	0,76	0,41	506	15.676
	SS	2.693	1.998	1,68	0,79	0,46	484	14.518
4 - Serra da Mesa [ARMA(1,1)]	SH	778	697	2,14	0,69	0,36	97	6.163
	SS	777	689	2,11	0,75	0,43	81	5.614
5 - Ilha Solteira [ARMA(2,1)]	SH	5.588	3.278	1,23	0,77	0,43	1.387	20.314
	SS	5.596	3.345	1,50	0,78	0,45	1.405	23.725
6 – Camargos [ARMA(2,1)]	SH	132	84	1,63	0,70	0,39	34	576
	SS	132	83	1,72	0,74	0,42	29	622
7 - Salto Osório [AR(1)]	SH	1.188	888	2,39	0,49	0,20	126	8.473
	SS	1.191	926	3,00	0,50	0,24	101	9.504
8 - Machadinho [AR(2)]	SH	814	654	2,02	0,48	0,22	57	5.925
	SS	826	749	3,28	0,48	0,24	48	7.888

SH – Série Histórica; SS – Série Sintética.

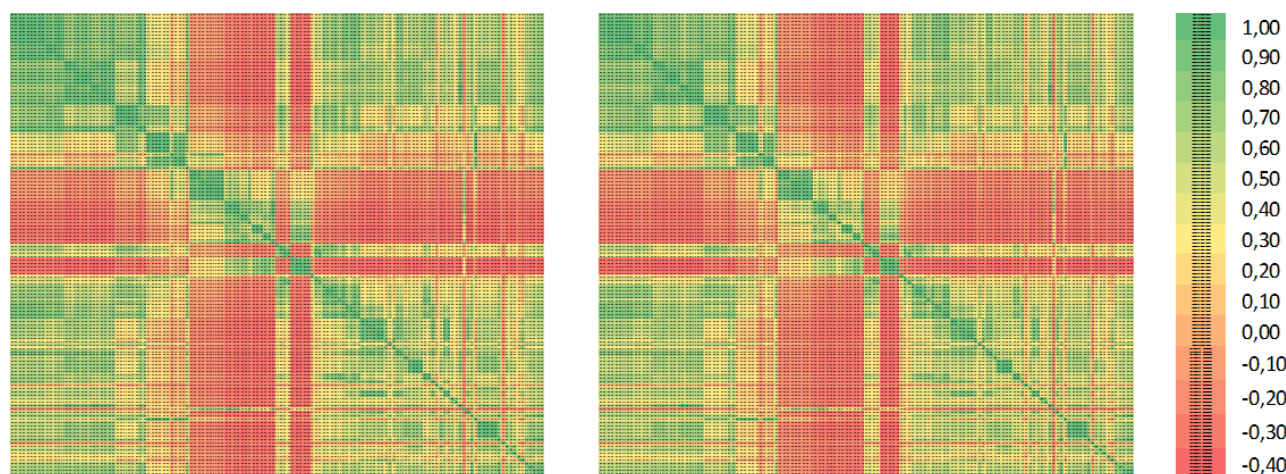


Figura 2 – Matrizes de correlações espaciais históricas (esquerda) e sintéticas (direita)

A análise das estatísticas de longo termo complementa a validação do modelo aqui utilizado. A Tabela 2 mostra estes índices para as mesmas oito usinas selecionadas anteriormente. Da mesma forma que as estatísticas de curto termo, os resultados foram bem reproduzidos pelo modelo, exceto pelo máximo déficit acumulado que apresentou alguns resultados regulares, principalmente para usinas com afluências de grande volume. Ainda assim, a análise dessas estatísticas permite diferenciar o comportamento hidrológico das usinas: no caso das corridas, por exemplo, a duração

média é semelhante em todas as usinas, contudo a duração máxima é muito maior para usinas do Sul.

Tabela 2 – Estatísticas de longo termo para oito usinas

Região – Usina [Modelo]	Tipo	Corridas					Déf. Acumulados	
		Nº	Duração Média	Duração Máxima	Vazão Média (m ³ /s)	Vazão Máxima (m ³ /s)	Máximo (m ³ /s)	Médio (m ³ /s)
1 – Tucuruí [AR(1)]	SH	77	7	10	34.113	50.593	155.984	23.243
	SS	77	7	11	33.168	56.063	88.401	19.247
2 – Samuel [AR(1)]	SH	77	7	8	963	1.350	1.642	454
	SS	77	7	9	957	1.520	1.659	459
3 – Sobradinho [AR(1)]	SH	79	7	11	10.433	16.040	30.631	4.554
	SS	76	8	19	10.849	26.733	23.939	4.364
4 - Serra da Mesa [ARMA(1,1)]	SH	79	7	18	2.720	7.150	10.565	1.608
	SS	76	8	20	2.860	7.487	8.857	1.772
5 - Ilha Solteira [ARMA(2,1)]	SH	75	7	20	25.768	55.294	39.572	5.221
	SS	76	7	18	25.944	61.580	32.745	5.058
6 – Camargos [ARMA(2,1)]	SH	76	8	20	613	1.313	820	125
	SS	76	8	19	611	1.473	936	146
7 - Salto Osório [AR(1)]	SH	99	5	21	3.554	15.269	10.764	1.976
	SS	97	6	24	3.931	15.141	13.182	2.379
8 - Machadinho [AR(2)]	SH	94	6	27	2.433	7.964	10.432	2.075
	SS	96	6	23	2.563	9.422	10.585	2.064

CONCLUSÕES

A modelagem de grandes sistemas mostra-se desafiadora à medida que se aumentam a complexidade e o número de variáveis envolvidas. O caminho comumente encontrado é simplificá-las para tornar viável a solução do problema. No entanto, estas simplificações podem omitir características importantes do sistema, colocando em risco a confiabilidade dos resultados.

No caso de grandes sistemas hídricos, a agregação de reservatórios é uma solução empregada frequentemente, principalmente em análises estocásticas. No presente artigo, apresentou-se um método alternativo para modelagem de séries de vazões, baseado em formulação autorregressiva contemporânea. Essa classe de modelos foi elaborada com princípios parcimoniosos, tornando-se atrativa para casos de maior complexidade. Ainda assim, a aplicação destes modelos em hidrologia é pouco encontrada.

Neste trabalho, as vazões de 146 usinas hidrelétricas integrantes do SEB foram modeladas com sucesso pela formulação CARMA. O modelo foi capaz de preservar estatísticas de curto e longo termos, além de reproduzir com precisão a matriz de correlações espaciais.

AGRADECIMENTOS

Esta pesquisa/trabalho foi possível graças ao financiamento da ANEEL através do Projeto Estratégico de Pesquisa e Desenvolvimento – ANEEL PE-6491-0108/2009, “Otimização do Despacho Hidrotérmico”, com o apoio das seguintes concessionárias: COPEL, DUKE, CGTF,

CDSA, BAESA, ENERCAN, CPFL PAULISTA, CPFL, PIRATININGA, RGE, AES TIETÊ, AES URUGUAIANA, ELETROPAULO, CEMIG e CESP.

REFERÊNCIAS

- ARVANITIDIS, N. V., ROSING, J. (1970). Composite representation of a multireservoir hydroelectric power system. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. 2, p. 319-326.
- BOX, G. E. P., JENKINS, G. M., REINSEL, G. C. (1994). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, 3 ed. Prentice Hall, New Jersey.
- CASTELLANO-MÉNDEZ, M.; GONZÁLEZ-MANTEIGA, W.; FEBRERO-BANDE, M.; PRADA-SÁNCHEZ, J. M.; LOZANO-CALDERÓN, R. (2004). Modelling of the monthly and daily behaviour of the runoff of the Xalas river using Box-Jenkins and neural networks methods. *Journal of Hydrology*, Vol. 296, p. 38-58.
- CEPEL – Centro de Pesquisas de Energia Elétrica, (1999). *Manual de Referência do modelo NEWAVE, Relatório Técnico*.
- DETZEL, D. H. M., BESSA, M. R., VALLEJOS, C. A. V., SANTOS, A. B., THOMSEN, L. S., MINE, M. R. M., BLOOT, M. L., ESTRÓCIO, J. P. (2011). Estacionariedade das Afluências às Usinas Hidrelétricas Brasileiras. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, Vol. 16, N. 3, p. 95-111.
- HALTINER, J. P., SALAS, J. D. (1988). Development and testing of a multivariate, seasonal ARMA(1,1) model. *Journal of Hydrology*, Vol. 104, p. 247-272.
- HIPEL, K. W., McLEOD, A. I. (1994). Time series modelling of water resources and environmental systems. Disponível em: <http://www.stats.uwo.ca/faculty/aim/1994Book/>. Acesso em: 12/11/2012.
- KELMAN, J. (1987). Modelos estocásticos no gerenciamento de recursos hídricos. In: Barth et al. (Eds.) *Modelos para gerenciamento de recursos hídricos I*. São Paulo: Nobel/ABRH.
- MATALAS, N. C. (1967). Mathematical assessment of synthetic hydrology. *Water Resources Research*, Vol. 3, N. 4, p. 937-945.
- MEJIA, J. M., ROUSSELLE, J. (1976). Disaggregation models in hydrology revisited. *Water Resources Research*, Vol. 12, N. 2, p. 185-186.
- MONDAL, M. S., WASIMI, S. A. (2006). Generating and forecasting monthly flows of the Ganges river with PAR model. *Journal of Hydrology*, Vol. 323, p. 41-56.
- PEREIRA, M. V. F., OLIVEIRA, G. C., COSTA, C. C. G., KELMAN, J. (1984). Stochastic streamflow models for hydroelectric systems. *Water Resources Research*, Vol. 20, N. 3, p. 379-390.
- SALAS, J. D., DELLEUR, J. W., YEVJEVICH, V., LANE, W. L. (1980). *Applied modeling of hydrologic time series*. Littleton, Colorado: Water Res Publications.
- SCHWARTZ, G. (1978). Estimating the dimension of a model. *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 6, N. 2, p. 461-464.
- THOMAS, H. A., FIERING, M. B. (1962). Mathematical synthesis of streamflow sequences for the analysis of river basins by simulation. In: Maass, A. et al. (Eds.), *Design of Water Resources Systems*. Harvard Univ. Press, Cambridge, p. 459-493.