

INTERPOLAÇÃO DE VAZÕES MÍNIMAS DE ESTIAGENS COM SPLINES CÚBICAS

Thamires da Silva Matos^{1}; Giordano João Tosi²; Eloy Kaviski³*

Resumo – Este trabalho trata do problema da interpolação de vazões mínimas em função do tempo de duração da estiagem. Com distribuições log-normais a 3 parâmetros, parametrizadas para séries de vazões mínimas, com tempos de duração iguais a 1, 5, 10, 15, 30, 60, 120, 150, 180 e 365 dias, foram estimadas as vazões de estiagens para os tempos de recorrência iguais a 2, 5, 10, 20, 50, 100 e 1000 anos. Para cada valor do tempo de recorrência, ajustaram-se *splines* cúbicas, que permitiram obter estimativas de vazões mínimas (associadas com o tempo de recorrência fixado) para tempos de durações entre 1 e 365 dias. O método proposto foi aplicado para solucionar o problema de regularização intra-anual de vazões, permitindo também que sejam estimados volumes para regularizar vazões firmes menores do que a mínima média mensal.

Palavras-Chave – vazões mínimas, *splines* cúbicas, curva de regularização.

INTERPOLATION OF MINIMUM FLOW DROUGHTS WITH CUBIC SPLINES

Abstract – This paper addresses the problem of interpolation of minimum flows depending on the duration of the drought. Log-normal distributions with the 3 parameters parameterized for series of minimum flows, with time duration equal to 1, 5, 10, 15, 30, 60, 120, 150, 180 and 365 days, the estimated flows drought for the recurrence times equal to 2, 5, 10, 20, 50, 100 and 1000 years. For each value of the recurrence time, set cubic splines, which allowed obtaining estimates of minimum flows (associated with the recurrence time period) for time durations between 1 and 365 days. The proposed method was applied to solve the problem of regulating intra-annual streamflow, also allowing volumes are estimated to regulate discharges firm smaller than the minimum monthly average.

Keywords – Minimum flows, cubic splines, curve regularization.

INTRODUÇÃO

Nas séries históricas de vazões médias diárias, os menores valores observados definem vazões mínimas, que ocorrem em períodos de pouca ou nenhuma precipitação pluvial. Representam os trechos do hidrograma que apresentam uma redução lenta do escoamento superficial na bacia hidrográfica, vazão esta, garantida pela contribuição subterrânea.

O valor mínimo limite inferior da vazão de estiagem pode ser zero, mas, no caso de rios perenes a probabilidade associada a vazão nula é muito pequena. Também a ocorrência de vazões instantâneas muito baixas pode ser menos crítica que a ocorrência de vazões elevadas durante períodos maiores.

Existem três aspectos importantes a serem considerados num estudo de vazões de estiagens: a quantidade, a duração da estiagem e a probabilidade de ocorrência. A duração caracteriza o período de situação crítica.

^{1*} Mestranda, PPGERHA/UFPR, Centro Politécnico, Jardim das Américas, Curitiba – PR, CEP: 80001-910; thamiresmatos@ufpr.br

² Engenheiro Civil; giordanotosi@ufpr.br

³ Professor Adjunto, DHS/UFPR, Centro Politécnico, Jardim das Américas, Curitiba – PR, CEP: 80001-910; eloy.dhs@ufpr.br

O conhecimento das vazões de estiagens, numa bacia hidrográfica, é importante na realização de estudos e projetos dos aproveitamentos dos recursos hídricos, como por exemplo, em abastecimento de água, geração de energia hidrelétrica, irrigação, dispersão de poluentes.

Neste trabalho trata-se do problema da interpolação de vazões mínimas em função do tempo de duração da estiagem, associadas com determinado tempo de recorrência. Por meio de *splines* cúbicas, define-se um método para obter estimativas de vazões mínimas para tempos de durações entre 1 e 365 dias.

O método proposto para interpolar vazões mínimas foi aplicado para solucionar o problema de regularização intra-anual de vazões, permitindo também que sejam estimados volumes para regularizar vazões firmes menores do que a mínima média mensal. Volumes de regularização são necessários quando se necessita aproveitar vazões firmes maiores do que as vazões mínimas.

A seguir descreve-se o método de interpolação por *splines* cúbicas, o método de regularização intra-anual de vazões, o estudo de caso e as conclusões.

INTERPOLAÇÃO POR FUNÇÕES *SPLINES*

A interpolação mecânica pode ser realizada manualmente usando *splines*, que são hastes flexíveis de madeira ou plástico, colocadas sobre certos pontos de uma mesa de desenhos chamados nós. Apesar de ser usada desde o século passado, só no fim da década de 60 foi desenvolvida a formulação matemática deste problema.

Os dados fornecidos (valores de funções em pontos no plano xy) $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)$ podem ser interpolados por um polinômio $P_n(x)$ de grau igual ou menor que n , de modo que a curva de $P_n(x)$ passa através desses $n+1$ pontos (x_i, f_i) , sendo $f_0 = f(x_0), \dots, f_n = f(x_n)$. Se n for grande, pode haver problemas, pois $P_n(x)$ pode oscilar para x situado entre os nós x_0, \dots, x_n . Logo, pode ocorrer uma instabilidade numérica. Essas oscilações indesejáveis são evitadas pelo método de *splines* proposto por Schoenberg (1946) em Stoer e Bulirsch (1980). Esse método é amplamente utilizado na prática. A ideia matemática do método é, em vez de usar um único polinômio P_n de grau elevado em todo o intervalo $a \leq x \leq b$ onde o nó está situado, ou seja, $a = x_0 < x_1 < x_n = b$, faz-se o uso de polinômios de um baixo grau de n , por exemplo, cúbicos, do tipo $q_0(x), q_1(x), \dots, q_{n-1}(x)$, sendo um sobre cada intervalo entre nós adjacentes. Logo, q_0 de x_0 a x_1 , depois q_1 de x_1 a x_2 , e assim por diante. A partir disso, compõe-se uma função de interpolação $g(x)$ chamada de *spline*, juntando esses polinômios em uma única curva contínua que passa através dos pontos referentes aos dados, ou seja, $g(x_0) = f(x_0) = f_0, g(x_1) = f(x_1) = f_1, g(x_n) = f(x_n) = f_n$.

Observando que $g(x_0) = q_0(x)$, quando $x_0 < x < x_1$, então $g(x_1) = q_1(x)$ quando $x_1 < x < x_2$ e assim por diante, de acordo com a construção de g . Portanto, a interpolação da *spline* é uma interpolação polinomial por intervalos.

Os q_j 's mais simples seriam polinômios lineares. Entretanto, a curva de uma função linear contínua por intervalos apresenta arestas, e teria pouco interesse geral. Considerando os *splines* cúbicos $g(x)$ (por serem os mais importantes nas aplicações), que, por definição, e interpolando dados fornecidos $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)$, são funções contínuas no intervalo $a = x_0 < x_1 < x_n = b$, tem a primeira e a segunda derivadas contínuas e satisfazem à condição de interpolação.

Consideram-se os pontos $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)$ com os x_j arbitrariamente espaçados e os valores dados $f_j = f(x_j), j = 0, 1, \dots, n$.

Serão usadas como referência para as segundas derivadas as variáveis nos pontos x_j : $M_j = S''(Y, x_j)$ sendo $j = 0, 1, 2, \dots, n$.

As funções *splines* cúbicas são caracterizadas pelos seus momentos e esses momentos podem ser calculados como solução de um sistema de equações lineares.

Percebe-se que $S''(Y)$ da função *spline* coincide com a função linear em cada intervalo $[x_j, x_{j+1}]$, com $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$ e que essas funções lineares podem ser descritas em termos de momentos M_i da $S(Y)$:

$$S''(Y, x) = M_j \frac{x_{j+1}-x}{h_{j+1}} + M_{j+1} \frac{x-x_j}{h_{j+1}} \text{ para } x \in [x_j, x_{j+1}] \text{ e } h_{j+1} = x_{j+1} - x_j \text{ para } j = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Por integração, e $S(Y, x) = M_j \frac{(x_{j+1}-x)^3}{6h_{j+1}} + M_{j+1} \frac{(x-x_j)^3}{6h_{j+1}} + A_j(x-x_j) + B_j$.

Sendo A_j e B_j definidos, $B_j = Y_j - M_j \frac{h_{j+1}^2}{6}$ e $A_j = \frac{Y_{j+1}-Y_j}{h_{j+1}} - (M_{j+1} - M_j) \frac{h_{j+1}}{6}$.

Representa-se a função *spline* em termos dos momentos: $S(Y, x) = \alpha_j + \beta_j(x-x_j) + \gamma_j(x-x_j)^2 + \delta_j(x-x_j)^3$ para $x \in [x_j, x_{j+1}]$ onde $\alpha_j = y_j = \frac{M_j}{2}$, $\beta_j = S'(Y, x_j) = -\frac{M_j \cdot h_{j+1}}{2} + A_j = \frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}} - \frac{2M_j+M_{j+1}}{6} h_{j+1}$ e $\delta_j = \frac{S'''(Y, x_j^+)}{6} = \frac{M_{j+1}-M_j}{6h_{j+1}}$.

Considerando-se a continuidade da $S'(Y)$ em $x = x_j$, $j = 1, 2, \dots, n-1$, resulta (Stoer e Bulirsch, 1980) em $\frac{h_j}{6} M_{j-1} + \frac{h_j+h_{j+1}}{3} M_j + \frac{h_{j+1}}{6} M_{j+1} = \frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}} - \frac{y_j-y_{j-1}}{h_j}$.

Para $j = 1, 2, \dots, n-1$. Estas são $n-1$ equações para os $n+1$ momentos desconhecidos. Duas equações podem ser geradas separadamente através das equações anteriores.

$$S'(Y; a) = y'_0 \rightarrow \frac{h_1}{3} M_0 + \frac{h_1}{6} M_1 = \frac{y_1 - y_0}{h_1} - y'_0 \quad (1)$$

$$S'(Y; b) = y'_n \rightarrow \frac{h_n}{6} M_{n-1} + \frac{h_n}{3} M_n = y'_n - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} \quad (2)$$

As duas últimas equações podem ser escritas de uma forma comum $\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = d_j$ sendo $j = 1, 2, \dots, n-1$. Sendo $\lambda_j = \frac{h_{j+1}}{h_j+h_{j+1}}$, $\mu_j = 1 - \lambda_j = \frac{h_j}{h_j+h_{j+1}}$, $d_j = \frac{6}{h_j+h_{j+1}} \left(\frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}} - \frac{y_j-y_{j-1}}{h_j} \right)$, $\lambda_0 = 1$, $d_0 = \frac{6}{h_1} \left(\frac{y_1-y_0}{h_1} - y'_0 \right)$, $\mu_n = 1$ e $d_n = \frac{6}{h_n} \left(y'_n - \frac{y_n-y_{n-1}}{h_n} \right)$.

Gerando-se o sistema de equações lineares para a determinação dos momentos M_i .

REGULARIZAÇÃO INTRA-ANUAL DE VAZÕES

O problema de regularização de vazões em reservatórios é recorrente na engenharia hidrológica e possui grande interesse prático. Sempre que um projeto de aproveitamento hídrico de um rio prevê uma vazão de retirada maior que a mínima, existirá, em consequência, períodos em que a vazão natural é maior que a necessária e períodos em que é menor. Se torna necessário a construção de um reservatório para que se possa reter o excesso de água dos períodos de grandes vazões para ser utilizado nas épocas de seca.

Qualquer que seja o tamanho do reservatório ou a finalidade das águas acumuladas, sua principal função é a de fornecer uma vazão constante (ou não muito variável) tendo recebido do rio vazões muito variáveis no tempo: ou seja, sua função é a de regularização da vazão do curso d'água.

O resultado desses estudos produz a chamada curva de regularização, a qual relaciona o volume de um reservatório capaz de garantir uma determinada vazão com certo tempo de recorrência. A curva de regularização pode ser obtida a partir de uma abordagem experimental,

através da geração de séries sintéticas, e, por uma abordagem teórica. Este trabalho propõe o método de interpolação por função *spline* para resolver o problema de regularização intra-anual de vazões, maximizando uma função para volume do reservatório.

Quando se fala em regularização intra-anual também se desconsidera a necessidade de transferência de água de ano para ano ou a vazão de regularização é inferior à menor vazão anual. Frequentemente os problemas de regularização de vazão são solucionados de forma bastante simplificada através da curva de permanência. Outra solução é obtida mediante a aplicação da técnica de Rippl à série histórica. Este procedimento é deficiente no sentido de que não se pode quantificar a probabilidade de sucesso associada.

O problema de regularização é resolvido relacionando-se o volume do reservatório com uma vazão por ele garantida ao longo de um horizonte de planejamento e probabilidade de sucesso (ou tempo de retorno).

O processo de obtenção da Curva de Regularização a ser utilizado nesse trabalho foi desenvolvido por Gomide (1986), que relaciona o volume do reservatório com a probabilidade de sucesso do empreendimento. Em seu trabalho, apresenta um método que desenvolveu para determinação do volume do reservatório necessário para regularizar baixos níveis de vazão. A técnica consiste em maximizar a função:

$$V = [Q_F - f_{TR}(t)] \cdot k \cdot t \quad (3)$$

Sendo V o volume do reservatório, Q_F a vazão de regularização ou vazão firme (m^3/s), $f_{TR}(t)$ a vazão dos períodos de estiagem de t dias de duração e TR anos de recorrência (m^3/s), k o número de segundos de um dia (86400 segundos) e t o tempo em dias.

Neste trabalho as funções *splines* cúbicas foram adotadas para modelar as funções $f_{TR}(t)$.

Derivando-se a expressão (3) em relação a t e igualando-se a zero, resulta:

$$t^* = \frac{Q_F - f_{TR}(t^*)}{f'_{TR}(t^*)} \quad (4)$$

Sendo t^* o tempo de duração de estiagem que otimiza o volume do reservatório associado com o tempo de recorrência TR .

ESTUDO DE CASO

Neste trabalho foi utilizada a série história de vazões diárias observadas no período anos de 1936 a 2005, no Rio Iguaçu, em Porto Amazonas, com uma área de drenagem de 3,662 km². Foi aplicado um tratamento estatístico para obter as mínimas vazões acumuladas (períodos de estiagem) de cada ano para períodos (t) de 1, 5, 10, 15, 30, 60, 90, 120, 150 e 180 dias. Foram definidas amostras, para cada duração de estiagem, representadas por $X(t)$, e classificadas em ordem decrescente. A essas variáveis ajustaram-se distribuições de probabilidades log-normal a 3 parâmetros. Os parâmetros desta distribuição são α , y e Sy . O parâmetro α é estimado através da mediana da variável $X(t)$, pelo método proposto por Stedinger et al (1993).

Na tabela 1 são apresentados os parâmetros das distribuições de probabilidades ajustadas para cada tempo de duração.

Com as distribuições log-normais a 3 parâmetros parametrizadas (tabela 1) para os tempos de duração iguais a 1, 5, 10, 15, 30, 60, 120, 150, 180 e 365 dias de duração das estiagens, foram estimadas as vazões mínimas de estiagens para os tempos de recorrência iguais a 2, 5, 10, 20, 50, 100 e 1000 anos.

Fixando-se o valor do tempo de recorrência, para cada um dos valores que a função $f_{TR}(t)$ foi tabelada, as funções $f_{TR}(t)$ foram modeladas por *splines* cúbicas para solucionar a equação (2) pelo método da iteração linear (Stoer e Bulirsch, 1980).

Os parâmetros da função *spline* cúbica determinada para o tempo de recorrência de 100 anos são apresentados na tabela 2. Estes parâmetros definem o método de interpolação para a função $f_{100}(t)$.

Tabela 1 – Parâmetros da distribuição log-normal a 3 parâmetros

t (dias)	Mínimo (m³/s)	Mediana (m³/s)	Máximo (m³/s)	Média (m³/s)	Desvio Padrão (m³/s)	Coef. de variação	α (m³/s)	μ_y	σ_y
1	5,160	15,000	44,770	16,615	7,845	0,472	0,302	2,690	0,449
5	5,160	15,400	46,254	17,503	8,070	0,461	0,073	2,765	0,429
10	5,804	16,420	48,354	18,793	8,741	0,465	0,517	2,805	0,444
15	6,333	17,073	56,675	20,047	9,819	0,490	2,336	2,740	0,516
30	7,360	20,693	64,027	23,865	12,023	0,504	1,433	2,984	0,500
60	8,711	26,801	76,679	29,770	15,557	0,523	-1,584	3,338	0,457
90	9,090	31,159	89,429	34,908	17,527	0,502	-4,365	3,581	0,421
120	9,713	34,367	103,506	39,308	19,083	0,486	-3,950	3,674	0,436
150	10,354	36,488	119,262	42,723	21,066	0,496	-1,704	3,679	0,472
180	11,354	40,279	136,625	45,723	22,433	0,491	-1,056	3,739	0,465
365	26,490	64,993	152,096	68,754	26,561	0,386	-4,013	4,223	0,361

Tabela 2 – Parâmetros da *spline* cúbica para o tempo de recorrência de 100 anos

J	t_j/t_{j-1}	α_j/β_j	γ_j/Δ_j	j	t_j/t_{j-1}	α_j/β_j	γ_j/Δ_j
1	0	0.00E+00	-1.65E+15	7	60	8.13E+14	2.69E+10
	1	1.65E+15	5.51E+14		90	2.57E+12	-1.14E+08
2	1	5.49E+14	4.04E+12	8	90	9.12E+14	1.67E+10
	5	2.02E+12	-4.51E+11		120	3.88E+12	-3.76E+08
3	5	5.92E+14	-1.37E+12	9	120	1.03E+15	-1.72E+10
	10	1.27E+13	1.51E+11		150	3.86E+12	6.78E+08
4	10	6.40E+14	8.85E+11	10	150	1.15E+15	4.39E+10
	15	1.02E+13	-1.07E+11		180	4.67E+12	-4.58E+08
5	15	7.00E+14	-7.15E+11	11	180	1.32E+15	2.69E+09
	30	1.11E+13	1.66E+10		355	6.06E+12	2.44E+06
6	30	7.62E+14	3.13E+10				
	60	8.27E+11	-4.91E+07				

Os resultados obtidos, para as curvas de regularização, são apresentados na tabela 3. Os limites máximos das vazões firmes para cada tempo de recorrência são iguais a $f_{TR}(365)$.

A segunda e a terceira coluna da tabela 3, representam os pontos da curva de regularização associados com o tempo de recorrência identificado na primeira coluna. A quarta coluna da tabela 3, é a duração do período crítico associado com os valores da primeira, segunda e terceira coluna. A quinta coluna é a vazão firme adimensional, determinada pela razão entre o valor da segunda coluna e a vazão média de longo período (68,754 m³/s). A sexta coluna é o volume do reservatório de

regularização adimensional, determinado pela razão entre o valor da terceira coluna e a vazão média de longo período em unidade de volume (2169711230,4 m³).

Na Figura 1 apresenta-se o trecho inferior da curva de regularização adimensional.

Tabela 3 – Volumes de regularização

TR (anos)	Vazão firme (m ³ /s)	Volume (m ³)	Período crítico (dias)	Vazão firme (adimensional)	Volume (adimensional)
2	6,4215	21391,282	0,0806	0,0934	0,00001
2	12,8431	95245,421	0,1940	0,1868	0,00004
2	19,2646	1970231,5	12,3238	0,2802	0,0009
2	25,6862	12295813,065	24,2140	0,3736	0,0057
2	32,1077	30946351,649	46,2218	0,4670	0,0143
2	38,5293	62576340,799	66,0198	0,5604	0,0288
2	44,9508	104484977,954	86,6734	0,6538	0,0482
2	51,3724	174615365,418	151,2629	0,7472	0,0805
2	57,7939	262998849,687	167,8996	0,8406	0,1212
2	64,2155	362243615,614	191,1752	0,9340	0,1670
5	4,6364	16185,093	0,0847	0,0674	0,00001
5	9,2728	72621,785	0,2071	0,1349	0,00003
5	13,9092	1987660,941	15,0013	0,2023	0,0009
5	18,5456	10697951,327	29,8804	0,2697	0,0049
5	23,1820	29062396,781	58,6327	0,3372	0,0134
5	27,8184	55953337,282	76,2363	0,4046	0,0258
5	32,4548	97944721,755	144,4535	0,4720	0,0451
5	37,0912	158446691,232	157,1106	0,5395	0,0730
5	41,7276	224049461,319	171,0365	0,6069	0,1033
5	46,3640	296479073,149	191,6874	0,6743	0,1366
10	3,8971	13869,587	0,0864	0,0567	0,00001
10	7,7942	62444,895	0,2128	0,1134	0,00003
10	11,6913	1756743,591	14,7492	0,1700	0,0008
10	15,5883	10018540,586	39,0973	0,2267	0,0046
10	19,4854	28176939,02	64,3885	0,2834	0,0130
10	23,3825	53123024,038	85,5588	0,3401	0,0245
10	27,2796	95283001,704	147,0445	0,3968	0,0439
10	31,1767	146724783,714	158,4955	0,4535	0,0676
10	35,0738	202245682,522	171,8992	0,5101	0,0932
10	38,9709	263291977,297	191,6526	0,5668	0,1213
20	3,3692	12142,197	0,0876	0,0490	0,00001
20	6,7384	54793,295	0,2167	0,0980	0,00003
20	10,1076	1499284,401	13,2597	0,1470	0,0007
20	13,4769	9954007,405	48,7064	0,1960	0,0046
20	16,8461	27608818,705	70,8307	0,2450	0,0127

TR (anos)	Vazão firme (m³/s)	Volume (m³)	Período crítico (dias)	Vazão firme (adimensional)	Volume (adimensional)
20	20,2153	51806099,859	100,3557	0,2940	0,0239
20	23,5845	91508021,539	147,8615	0,3430	0,0422
20	26,9537	136166385,902	159,0511	0,3920	0,0628
20	30,3229	184306112,785	172,2838	0,4410	0,0849
20	33,6922	237124375,455	191,4349	0,4900	0,1093
50	2,8524	10379,689	0,0885	0,0415	0,00000
50	5,7047	46925,068	0,2198	0,0830	0,00002
50	8,5571	1232015,369	11,3886	0,1245	0,0006
50	11,4095	10314633,878	58,1535	0,1659	0,0048
50	14,2619	27570761,4	81,9758	0,2074	0,0127
50	17,1142	51706987,458	125,8022	0,2489	0,0238
50	19,9666	86062910,187	147,6678	0,2904	0,0397
50	22,8190	123847188,236	159,0424	0,3319	0,0571
50	25,6714	164612962,093	172,3420	0,3734	0,0759
50	28,5237	209288384,104	190,9438	0,4149	0,0965
100	2,5479	9303,405	0,0888	0,0371	0,00000
100	5,0957	42086,824	0,2209	0,0741	0,00002
100	7,6436	1077067,379	10,5743	0,1112	0,0005
100	10,1914	10802738,43	65,9012	0,1482	0,0050
100	12,7393	28177358,961	91,2225	0,1853	0,0130
100	15,2871	51504362,902	126,4617	0,2223	0,0237
100	17,8350	81975240,676	146,7779	0,2594	0,0378
100	20,3829	115587348,46	158,5967	0,2965	0,0533
100	22,9307	151932442,176	172,1251	0,3335	0,0700
100	25,4786	191766129,097	190,4415	0,3706	0,0884
1000	1,8381	6668,152	0,0882	0,0267	0,00000
1000	3,6762	30128,043	0,2188	0,0535	0,00001
1000	5,5143	708947,511	9,1401	0,0802	0,0003
1000	7,3524	2449762,382	13,0406	0,1069	0,0011
1000	9,1905	31082582,596	106,8185	0,1337	0,0143
1000	11,0286	49217565,323	122,2682	0,1604	0,0227
1000	12,8667	69962371,296	138,7329	0,1871	0,0322
1000	14,7048	93216747,848	153,9943	0,2139	0,0430
1000	16,5429	118911707,928	169,8670	0,2406	0,0548
1000	18,3810	147301455,881	188,0056	0,2673	0,0679

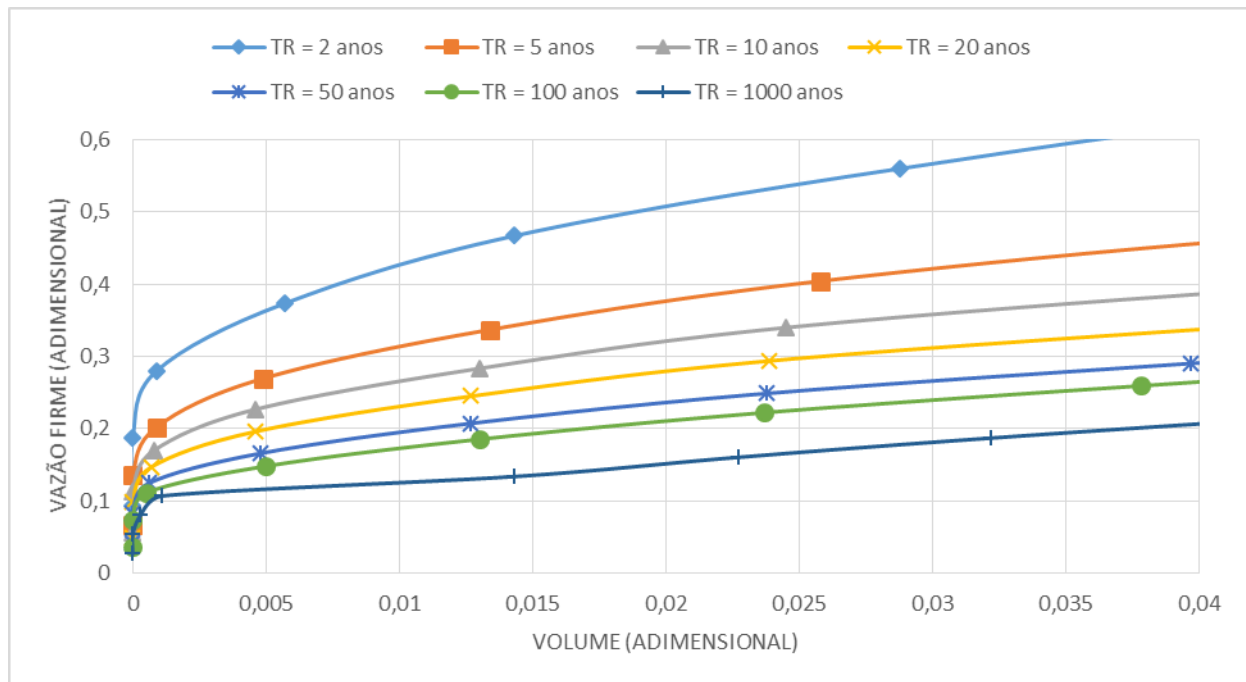


Figura 1 - Curva de regularização

CONCLUSÃO

Neste trabalho estudou-se o problema da interpolação de vazões mínimas, com *splines* cúbicas, de TR anos de recorrência, em função do tempo de duração da estiagem. O método proposto foi aplicado para solucionar o problema de regularização intra-anual de vazões.

Com os resultados apresentados foi possível concluir que o método proposto determina com precisão, as curvas de regularização, porque representam fielmente a não-linearidade da relação entre a vazão da estiagem de t dias de duração e TR anos de recorrência.

Geralmente os métodos existentes consideram a função $f_{TR}(t)$ definida como o produto de uma função linear em relação ao tempo, e de um parâmetro, considerado constante para cada tempo de recorrência. Estes métodos se mostram adequados para estimar volumes de regularização associados com vazões firmes maiores do que a vazão mínima média mensal. Quando as vazões firmes são menores do que a mínima média mensal (caso de regularização intra-mês), com o uso de uma aproximação linear para a função $f_{TR}(t)$, os resultados obtidos, em geral, superestimam as vazões mínimas existentes, e conseqüentemente subestimam os volumes dos reservatórios.

REFERÊNCIAS

- CLÁUDIO, D.M., MARINS, J.M. (1989). *Cálculo Numérico Computacional. Teoria e Prática*. Altas. São Paulo.
- GOMIDE, F. L. S. (1986). Teoria estocástica dos reservatórios aplicada ao planejamento energético de sistemas hidrelétricos. Paginação irregular. Tese (Titular), Departamento de Hidráulica e Saneamento, Universidade Federal do Paraná. Curitiba.
- MANNICH, M., KAVISKI, E., MINE, M. R. M. (2011). Regularização Intra-anual de Vazões: Comparações de Métodos. In *XIX Simpósio de Recursos Hídricos*. v. 2, p. 27-37.
- STEDINGER, J.R., VOGEL, R.M., FOUFOULA-GEORGIU, E. (1992). Frequency Analysis of Extreme Events. In: *Handbook of Hydrology*, ed. D. R. Maidment. New York: McGraw-Hill.
- STOER, J., BULIRSCH, R. (1980). *Introduction to Numerical Analysis*. Springer Verlag. 744 p.