

## MÉTODO SEMI-IMPLÍCITO EM DIFERENÇAS FINITAS PARA SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS A SUPERFÍCIE LIVRE

Leonardo Romero Monteiro <sup>1\*</sup>; Edith Beatriz Camaño Schettini <sup>2</sup> & Jorge Hugo Silvestrini <sup>3</sup>

**Resumo** – No presente trabalho, foi desenvolvido um código baseado nas equações de Navier-Stokes, utilizando um esquema semi-implícito de diferenças finita para simular escoamentos a superfície livre com aproximação hidrostática. Este modelo matemático foi verificado para um exemplo já existente e validado para diferentes discretizações espaciais e temporais.

**Palavras-Chave** – Simulação numérica, Escoamentos a superfície livre;

## SEMI-IMPLICIT FINITE DIFFERENCE METHOD FOR FREE-SURFACE FLOW NUMERICAL SIMULATION

**Abstract** – In the present work, a code based on Navier-Stokes equations was developed, using a semi-implicit finite difference method applied to hydrostatic free-surface flow. This mathematical model was verified for an already existent example and validated for different spatial and temporal discretization.

**Keywords** – Numerical simulation, Free-surface; Hydrostatic

## INTRODUÇÃO

Na prática da engenharia encontramos, frequentemente, problemas referentes a escoamentos com obstáculos, separação do escoamento e ondas que podem alterar o escoamento, causando ressaltos hidráulicos, erosões, entre outros. Avaliar as diversas possíveis situações, mudando parâmetros ou hipóteses, fornece resultados úteis para o dimensionamento ou prevenção no dimensionamento de obras de engenharia afetadas por escoamentos de fluidos. O equacionamento hidrodinâmico se desenvolveu com o avanço computacional desenvolvendo estudos em Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD, pela sigla em inglês de *Computational Fluid Dynamics*).

O entendimento da teoria das equações de Navier-Stokes é um conhecimento básico para os pesquisadores de dinâmica dos fluidos. Schlichting (1979) menciona que, para escoamentos incompressíveis, a massa específica do fluido é constante e se admite que a variação da temperatura, mesmo não sendo constante, geralmente, é muito pequena e pode ser considerada também como constante. Desta forma, o escoamento pode ser considerado como independente das equações da termodinâmica. As equações de movimento (equação da Continuidade e equações de Navier-Stoke) podem ser escritas, considerando  $\rho$  constante, como:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (2)$$

<sup>1</sup> Pós Graduação em Engenharia de Recursos Hídricos – Instituto de Pesquisas Hidráulicas – IPH/UFRGS. E-mail: monteilo@hotmail.com

<sup>2</sup> Professora do Programa de Pós Graduação – Instituto de Pesquisas Hidráulicas – IPH/UFRGS. E-mail: bcamano@iph.ufrgs.br

<sup>3</sup> Professor do Programa de Pós Graduação – Pontifícia Universidade Católica – PUCRS. E-mail: jorgehs@pucrs.br

onde  $x_i$  ou  $(x, y$  ou  $z)$  representa as coordenadas horizontal longitudinal, horizontal transversal e vertical,  $u_i$  ( $u, v$  ou  $w$ ) representa as componentes da velocidade nas direções  $x, y$  e  $z$  respectivamente,  $t$  é o tempo,  $\rho$  é a massa específica do fluido,  $g$  é a aceleração da gravidade,  $p$  é a pressão e  $\mu$  é a viscosidade dinâmica do fluido. Para escoamentos incompressíveis se tem quatro equações e quatro incógnitas ( $u, v, w$  e  $p$ ).

Há dois problemas para os quais estas equações diferenciais são úteis: o cálculo do campo de pressão para um campo de velocidade conhecido, ou o cálculo dos campos de velocidade e pressão para um escoamento de geometria conhecida e condições de contorno conhecidas (Çengel e Cimbala, 2007). As equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis são conhecidas como válidas para modelar diversos problemas de escoamentos com superfície livre. Até hoje, inúmeros modelos simplificados foram derivados das equações de Navier-Stokes, para simular problemas específicos de escoamentos limitados a uma determinada escala de comprimento (Casulli, 1998).

## MÉTODOS NUMÉRICOS

A metodologia numérica foi baseada principalmente nas pesquisas de Casulli e Cheng (1992). O equacionamento e o esquema numérico apresentados são para casos tridimensionais, semi-implícitos em diferenças finitas, para escoamentos hidrostáticos com superfície livre. Integrando a Equação da Continuidade (Eq. 1) na profundidade e usando a condição cinemática na superfície livre, com os limites definidos desde o fundo até o desnível do escoamento (Figura 1), obtém-se a seguinte equação de superfície livre

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_{-h}^{\eta} u dz \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \int_{-h}^{\eta} v dz \right] = 0, \quad (3)$$

que pelo método das diferenças finitas pode se reescreve-la como

$$\eta_{i,j}^{n+1} = \eta_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \sum_{k=m}^M \Delta z_{i+1/2,j,k} u_{i+1/2,j,k}^{n+1} - \sum_{k=m}^M \Delta z_{i-1/2,j,k} u_{i-1/2,j,k}^{n+1} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( \sum_{k=m}^M \Delta z_{i,j+1/2,k} v_{i,j+1/2,k}^{n+1} - \sum_{k=m}^M \Delta z_{i,j-1/2,k} v_{i,j-1/2,k}^{n+1} \right) \quad (4)$$

onde  $m$  e  $M$  representam os índices referentes ao fundo e referente à superfície livre, respectivamente. Estes variam de acordo com  $1 \leq m \leq M \leq Nz$ .

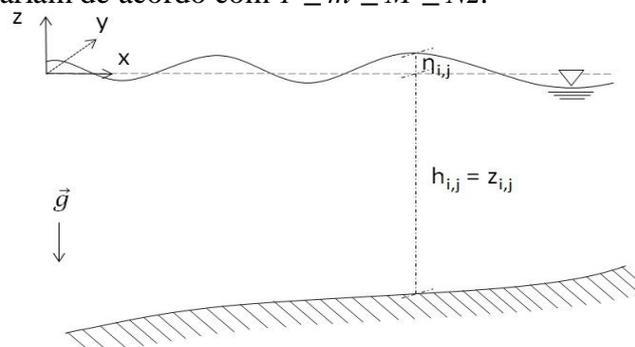


Figura 1 - Visualização transversal do problema de superfície livre.

Esta será a equação principal utilizada no cálculo do desnível. Para os casos estudados neste trabalho, não serão necessárias considerações sobre a condição de contorno do vento e nem de fricção de fundo.

### Cálculo da Pressão Hidrostática

A forma semi-implícita para a equação de momento (Equação 2) é dada por

$$u_{i+1/2,j,k}^{n+1} = Fu_{i+1/2,j,k}^n - g \frac{\Delta t}{\Delta x} (\eta_{i+1,j}^{n+1} - \eta_{i,j}^{n+1}) + \Delta t \frac{v \left( \frac{u_{i+1/2,j,k+1}^{n+1} - u_{i+1/2,j,k}^{n+1}}{\Delta z_{i+1/2,j,k+1/2}} - \frac{u_{i+1/2,j,k}^{n+1} - u_{i+1/2,j,k-1}^{n+1}}{\Delta z_{i+1/2,j,k-1/2}} \right)}{\Delta z_{i+1/2,j,k}} \quad (5)$$

e

$$v_{i,j+1/2,k}^{n+1} = Fv_{i,j+1/2,k}^n - g \frac{\Delta t}{\Delta y} (\eta_{i,j+1}^{n+1} - \eta_{i,j}^{n+1}) + \Delta t \frac{v \left( \frac{v_{i,j+1/2,k+1}^{n+1} - v_{i,j+1/2,k}^{n+1}}{\Delta z_{i,j+1/2,k+1/2}} - \frac{v_{i,j+1/2,k}^{n+1} - v_{i,j+1/2,k-1}^{n+1}}{\Delta z_{i,j+1/2,k-1/2}} \right)}{\Delta z_{i,j+1/2,k}} \quad (6)$$

onde  $i, j$  e  $k$  são os índices referentes aos eixos  $x, y$  e  $z$ . O termo  $F$  é um operador de diferenças finitas não linear o qual inclui os termos da discretização explícita das derivadas substanciais (termos convectivos) e da viscosidade horizontal. Uma maneira de calcular o  $F$  é apresentada por Casullo e Cheng (1992). Os termos de mistura vertical serão calculados implicitamente. A Equação do momento para o campo de velocidade vertical não foi especificada, já que o desnível não é influenciado por esta velocidade na aproximação hidrostática.

Para facilitar o algebrismo matemático, é importante escrever as fórmulas em notação vetorial. Se multiplicarmos as Equações 4 e 5 por  $\Delta z_{i+1/2,j,k}$  e  $\Delta z_{i,j+1/2,k}$  respectivamente, podemos reescreve-las como

$$\mathbf{A}_{i+1/2,j}^n \mathbf{U}_{i+1/2,j}^{n+1} = \mathbf{G}_{i+1/2,j}^n - g \frac{\Delta t}{\Delta x} (\eta_{i+1,j}^{n+1} - \eta_{i,j}^{n+1}) \Delta \mathbf{Z}_{i+1/2,j}^n \quad (7)$$

e

$$\mathbf{A}_{i,j+1/2}^n \mathbf{V}_{i,j+1/2}^{n+1} = \mathbf{G}_{i,j+1/2}^n - g \frac{\Delta t}{\Delta y} (\eta_{i,j+1}^{n+1} - \eta_{i,j}^{n+1}) \Delta \mathbf{Z}_{i,j+1/2}^n \quad (8)$$

Ainda, também, se pode reescrever a Equação 4 em notação vetorial

$$\eta_{i,j}^{n+1} = \eta_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ (\Delta \mathbf{Z}_{i+1/2,j})^T \mathbf{U}_{i+1/2,j}^{n+1} - (\Delta \mathbf{Z}_{i-1/2,j})^T \mathbf{U}_{i-1/2,j}^{n+1} \right] - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[ (\Delta \mathbf{Z}_{i,j+1/2})^T \mathbf{V}_{i,j+1/2}^{n+1} - (\Delta \mathbf{Z}_{i,j-1/2})^T \mathbf{V}_{i,j-1/2}^{n+1} \right] \quad (9)$$

Substituindo as velocidades referenciadas pelas Equações 7 e 8 na Equação 9, finalmente tem-se

$$\begin{aligned} \eta_{i,j}^{n+1} - g \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \left\{ [(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \Delta \mathbf{Z}]_{i+1/2,j} (\eta_{i+1,j}^{n+1} - \eta_{i,j}^{n+1}) - [(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \Delta \mathbf{Z}]_{i-1/2,j} (\eta_{i,j}^{n+1} - \eta_{i-1,j}^{n+1}) \right\} \\ - g \frac{\Delta t^2}{\Delta y^2} \left\{ [(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \Delta \mathbf{Z}]_{i,j+1/2} (\eta_{i,j+1}^{n+1} - \eta_{i,j}^{n+1}) - [(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \Delta \mathbf{Z}]_{i,j-1/2} (\eta_{i,j}^{n+1} - \eta_{i,j-1}^{n+1}) \right\} \\ = \eta_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ [(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{G}]_{i+1/2,j} - [(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{G}]_{i-1/2,j} \right\} \\ - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left\{ [(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{G}]_{i,j+1/2} - [(\Delta \mathbf{Z})^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{G}]_{i,j-1/2} \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

Desde que  $A$  é positivamente definida, assim como  $A^{-1}$  e  $(\Delta Z)^T A^{-1} \Delta Z$  é um número não negativo, podemos utilizar o Método Iterativo do Gradiente Conjugado Pré-condicionado para resolver o sistema linear pentadiagonal formado pela Equação 10 e encontrar os valores desconhecidos. Assim que os desníveis forem calculados, pode-se utilizar as Equações 7 e 8 para calcular as velocidades  $u$  e  $v$ , respectivamente. A velocidade  $w$  pode ser calculada com a Equação da Continuidade (Eq. 1)

## ESTABILIDADE

Para problemas de valores iniciais, uma discretização de um esquema é dito estável se o erro numérico não cresce indefinidamente em uma definida direção. Nota-se que o conceito da estabilidade numérica é aplicado somente para as equações discretas e não deve ser confundido com a instabilidade natural dos modelos matemáticos (Oberkampf and Christophe, 2010).

Em seu trabalho Casulli e Cheng (1992) apresentam um modelo semi-implícito de diferenças finitas. Os autores consideram que o termo vertical não afeta a estabilidade dos termos de difusão, pois este é calculado implicitamente, assim como os termos inerciais, apresentando

$$\Delta t \leq \left[ 2\mu \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \right]^{-1}, \quad (11)$$

como uma restrição de estabilidade (RE).

## Número de Courant

A condição de Courant-Friedrichs-Lewy (CFD) é dada por

$$a = \frac{\Delta t}{\Delta x} u_{\max}, \quad b = \frac{\Delta t}{\Delta y} v_{\max}, \quad d = \frac{\Delta t}{\Delta z} w_{\max} \quad (12)$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $d$  são os números de Courant ( $Cr$ ) da malha, nas respectivas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Esta condição representa uma relação entre a velocidade da partícula e a velocidade que a malha suporta. De acordo com Durran (2010), a condição de estabilidade só é aceita se  $0 \leq Cr \leq 1$ .

## Conservação de Volume

Quando a equação de Continuidade (Eq. 1) é utilizada, tem-se que a variação do volume mássico é nula, quando não se possui uma fonte ou uma perda de fluido. Simplificando a equação da conservação de massa, na forma integral, para o caso incompressível, tem-se

$$\frac{\partial VC}{\partial t} = - \int_{SC} \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (13)$$

Para facilitar a comparação de diferentes casos, discretizando a Eq. 13, a conservação de volume é expressada por

$$\Delta V = \sum \left( \frac{\partial VC}{\partial t} \Delta t \right) \quad (14)$$

## VERIFICAÇÃO E VALIDAÇÃO

Neste item é apresentado o caso utilizado para realizar a verificação e a validação do modelo. Para a verificação, as especificações são idênticas as de trabalhos de outro autor, observando assim se ele está funcionando adequadamente, ou seja, fazendo "contas corretamente". Na validação, serão utilizadas especificações que não foram utilizadas por outros autores, neste caso, diferentes dos limites espaciais e temporais já aplicados. Assim, podemos confirmar que o código está fazendo

"as contas certas" para determinada aplicação. De qualquer forma, tanto para a verificação quanto para a validação é necessário que existam resultados analíticos, experimentais ou de outros modelos para realizar comparações.

Todas as simulações foram realizadas em um computador simples com Memória RAM de 8 GB, na plataforma GNU Fortran 95. A metodologia numérica foi aplicada inteiramente pelos autores deste trabalho, sem a utilização de códigos pré-construídos.

### Bacia Oscilante

A bacia oscilante tem como principal objetivo simular a variação do desnível da água quando este está inicialmente com uma inclinação constante, em apenas um sentido. Esta oscilação no desnível varia de acordo com o campo de pressões e de velocidades do fluido. Foi utilizado como comparação o exemplo que Casulli e Stelling(1998) utilizaram em seu trabalho, onde são comparados os resultado analítico com os dos modelos hidrostático.

Nesta verificação uma bacia quadrada é simulada, com o comprimento e largura de  $L = 10m$  e profundidade de  $h = 10m$ . Esta é discretizada através 8.000 células cúbicas de tamanhos iguais onde  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0,5m$ . A simulação foi realizada com condição inicial de velocidade nula e a fricção de fundo negligenciada. A viscosidade dinâmica foi de  $10^{-6} m^2/s$ . O desnível inicial segue a equação representada por  $\eta = 0,02x - 0,1 m$  (Figura 2). O intervalo do tempo foi de  $\Delta t = 0,001s$ .

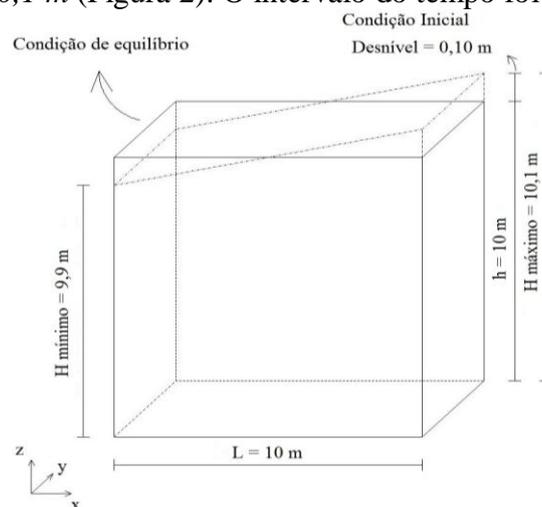


Figura 2 - Volume de controle e das condições iniciais para a bacia oscilante.

O resultado da simulação foi comparado com o resultado analítico do problema, que pode ser aproximado à propagação de uma onda, com comprimento  $\lambda = 2L$ , frequência  $f = c/\lambda$ , e celeridade  $c$  dada por:

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi H}{\lambda}\right)}. \quad (15)$$

### Verificação

A Figura 3 mostra os resultados deste trabalho e de Casulli e Stelling (1998), para a aproximação hidrostática, na distância do eixo  $x = 10m$  ao decorrer do tempo. Enquanto Casulli e Stelling (1998) realizaram esta simulação para um caso bidimensional, o presente trabalho realizou a mesma simulação para o caso tridimensional, analisando o ponto médio do domínio na direção  $y$  ( $5m$ ). Foram simulados no total 5.000 intervalos de tempo, com uma duração de simulação total de

29 segundos. Devido a que no trabalho de Casulli e Stelling (1998) não são apresentados os valores numéricos, torna-se inviável uma comparação mais apurada. A partir de uma análise visual da Figura 3, não existe diferença significativa entre os resultados de ambos autores.

Para analisar a estabilidade das simulações numéricas, são utilizadas as Equações 11, 12 e 14: restrição de estabilidade -  $\Delta t \leq 62.500 s$ ; números de Courant -  $a = 3,6 \times 10^{-5}$ ,  $b = 9,5 \times 10^{-10}$ ,  $d = 1,2 \times 10^{-3}$ ; Conservação de Volume =  $1,2 \times 10^{-3} \%$

A verificação para esta aplicação então foi bem sucedida.

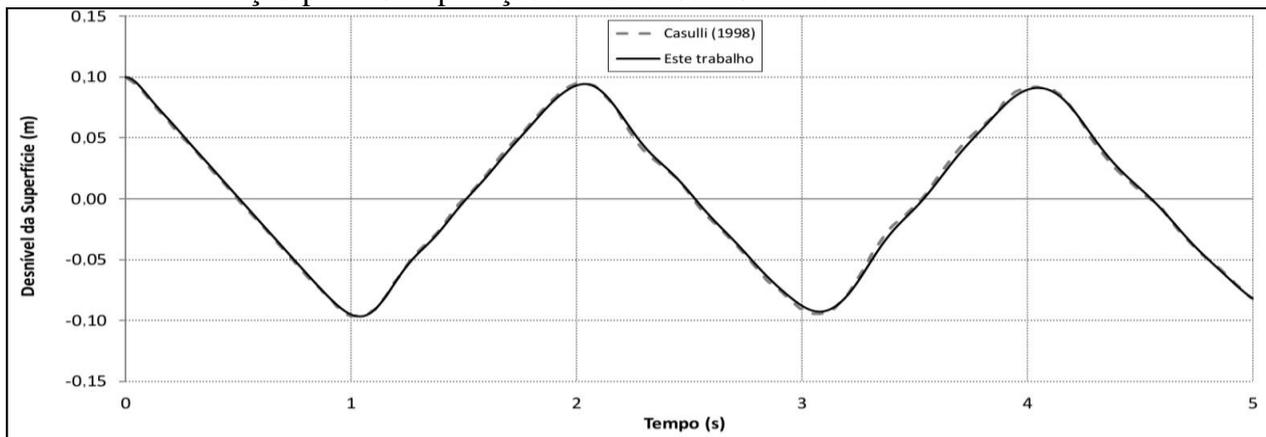


Figura 3 - Comparação da aproximação hidrostática para o exemplo de onda de pequena amplitude.

## Validação

Na validação do código são realizadas simulações com diferentes discretizações. Considera-se um resultado como bom, se a os valores do desnível máximo e mínimo ( $0,10m$  e  $-0,10m$ , respectivamente) se mantem ao longo da simulação.

A primeira variação na discretização se refere a  $\Delta t$ , até se obter a divergência do código, ou a descaracterização dos resultados (Figura 4). Analisando os resultados gerados, quanto menor for a discretização temporal, melhor será a modelagem, porém, obviamente, maior será o dispêndio computacional. Para  $\Delta t = 0,1s$ , a solução tornar-se descaracterizada e para  $\Delta t < 10^{-5} s$  o código divergiu. Ainda, pode-se dizer que para  $0,001s \leq \Delta t \leq 0,00001s$  a diferença dos resultados é muito pequena, podendo-se adotar o valor de  $0,001s$ , já que é o que gera menor dispêndio computacional. Para  $\Delta t > 0,001s$ , as aproximações da Série de Taylor passam a não ser suficientemente boas e seus erros começam a interferir no resultado expressivamente.

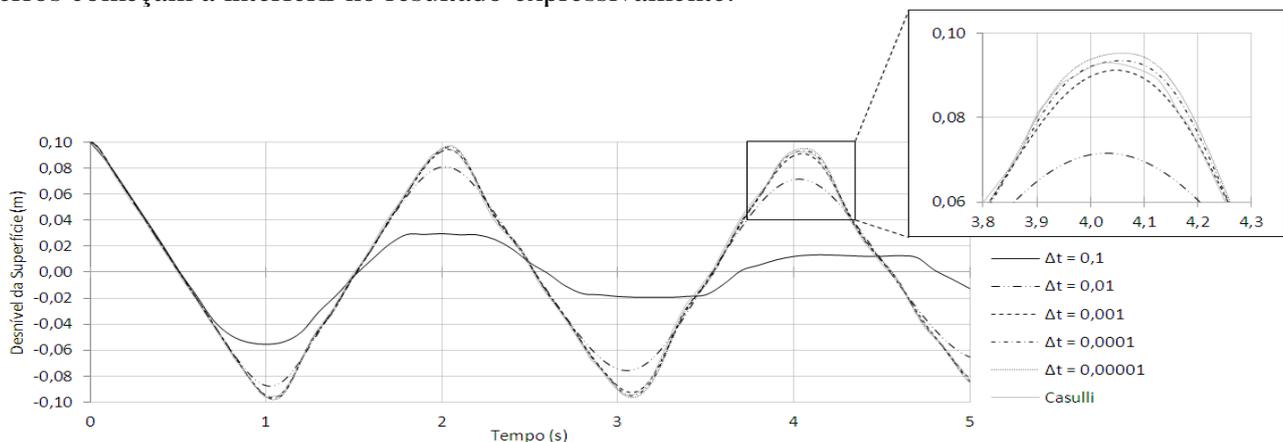


Figura 4 - Comparação entre as diferentes discretizações temporais

O segundo teste se da perante  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  e  $\Delta z$ , compensando esta variação em  $N_x$ ,  $N_y$  e  $N_z$ , ou seja, para  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  e  $\Delta z$ , metade do original,  $N_x$ ,  $N_y$  e  $N_z$  serão o dobro (Figura 5). Nesta etapa utilizou-se  $\Delta t = 0,001s$ . Para  $\Delta x = 0,0625m$ , o dispêndio computacional foi muito grande, superior a 10 dias, o que perante o autor deste trabalho é uma simulação inviável para um problema tão simples. Observa-se uma curiosa reação do modelo, que quanto maior o tamanho da célula melhor é o resultado. O autor do presente trabalho acredita que isto ocorre porque o erro numérico também é reduzido (menor número de células), pois este modelo utiliza aproximações de apenas segunda ordem.

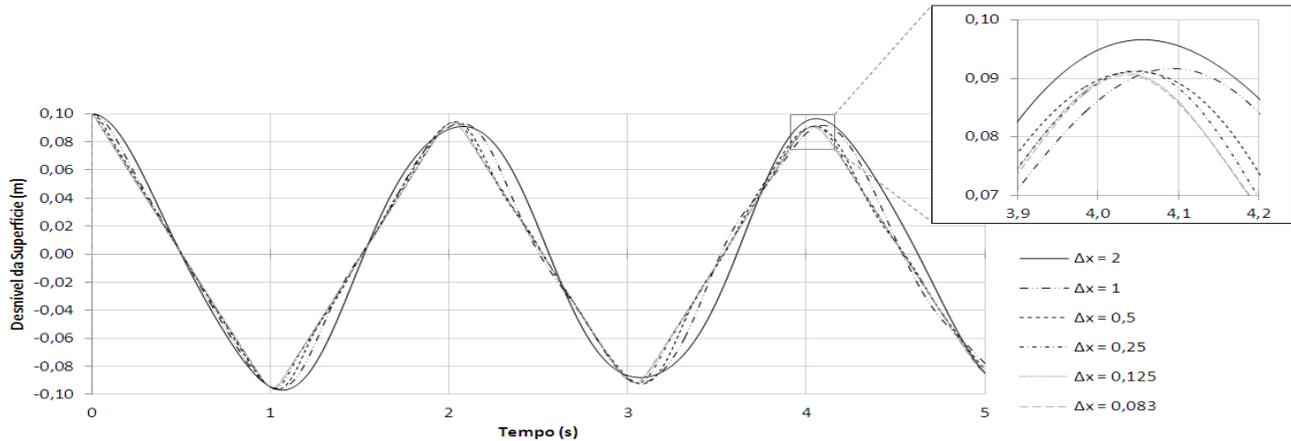


Figura 5 - Comparação entre as diferentes discretizações espaciais

Os testes de estabilidade para as validações temporais e espaciais são apresentadas a seguir:

$\Delta t$ (s)	$Nt$	$t_s$ (s)	$RE$ (s)	$a$	$b$	$d$	$CV$ (%)
0,1	50	2	62.500	$3,6 \times 10^{-3}$	$2,4 \times 10^{-3}$	$4,9 \times 10^{-2}$	$5,9 \times 10^{-4}$
0,01	500	4	62.500	$2,7 \times 10^{-4}$	$8,2 \times 10^{-9}$	$1,9 \times 10^{-3}$	$2,4 \times 10^{-4}$
0,001	5.000	30	62.500	$3,6 \times 10^{-5}$	$9,5 \times 10^{-10}$	$3,6 \times 10^{-4}$	$1,2 \times 10^{-3}$
0,0001	50.000	270	62.500	$3,8 \times 10^{-6}$	$1,5 \times 10^{-9}$	$4,2 \times 10^{-5}$	$1,9 \times 10^{-3}$
0,00001	500.000	2.700	62.500	$3,9 \times 10^{-7}$	$7,2 \times 10^{-10}$	$4,4 \times 10^{-6}$	$2,7 \times 10^{-3}$
0,000001	$5 \times 10^{-6}$ (até 312.000)	divergiu	62.500	$1,3 \times 10^{-7}$	0	$7,2 \times 10^{-7}$	$8,9 \times 10^{-7}$

\*  $Nt$  = número de rodadas,  $t_s$  = tempo de simulação,  $CV$  = conservação de volume.

$\Delta x$ (m)	$N_x / N_{cel}$	$t_s$ (s)	$RE$ (s)	$a$	$b$	$d$	$CV$ (%)
2	5 / 125	2	1.000.000	$1,7 \times 10^{-5}$	$4,6 \times 10^{-10}$	$2,8 \times 10^{-5}$	$1,7 \times 10^{-2}$
1	10 / 1.000	3	250.000	$2,0 \times 10^{-5}$	$6,4 \times 10^{-10}$	$1,1 \times 10^{-4}$	$5,1 \times 10^{-3}$
0,5	20 / 8.000	29	62.500	$3,6 \times 10^{-5}$	$9,5 \times 10^{-10}$	$3,6 \times 10^{-4}$	$1,2 \times 10^{-3}$
0,25	40 / 64.000	600	15.625	$7,5 \times 10^{-5}$	0	$4,4 \times 10^{-4}$	$8,0 \times 10^{-5}$
0,125	80 / 512.000	14.500	3.906	$3,0 \times 10^{-4}$	$1,3 \times 10^{-9}$	$1,2 \times 10^{-3}$	$1,1 \times 10^{-5}$
0,083	120 / 1.728.000	118.800	1.735	$5,1 \times 10^{-4}$	$3,6 \times 10^{-9}$	$1,4 \times 10^{-3}$	$3,1 \times 10^{-6}$
0,062	160 / 4.096.000	> 864.000	977	-	-	-	-

\*  $N_{cel}$  = número de células.

Mesmo definindo 3 diferentes condições de estabilidade, elas não previram a instabilidade da simulação  $\Delta t = 0,000001$ . Isto prova que, estas condições não são suficientes para prever instabilidades. A RE não é nem um pouco funcional para este método, podendo até ser desprezada. As outras condições duas condições de estabilidade (Número de Courant e Conservação de Massa) são mais expressivas, e todas as simulações estavam dentro dos limites aceitáveis.

## CONCLUSÕES

O código criado e apresentado neste trabalho foi verificado, através da comparação gráfica com o trabalho de Casulli e Stelling (1998), e é considerado, então, que “está fazendo contas corretamente”. O modelo ainda foi validado para os intervalos de discretização temporal de  $0,001s$  a  $0,00001s$ , tendo-se que a simulação mais adequada é a de  $0,001s$  por ter o menor dispêndio computacional e fornecendo ainda resultados bons. Discretizações temporais menores do que  $0,00001s$  não são estáveis, mesmo as condições de estabilidade não demonstrando isso. Para a discretização espacial o código foi validado para os intervalos de  $2m$  a  $0,083m$ . O melhor resultado foi o de  $2m$ , e para valores menores do que  $0,083$  o código é estável, porém seu dispêndio computacional é muito grande o que inviabiliza sua utilização.

Os modelos matemáticos ajudam na previsão e no entendimento de fenômenos, porém se utilizados de forma errada podem causar grandes problemas e contradições.

## COMENTÁRIOS

Este código apresentado faz parte do modelo denominado SULE (Superfície Livre), ainda em desenvolvimento pelo Instituto de Pesquisas Hidráulicas da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

## REFERÊNCIAS

- CASULLI, V.; CHENG, R. T. (1992). Semi-implicit finite difference methods for threedimensional shallow water flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 15, pp. 629–647.
- CASULLI, V., AND STELLING, G. S. (1998). Numerical simulation of 3D quasi-hydrostatic free-surface flows. *Journal of Hydraulics Engineering* 2, pp. 678–686.
- ÇENGEL, Y. A., AND CIMBALA, J. M. (2007). *Mecânica dos Fluidos: fundamentos e aplicações*. McGraw-Hill, São Paulo- Brasil, 816 p.
- DURRAN, D. R. (2010). *Numerical Methods for Fluid Dynamics with Applications to Geophysics*. Springer Verlag New York- USA, 516 p.
- OBERKAMPF, W. L., AND ROY, C. J. (2010). *Verification and Validation in Scientific Computing*. Cambridge University Press, New York- USA, 419 p.
- SCHLICHTING, H. (1979). *Boundary-Layer Theory*. McGraw-Hill, New York- USA, 817p.