

## **A Importância da Caracterização da Corrente para a Correta Determinação do Comprimento e da Altura das Ondas. Parte 3: Velocidades e Acelerações Orbitais**

**Claudio F. Neves\***

*neves@peno.coppe.ufrj.br*

*Recebido: 10/11/13 - revisado: 17/01/14 - aceito: 01/04/14*

### **RESUMO**

*Boias com acelerômetros, frequentemente utilizadas nas medições de ondas, não identificam a presença de correntes. Por outro lado, sensores que medem velocidades de correntes, simplesmente separam linearmente a parcela oscilatória do sinal, desprezando a não linearidade da superposição onda-corrente. Isto pode levar a erros na determinação da altura, do comprimento e de outras propriedades físicas da onda. Resultados da Teoria Linear com corrente, para o campo de velocidades e o de aceleração vertical na superfície livre, são apresentados para quatro tipos de perfis de correntes: uniforme, com vorticidade constante, exponencial e cosseno. Quantificam-se os erros existentes nas estimativas de velocidades orbitais e acelerações, quando se utilizam funções de transferência deduzidas para uma situação sem corrente. Resultados são apresentados em função dos seguintes parâmetros: o número de Froude, referido ao valor da corrente na superfície ( $U_s/(gh)^{1/2}$ ); profundidade relativa ( $h/L_0$ ), onde  $L_0$  é o valor do comprimento de onda em águas profundas pela Teoria Linear na ausência de corrente; e vorticidade adimensional ( $\Omega_0/\omega$ ), onde  $\omega$  é a frequência em rad/s para um observador fixo.*

**Palavras-chave:** ondas; vorticidade; interação onda-corrente; Teoria da Função de Corrente.

### **INTRODUÇÃO**

As alturas das ondas de gravidade (períodos entre 4 e 20 s) são obtidas por medições diretas da superfície livre, ou estimadas indiretamente a partir da pressão sub-superficial, da aceleração de uma boia, da velocidade pontual em alguma elevação da coluna de água ou do perfil de velocidade ao longo da vertical. Em todas as medições de propriedades cinemáticas ou dinâmicas, é necessário determinar funções de transferência que transformem tais medições em valores de elevação da superfície livre. Em geral as medições de pressão, de velocidade, do comprimento de onda ou da elevação da superfície livre não consideram a presença de uma eventual corrente barotrópica (e.g. maré) subjacente, a qual, entre outros fenômenos, produz um desvio entre a frequência absoluta, que é observada em relação a uma referência fixa, e a frequência intrínseca do movimento, que seria observada por um observador que se deslocasse à velocidade da corrente. Esta diferença denomina-se efeito Doppler.

Em dois trabalhos associados a este, Neves e Dias (2013) discutiram a equação de dispersão resultante da superposição colinear de ondas e correntes (doravante denominado Parte 1) e as modificações sofridas pelo fator de resposta de pressão caso uma corrente estivesse presente e fosse ignorada (DIAS e NEVES, 2013) (doravante denominado Parte 2). O presente artigo, Parte 3, abordará estudos teóricos e numéricos sobre as propriedades cinemáticas do escoamento oscilatório. Atenção especial será dada aos instrumentos tipo PUV, muito utilizados atualmente, e às boias com acelerômetro. Tais instrumentos não medem o campo de velocidade da corrente subjacente ou seus algoritmos de transferência de uma grandeza mecânica (i.e. pressão, aceleração ou velocidade) para elevação da superfície livre ignoram a corrente. Em ambos os casos, pode-se incorrer em erro grave na estimativa da altura da onda.

No presente trabalho, será tratado apenas o problema bidimensional em perfil, discutindo as funções de transferência entre as grandezas cinemáticas e a elevação da superfície livre. Serão considerados quatro tipos de perfil de corrente (Casos I a IV), indicados na Tabela 1, os mesmos que foram utilizados na Parte 1 e na Parte 2.

\*Área de Engenharia Costeira e Oceanográfica, Programa de Engenharia Oceânica, COPPE/UFRJ.

De fato, permanece sem tratamento matemático adequado, um problema teórico e prático fundamental, nomeadamente a caracterização tridimensional do escoamento combinado correntes e ondas. Este aspecto será parcialmente abordado na Parte 4 desta série de artigos, que tratará da propagação de ondas em um campo de correntes variável espacialmente e de fenômenos associados à transferência de energia (refração, difração, ação de onda, tensão de radiação).

**Tabela 1 - Casos analíticos de perfil de velocidade e distribuição de vorticidade  $f(\psi)$  encontrados na literatura.**

<b>Tipo</b>	<b><math>U(z)</math></b>	<b><math>f(\psi)</math></b>
Caso I: uniforme	$U_0$	0
Caso II: vorticidade constante	$U_0 + \Omega_0 z$	$\Omega_0$
Caso III: tipo exponencial *	$U_0 \cosh[\alpha(z+h)] + \gamma^2 \psi$	
Caso IV: tipo senoidal *	$U_0 \cos[\beta(z+h)] - \gamma^2 \psi$	

\*  $\alpha, \beta, \gamma$  = números reais

A fim de obter comprovação experimental para as diversas abordagens teóricas, um número significativo de experimentos já foi realizado em canais e em bacias de ondas. Devido à importância deste tema, ele será abordado na Parte 5 desta série, pois está intrinsecamente relacionado ao desenvolvimento tecnológico atual aplicado à experimentação física.

## FUNDAMENTOS TEÓRICOS

### Sobre a velocidade horizontal

Vários equipamentos para medição de ondas baseiam-se em sensores de velocidade, posicionados em algum ponto da coluna de água, ou em perfiladores de velocidade ao longo da vertical. Tais instrumentos, de acordo com seus fabricantes, permitiriam identificar a direção de propagação da onda a partir das componentes horizontais da velocidade e do registro de pressão ou da elevação da superfície livre. A partir de uma hipótese de linearidade de superposição de ondas e com base na teoria de pequenas amplitudes na ausência de corrente subjacente, a estimativa do espectro da elevação da superfície livre  $\eta$ ,  $S_{\eta\eta}$ , é obtida através da relação com o espectros de velocidades horizontais,  $S_{uu}$ :

$$S_{\eta\eta}(\omega) = \frac{1}{\omega^2} \frac{\sinh^2 kh}{\cosh^2[k(z+h)]} S_{uu}(\omega) \quad (1)$$

onde  $\omega$  é a frequência angular da onda em relação a um observador fixo (frequência absoluta),  $z$  é a coordenada vertical do ponto de interesse, referenciada a partir do nível médio, e  $h$  é a profundidade local. O número de onda  $k = 2\pi/L$ , sendo  $L$  o comprimento de onda, relaciona-se com a frequência  $\omega$  através da equação de dispersão, em geral obtida pela Teoria Linear na ausência de correntes.

### Sobre a aceleração vertical

A medição de alturas de ondas com boias equipadas com acelerômetros admite, entre outras hipóteses, que a superfície livre seja obtida após a dupla integração no tempo da aceleração vertical na superfície livre ( $a_{(z)}$ ), o que equivale a supor uma relação linear:

$$a_{(z)}(x, z, t) = \eta_{tt} \quad \text{em } z=0 \quad (2)$$

Consequentemente, o espectro da superfície livre,  $S_{\eta\eta}(\omega)$ , relaciona-se com o espectro de acelerações verticais em  $z=0$ ,  $S_{a_{(z)}a_{(z)}}(\omega)$ , através da expressão:

$$S_{\eta\eta}(\omega) = \frac{1}{\omega^4} S_{a_{(z)}a_{(z)}} \quad (3)$$

A rigor, porém, outros movimentos e acelerações são medidas e o sistema de aquisição e de tratamento de dados é bem mais complexo. Mais adiante, volta-se a mencionar a aceleração próxima à superfície livre.

A expressão exata para a aceleração vertical da partícula,  $a_{(z)}$ , no referencial móvel que se desloca à mesma velocidade de propagação da onda,  $c$ , é dada pela expressão:

$$a_{(z)} = \Psi_x \Psi_{xz} - \Psi_z \Psi_{xx} \quad \text{em } z=\eta \quad (4)$$

No entanto, se a aceleração vertical fosse aproximada pela segunda derivada temporal da elevação  $\eta$ , em um referencial Galileano que acompanhasse a forma da onda com celeridade  $c$ , a expressão seria:

$$a_{(z)} = c^2 \eta_{xx} \quad (5)$$

Para expressar a equação (5) em termos da Função de Corrente, deriva-se a expressão da condição de contorno cinemática (equação 6) duas vezes em relação a x:

$$\psi(x, \eta(x)) = \psi_\eta \quad (6)$$

E obtém-se, finalmente, a seguinte aproximação para a aceleração vertical:

$$a_{(z)} = \frac{c^2}{(\psi_z)^2} \left[ (\psi_x \psi_{xx} - \psi_z \psi_{zx}) + \frac{\psi_x}{\psi_z} (\psi_z \psi_{zx} - \psi_x \psi_{zz}) \right] \text{ em } z = \eta \quad (7)$$

Comparando as equações (4) e (7), percebe-se quão diferentes podem ser as avaliações da aceleração vertical próximo à superfície livre, apenas devido à não linearidade do fenômeno. Se, além disso, incluir a presença de uma corrente (com ou sem vorticidade) percebe-se que a estimativa da altura de ondas a partir da aceleração vertical pode estar intrinsecamente contaminada por vários efeitos “espúrios”.

### Sobre a influência de corrente subjacente

As expressões (1) e (3) são válidas no caso de não haver corrente. Um problema numérico apresentado com estas equações ocorre em baixas frequências, pois as funções de transferência são inversamente proporcionais ao quadrado e à quarta potência da frequência absoluta, ou seja, crescem sem limites para baixas frequências. Levando em consideração o material discutido na Parte 1 desta série de artigos, percebe-se imediatamente a necessidade de incorporar o efeito Doppler. Além do mais, caso a corrente seja razoavelmente intensa, como ocorre próximo a embocaduras de baías e estuários, o movimento das boias é afetado, pois, por mais complacente que seja um sistema de fundo, haverá sempre um deslocamento residual do instrumento ao ser carreado pela corrente.

Os efeitos de uma corrente, uniforme ou com vorticidade constante, sobre a estimativa da altura das ondas a partir de registros de pressão foram discutidos na primeira e na segunda parte desta revisão sobre interação entre ondas e correntes (DIAS, 1992; NEVES e DIAS, 2013; DIAS e NEVES, 2013). Menos atenção, contudo, tem sido dada aos efeitos da não linearidade sobre a aceleração

vertical, apesar das medições direcionais de ondas utilizarem, desde a década de 1970, boias com acelerômetros.

A equação (2) é válida apenas para ondas de pequena amplitude, de baixa esbeltez e, certamente, despreza os termos de aceleração advectiva. Além disso, a transformação espectral mostra que a relação, entre o espectro de deslocamento da superfície livre e o de acelerações, varia com o inverso da quarta potência da frequência, o que constitui um problema bem conhecido na literatura para baixas frequências, na ausência de correntes (e.g. OCHI, 1998). Na presença de correntes, porém, sabe-se que a frequência intrínseca – medida por um observador que acompanhasse a corrente – deveria ser utilizada, produzindo resultados que poderiam diferir bastante daqueles obtidos com a frequência absoluta, medida por um observador fixo.

A expressão linear da aceleração vertical foi deduzida em termos da função de corrente (equação 4). Em termos práticos, coloca-se a pergunta: como relacionar a aceleração sentida pela boia com a realidade cinemática do escoamento combinado de onda e corrente? Sob o ponto de vista Lagrangeano, a aproximação linear sem corrente equivale a admitir que as partículas descrevam trajetórias elípticas fechadas; em segunda ordem na esbeltez da onda, porém, tais trajetórias não são fechadas devido ao deslocamento horizontal associado ao transporte de massa. Na presença de uma corrente, em vista da forte interação com a onda, não se poderia evidentemente falar em trajetórias fechadas, o transporte de massa não seria apenas de segunda ordem na esbeltez da onda e a boia seria arrastada pela correnteza até algum limite de resistência do sistema de amarração. Tal deslocamento provocaria uma transferência de força ao equipamento, influenciando assim as medições de aceleração. De fato, vários estudos na literatura indicavam a influência da não linearidade da onda, associada ao transporte de massa, sobre o perfil da corrente. Ou seja, não apenas a corrente interfere com a onda, mas a própria onda interfere com a corrente, conforme discutido por Srokosz (1985), que apresentou expressões teóricas para dispersão e para a superfície livre, explicitando a influência da vorticidade constante em segunda ordem na esbeltez da onda.

No caso de sensores tipo PUV, em que se mede a pressão e duas componentes horizontais de velocidade, o equipamento é usualmente colocado próximo ao fundo. Pode-se argumentar que, nesta condição, a velocidade medida difere daquela existente próximo à superfície livre, pois é contaminada pela rugosidade do fundo (camada limite) e inde-

pende da própria distribuição vertical das velocidades (vorticidade). Tais efeitos induziriam desvios na estimativa de comprimento de onda, ou à incorreta inclusão do próprio efeito Doppler sobre a frequência da onda. Uma evolução desses equipamentos é o SUV, que mede, por reflexão acústica, a elevação instantânea da superfície livre e duas componentes da velocidade. No entanto, é preciso observar que, na presença de uma corrente, favorável ou contrária, a esbeltez da onda é alterada e, consequentemente, seriam “contaminadas” as estimativas dos espectros cruzados e auto-espectros das velocidades horizontais e da elevação da superfície livre.

No caso de equipamentos tipo ADCP, haveria a possibilidade de incorporar informação sobre a vorticidade junto à superfície livre no processamento das grandezas dinâmicas da onda. Esta categoria de equipamentos oferecia a vantagem adicional de não interferir com o escoamento (e.g. HERBERS et al. 1991). Observa-se, porém, que, na natureza, a ocorrência de ondas oriundas de várias direções é muito frequente e estes equipamentos mostraram-se bem mais eficazes na separação direcional dos estados de mar (e.g STRONG et al. 2000<sup>b</sup>) do que as boias e os PUV.

Apesar dessas dificuldades, as campanhas de medição e os experimentos que foram conduzidos no passado, com diferentes tipos de equipamentos que desprezavam a presença da corrente, mostraram resultados cuja variabilidade era supostamente aceitável para fins de engenharia, face às demais incertezas então envolvidas. Em geral as fontes de ruído eram atribuídas à turbulência e à interação entre ondas, no entanto poderiam ser atribuídas a fenômenos de interação entre ondas e correntes, estas eventualmente associadas a marés ou à deriva de vento. À medida que os projetos se tornaram mais exigentes quanto à precisão de resultados, que avançou o entendimento teórico sobre interação entre ondas e correntes, e que a capacidade de medição evoluiu muito, fez-se necessário aprofundar os conhecimentos sobre a interação onda-corrente.

Problema mais sério surge se existir uma corrente rotacional: não apenas os efeitos não lineares podem se tornar mais fortes devido à presença da vorticidade, mas a própria equação de dispersão é afetada de uma forma mais significativa do que o simples efeito Doppler (considerando aqui a velocidade do escoamento permanente próximo à superfície), como foi visto na Parte 1. Todas as demais grandezas derivadas, cinemáticas e dinâmicas, serão influenciadas por tal corrente. Na medida em que os instrumentos não incorporam tais efeitos no seu processamento interno, justifica-se a investigação

teórica e experimental sobre a interpretação de dados de ondas na presença de correntes, bem como a revisão crítica sobre o planejamento das campanhas de medição de ondas na Natureza e em laboratório (NEVES et al. 2012). Reitera-se que, no presente trabalho, o enfoque será restrito à situação unidirecional deixando para a Parte 4 os efeitos direcionais da interação entre ondas e correntes.

## REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### Estudos Teóricos

Desde o trabalho pioneiro de Franz Joseph von Gerstner em 1802 sobre ondas descritas por uma trocoide (rotacionais), o tema foi abandonado em favor das teorias irrotacionais, em sequência à teoria inicialmente desenvolvida por Airy (1841) e Stokes (1847) (CRAIK, 2004). Mais recentemente, porém, a investigação sobre vorticidade associada a escoamentos oscilatórios tem despertado maior interesse, especialmente no contexto de interação entre ondas e correntes. Os exemplos na literatura citados a seguir referem-se a escoamentos bidimensionais na vertical (2DV), porém ao final da seção será feita uma breve discussão sobre o papel das ondas no transporte tridimensional de vorticidade.

Possivelmente o primeiro estudo teórico sobre ondas superpostas a uma corrente com distribuição arbitrária de vorticidade seja devido a Dubreil-Jacotin (1934), que propôs uma transformação das coordenadas geométricas  $\psi(x,y)$  para coordenadas  $y(x,\psi)$ , onde  $\psi$  é a linha de corrente, indicado na equação (2) da Parte 1.

Thompson (1949) apresentou resultados para a equação de dispersão e propriedades dinâmicas do escoamento rotacional ondas e correntes. Hunt (1955) e Yih (1972) apresentaram trabalhos fundamentais para o entendimento da estabilidade do escoamento combinado onda-corrente em função do sinal da segunda derivada, com respeito à dimensão vertical, do perfil de velocidade da corrente. As expressões originalmente apresentadas por Hunt (1955) foram revistas por Yih (1972), que deduziu novas expressões teóricas para a distribuição de velocidade e da equação de dispersão. De acordo ainda com Peregrine (1976) e Thomas (1981), a condição de estabilidade linear poderia ser estabelecida em função da equação de Rayleigh em termos da componente vertical da velocidade,  $w(z)$ ,

$$\frac{d^2w}{dz^2} - \left[ k^2 - \frac{k}{\omega - kU} \frac{d^2U}{dz^2} \right] w = 0 \quad (8)$$

onde  $U(z)$  é o perfil da velocidade da corrente. Tal equação não admite solução analítica, exceto para a condição de segunda derivada nula do perfil de velocidade. Evidenciam-se duas condições de singularidade: quando a velocidade da corrente iguala-se à celeridade da onda em alguma posição ao longo da vertical ou quando a segunda derivada da velocidade da corrente  $U$  se anula (pontos de inflexão do perfil da corrente). Com condições de contorno adequadas e a partir de uma transformação da ordenada vertical, Thomas (1981) integrou a equação (8) com auxílio de um método de Runge-Kutta e comparou os resultados com medições em canal de ondas.

Brooke Benjamin (1961) estabeleceu as condições para a formação de uma onda solitária superposta a uma corrente com vorticidade arbitrária, usando uma transformação de coordenadas semelhante àquela proposta por Dubreil-Jacotin (1934). Uma conclusão importante é a impossibilidade da existência de uma onda estável no caso de formação de um ponto de estagnação em um referencial que se deslocasse à celeridade da onda (ou seja, quando a velocidade da corrente igualasse a celeridade da onda). Este autor indicou também a possibilidade de estender a mesma abordagem para a formação de ondas cnoidais rotacionais.

Fenton (1973) desenvolveu um método de perturbação para a função de corrente em um sistema que se deslocasse com a onda, onde a vorticidade fosse dada pela derivada da velocidade (média) da corrente em relação à coordenada vertical. Em ordem zero, a elevação da superfície livre é o nível d'água constante e a função de corrente é simplesmente a integral da velocidade na direção vertical. O autor apresentou os seguintes resultados: (1) até primeira ordem (na esbeltez da onda) para corrente com perfil vertical arbitrário; (2) para ondas de amplitude finita no caso particular de vorticidade constante (ondas cnoidais e solitária); (3) para ondas “imóveis”<sup>1</sup>, ou seja quando a celeridade é nula, em que o perfil da velocidade é função de uma potência da elevação acima do fundo, em geral adotada como 1/7. O autor concluiu que a vorticidade, em todos os casos, era um fator determinante para o modo de propagação da onda.

A Teoria da Função de Corrente, conforme proposta por Dean (1965), foi estendida por Dalrymple (1973) para um perfil de corrente em duas camadas, cada qual com vorticidade constante, sem

descontinuidade na velocidade. O autor sugeriu que o problema matemático não possuía solução única, o que era corroborado pela existência de mais de uma solução da equação de dispersão na presença de corrente, para um mesmo conjunto de valores de altura, período e profundidade. De fato, como esta teoria se baseia em um método de minimização, poderia ocorrer a convergência para alguma pseudo-solução correspondente a um mínimo local, eventualmente com cristas múltiplas, conforme experimentos numéricos conduzidos por Dalrymple.

Para validar seu modelo numérico, Dalrymple (1973) utilizou as medições do experimento realizado entre setembro de 1960 e novembro de 1963 (Wave Project II), conduzido no Golfo do México em lâmina d'água de 30 m, durante o qual foram observadas ondas de 12 m de altura por ocasião do furacão Carla. Sensores de pressão foram colocados em oito elevações ao longo de um pilar, desde o fundo até a superfície, e a elevação da superfície livre foi observada diretamente com o auxílio de um *wave-staff*. A comparação entre os resultados teóricos previstos pela teoria de Dean (apenas corrente) e a teoria de Dalrymple (com vorticidade  $\Omega_0 = 0,025 \text{ s}^{-1}$ ) indicou diferenças de 10% entre as velocidades máximas previstas pelas respectivas teorias, embora os erros na condição de contorno dinâmica na superfície livre nas duas teorias, para a mesma ordem de aproximação numérica, fossem praticamente os mesmos. É importante observar que diferenças de 10% na estimativa da velocidade implicam em diferenças de 20% na estimativa da força de arraste sobre a estrutura, e isto foi verificado para uma variação de velocidade de apenas 2,5 cm/s em 1 m ao longo da vertical.

Neves (1987) investigou teoricamente a existência de soluções periódicas para a equação da vorticidade

$$\omega = -\nabla^2 \psi = a\psi \pm r^2 \log|\psi| \quad (9)$$

utilizando um método de separação de variáveis, para a qual obteve solução numérica utilizando um método de Galerkin semelhante àquele adotado por Dean (1965) e Dalrymple (1973). A característica principal desta solução é a distribuição periódica da vorticidade ao longo do comprimento de onda, ou seja, existe uma parcela significativa da vorticidade total que é devida ao gradiente horizontal da velocidade vertical.

<sup>1</sup>tradução do termo inglês “stationarywaves”, não confundir com “standingwaves”, que em geral é traduzido como “ondas estacionárias”

Kishida e Sobey (1988) apresentaram uma solução de Stokes de terceira ordem em  $(kH/2)$  para o problema de superposição de onda com uma corrente com vorticidade constante  $\Omega_0$ . Estes autores compararam seus resultados com aqueles apresentados por Dean (1974) como Casos 7B, 7C e 8B'. Tais casos são classificados em função dos parâmetros adimensionais  $(\omega^2 h/g, \omega^2 H/g, H/H_b)$  que relacionam a frequência angular ( $\omega$ ), a profundidade ( $h$ ), a altura ( $H$ ), a altura de arrebentação para uma dada profundidade ( $H_b$ ) e a aceleração da gravidade ( $g$ ); os casos selecionados correspondiam às seguintes situações desses três parâmetros:  $(0,4\pi, 0,39, 50\%)$ ;  $(0,4\pi, 0,59, 75\%)$  e  $(\pi, 0,39, 50\%)$ . Comparações foram feitas para várias propriedades (e.g. dispersão, elevação de crista e cavado, energia), entre elas os campos de pressão, de velocidade e de aceleração horizontais. Os autores encontraram pouca diferença entre a situação com e sem vorticidade, porém significativa diferença para a presença da corrente em relação ao caso sem corrente. É fato, porém, que a vorticidade adimensional ( $\Omega_0/\omega$ ) era relativamente fraca, apenas 0,025, e a corrente adimensional média ( $\omega U_M/g$ ) valia 0,1. Consequentemente, não se sustenta a generalização sugerida pelos autores quanto a desconsiderar a vorticidade. Além disso, os casos selecionados não eram suficientemente não lineares para que uma teoria acima de terceira ordem fosse recomendada.

Thomas (1990) retornou ao tema da interação de ondas e correntes, considerando desta vez ondas não lineares. Ele utilizou a transformação de Dubreil-Jacotin (DUBREIL-JACOTIN 1934; DALRYMPLE 1973), equação (2) da Parte 1 desta série de artigos, e desenvolveu em série de Fourier as expressões da elevação da linha de corrente. Um dos problemas que se coloca neste método é como exprimir, a priori, a distribuição de vorticidade em função da linha de corrente.

Swan (1992) apresentou uma solução, de segunda ordem na esbeltez da onda ( $kH/2$ ), para a função de corrente, a partir de uma transformação de coordenadas espaciais para um sistema ortogonal curvilíneo de coordenadas alinhado com as linhas de corrente. Este trabalho representava um avanço teórico significativo em relação ao de Kishida e Sobey (1988), pois se aplicava exatamente à condição de forte cisalhamento junto à superfície, como no caso de correntes geradas por vento. O autor apresentou resultados para uma corrente cujo perfil vertical era aproximado, na região superior da coluna d'água, por um polinômio de terceiro grau na coordenada vertical distorcida, e, na região restante

até o fundo, a velocidade de corrente era nula. O autor confirmou a importância da distribuição da vorticidade – e não apenas da velocidade – para toda a cinemática do escoamento onda-corrente. Este modelo foi também aplicado para o caso de espectros de ondas (SWAN e JAMES, 1998).

Sobey e Hughes (1999) apresentaram uma técnica não linear no domínio do tempo para a interpretação local de registros de equipamentos PUV. De certo modo, tal método classifica-se como uma técnica adaptativa, na medida em que se aplica a segmentos do registro bem mais curtos do que um período da onda. Difere, portanto, das técnicas espetrais que se aplicam a um registro com duração em geral da ordem de 17 a 20 minutos. Em primeiro lugar, estes autores enfatizaram as discrepâncias de sensibilidade, das taxas de aquisição e da resposta em frequência entre os sensores de velocidade e os de pressão. Em segundo lugar, muitas vezes supõe-se equivocadamente a validade da teoria linear sem corrente (o que eventualmente está embutido no próprio processamento de dados do instrumento), resultando na incorreta estimativa da elevação da superfície livre. Em terceiro lugar, a maioria dos métodos de análise considera a onda como um processo estacionário e ergódico, o que muitas vezes pode não acontecer na natureza, por vários motivos.

Sobey e Hughes (1999) apresentaram dois métodos: um espectral (global) e outro no domínio do tempo (local). O primeiro se vale de expressões de função de transferência para velocidade e pressão semelhantes àquelas apresentadas, respectivamente, mais adiante neste trabalho e na Parte 2. As expressões para determinação do espectro direcional são finalmente apresentadas pelos autores, com as devidas correções de efeito Doppler e de posicionamento vertical dos sensores de pressão e de velocidade. O segundo método baseia-se na expansão em série de Fourier com  $J$  componentes, tendo como incógnitas os respectivos coeficientes, a frequência angular local, o comprimento de onda instantâneo e a fase da onda, ajustando-as por mínimos quadrados aos valores de pressão e de velocidade em  $N$  instantes consecutivos, respeitando as expressões não lineares das condições de contorno na superfície livre.

Conforme observado pelos autores, usualmente na prática negligenciava-se o efeito Doppler na análise dos registros de onda, o que poderia conduzir a sérios erros na estimativa do número de onda, no cálculo do fator de resposta de pressão e na correção da velocidade. Eles deixavam também subentendido que processos tridimensionais podem

estar presentes na Natureza, distorcendo a aplicação do método proposto.

Rego (1999) estendeu as equações de Boussinesq à ordem ( $h/L$ )<sup>2</sup> para um escoamento com vorticidade horizontal constante ao longo da vertical. A autora deduz expressões para a dispersão e para a pressão, evidenciando a influência da vorticidade nessas grandezas. O modelo foi aplicado à condição de uma onda que se propagava sobre uma estrutura trapezoidal submersa, semelhante àquela estudada por Lai et al. (1989), sem que houvesse arrebentação da onda. Tal abordagem difere das apresentadas anteriormente pois não supõe uma divisão a priori do escoamento em uma parte rotacional (corrente) e outra irrotacional (onda). As equações de transporte tridimensional de vorticidade dentro do contexto das equações de Boussinesq foram discutidas por Rego e Neves (2001). Zhang et al. (2013) propuseram um modelo de Boussinesq rotacional, no entanto apresentam resultados apenas para ondas irrotacionais. Conforme citado por estes autores, embora a inclusão da vorticidade seja uma condição importante para aplicação de modelos de Boussinesq na zona de arrebentação, persiste um problema fundamental: como especificar a vorticidade de maneira fisicamente bem justificada.

Thomas et al. (2012) aprofundaram o estudo da influência da vorticidade, suposta constante, na estabilidade de um trem de ondas, baseando-se na equação não linear de Schrödinger. Esta abordagem abre um novo caminho para o entendimento do papel desempenhado pela vorticidade em escoamentos costeiros, embora considere o problema bidimensional na vertical.

### **Estudos Numéricos**

Possivelmente o primeiro modelo numérico para resolver o escoamento resultante da superposição de ondas a uma corrente com perfil de vorticidade arbitrário foi elaborado por Dalrymple (1973, 1974), resolvendo por diferenças finitas a equação de Dubreil-Jacotin (1934).

Telles da Silva e Peregrine (1986) estudaram o caso bidimensional de ondas extremas superpostas a uma corrente com vorticidade constante. O escoamento era subdividido em uma parcela rotacional (corrente) e em uma parcela irrotacional (onda). Os autores utilizaram uma transformação conforme para resolver a parte irrotacional do escoamento.

Seguindo o modelo de Dalrymple (1973) para um perfil de corrente bilinear, Cummins e Swan (1993) propuseram um modelo de 5 camadas

para descrever o perfil de velocidade da corrente, com vorticidade constante em cada camada. Deste modo, os autores conseguem ajustar com mais graus de liberdade um perfil de vorticidade da corrente.

Lalli e Bassanini (2004) propuseram um modelo numérico para interação entre ondas e correntes, que se baseava na decomposição do campo de velocidades em uma parcela rotacional, promediada ao longo da vertical (vorticidade vertical apenas) e associada à turbulência (transferência lateral de quantidade de movimento horizontal), e outra parcela potencial tridimensional. Tal decomposição não contempla os mecanismos de transferência de vorticidade, nem a influência da vorticidade horizontal na dinâmica da interação onda-corrente.

Olabarrieta et al. (2010) desenvolveram um modelo numérico bidimensional na vertical, que se baseia na divisão da pressão em duas parcelas, uma associada à corrente e outra senoidal, no espaço e no tempo, associada à onda. O modelo numérico resolve as equações do movimento, incluindo os termos de turbulência, e a equação de Orr-Sommerfeld para a pressão. Ele é desenvolvido em três etapas, na primeira apenas a corrente é simulada; quando esta estabiliza numericamente, adiciona-se a contribuição da corrente e aguarda-se que este sistema também se estabilize; o resultado da corrente média então é comparado com a situação inicial. As comparações com dados de laboratório são subdivididas em três situações: onda e corrente no mesmo sentido, corrente contrária à onda e ângulo de 90° entre onda e corrente.

Moreira e Peregrine (2012) estudaram a superposição, em águas profundas, de uma onda linear com uma corrente variável ao longo da direção de propagação da onda. A construção do perfil de variação longitudinal da corrente é feita através de uma distribuição conveniente de singularidades (vórtices, fontes e sumidouros), dispostos em profundidade fora do alcance do movimento oscilatório. São simulados casos para corrente favorável ou contrária, mas o interesse principal dos autores reside na investigação das condições de bloqueio da onda pela corrente e seus efeitos sobre a distribuição das alturas. O método numérico consiste no cálculo de integrais de contorno não lineares para escoamentos a superfície livre. Acompanhando a maioria da bibliografia citada, os autores concentram sua atenção em questões relacionadas à dispersão, à variação da altura e à energia do escoamento, deixando de apresentar resultados para a distribuição de velocidades das partículas, especialmente a distribuição vertical do campo de velocidades, e comparar os resultados numéricos com possíveis

dados experimentais obtidos com ADV. Na verdade, este modelo numérico parece ser o que mais se adequaria a ser aplicado ao escoamento produzido em laboratório para simulação de ondas e correntes, como será apresentado na Parte 5 desta série de artigos, posto que, em um canal de ondas, necessariamente se formam regiões onde a corrente é variável, tanto na entrada quanto na saída do escoamento.

Existem ainda investigações numéricas sobre a interação entre ondas e correntes no contexto da simulação da circulação hidrodinâmica em áreas costeiras induzida por sistemas meteorológicos de mesoescala. Nestes modelos, evidencia-se o efeito da inclusão das ondas sobre a propagação da maré e sobre a formação da maré meteorológica (“storm surge”) devido às mudanças na dinâmica da camada limite no fundo (fator de atrito) e na rugosidade da superfície livre (interação mar-atmosfera em micro-escala). Estes sistemas numéricos acoplados utilizam um modelo de circulação atmosférica (e.g. MM5, WRF, RAMS), um modelo hidrodinâmico preferencialmente tridimensional e em grades não estruturadas, de acordo com a experiência relatada por Sun et al. (2013) (por exemplo, o FVCOM - Finite Volume CCommunityModel, o Princeton OceanModel- POM, além de modelos diversos em diferenças finitas ou em elementos finitos), e um modelo de geração de ondas (por exemplo, o WAM ciclo 4,0 SWAN, o SWAVE). Tais modelos são alimentados e/ou calibrados e/ou corrigidos dinamicamente com informações de instrumentos e dados de reanálise. Exemplos na costa e plataforma continental da Carolina do Sul, EUA (XIE et al. 2001, 2003; PENG et al. 2006), no Mar Amarelo abrangendo a costa e plataforma continental da China, Coreia e Japão (CHOI et al. 2003) e costa e plataforma continental da Nova Inglaterra, EUA (SUN et al. 2013), sempre associados à ocorrência de eventos meteorológicos extremos e com interesse na simulação e previsão de inundação de áreas costeiras, indicaram que a importância da interação onda-corrente se dava principalmente como variação espacial da tensão de radiação e mudanças no transporte de massas mais do que como mudanças na altura significativa ou no período de pico das ondas.

## FORMULAÇÃO TEÓRICA

### Colocação do problema matemático

A colocação do problema matemático foi apresentada nas Partes 1 e 2: o fluido é inviscido e

incompressível, as ondas possuem crista longa de modo que o problema possa ser considerado como bidimensional em perfil (2DV), o fundo é horizontal, rígido e impermeável e existe uma corrente colinear à onda, de modo que a forma da onda permaneça constante ao longo da propagação. Nas duas Partes anteriores e na revisão bibliográfica aqui apresentada, foi observado que:

1. o período da onda observado em um referencial fixo (período aparente) é diferente daquele medido em um referencial que se desloca com o fluido (período intrínseco), fenômeno esse denominado efeito Doppler;
2. os ondógrafos de pressão tendem a subestimar a elevação da crista e a superestimar a elevação do cavado, como consequência da não-linearidade do fenômeno;
3. a vorticidade altera significativamente a pressão dinâmica e a dispersão das ondas, embora tais efeitos não sejam considerados quando se utilizam teorias potenciais;
4. ao calcular o espectro cruzado entre pressão e velocidade orbital sem levar em conta os efeitos da corrente em ambas grandezas, pode-se incorrer em graves erros na estimativa do espectro direcional.
5. a vorticidade junto à superfície livre altera a dinâmica de todo o escoamento;
6. tanto a corrente altera a onda, como a onda altera a corrente, devido a processos não lineares.

O ponto central de investigação neste trabalho é saber como a presença de uma corrente pode interferir com a interpretação das medições de velocidade ou de aceleração, especialmente quanto à estimativa da direção de propagação, como será discutido mais adiante.

As equações governantes são apresentadas detalhadamente na Parte 1 desta série de trabalhos (equações 7 a 14) em termos da função de corrente  $\psi$ , definida como:

$$u - c = -\psi_z \quad \text{e} \quad w = \psi_x \quad (10)$$

onde,  $u$  e  $w$  são as velocidades orbitais,  $c$  é a celeridade (constante) da onda,  $x$  é a coordenada horizontal e  $z$  a coordenada vertical.

Para um escoamento permanente de fluido inviscido, a equação integrada da quantidade de movimento é

$$\nabla \left( \frac{1}{2} \vec{u} \bullet \vec{u} + \frac{p}{\rho} + gz \right) = \vec{u} \times \vec{\Omega} \quad (11)$$

onde  $\vec{u}$  é o vetor velocidade total,  $\vec{\Omega}$  é o vetor vorticidade,  $p$  é a pressão,  $\rho$  é a massa específica da água do mar,  $g$  é a aceleração da gravidade, e  $z$  é a cota em relação ao nível médio.

O segundo membro da equação (11) representa um aumento no campo de aceleração do escoamento combinado resultante da interação onda-corrente, na presença de vorticidade. Este termo é perpendicular à velocidade em todos os pontos do escoamento e, no caso de escoamentos bidimensionais, pode representar um acréscimo à aceleração vertical. Próximo à superfície livre, onde os efeitos não lineares são mais fortes e, também, onde as tensões devido ao vento podem ser mais intensas, espera-se que tal contribuição à aceleração vertical sob a crista ou sob o cavado seja mais importante.

## RESULTADOS DA TEORIA LINEAR

### Formulação do problema

As equações governantes e as condições de contorno a serem consideradas nesta seção são lineares, e a distribuição de vorticidade,  $f(\psi)$ , é uma função constante ou uma função linear de  $\psi$ .

A linearização das condições de contorno na superfície livre, cinemática e dinâmica, impõe a expansão em série de Taylor em torno de  $z=0$ , em vez de  $z=\eta$ . Os termos de segunda ordem na altura da onda são então desprezados. A Condição de Contorno Cinemática na Superfície Livre (CCCSL), expandida em série de Taylor em torno de  $z=0$ , escreve-se como:

$$\psi(x, \eta) = \psi(x, 0) + \eta \psi_z(x, 0) + \frac{1}{2} \eta^2 \psi_{zz}(x, 0) + \dots = \psi_\eta \quad (12)$$

e a Condição de Contorno Dinâmica na Superfície Livre (CCDSL) é escrita como:

$$gz + \frac{1}{2} (\psi_x^2 + \psi_z^2) \Big|_{z=0} + \eta (\psi_x \psi_{xz} + \psi_z \psi_{zz}) \Big|_{z=0} + \dots + \int_0^{\psi_\eta} f(\psi) d\psi = Q \quad \text{em } z=0 \quad (13)$$

### Caso I: Velocidade uniforme

Neste caso, o escoamento é irrotacional, a função de corrente satisfaz a equação de Laplace, a

solução do problema linearizado é apresentada na equação (21) da Parte 1, e a equação de dispersão é dada pela expressão:

$$(\omega - kU_0)^2 = gk \tanh kh \quad (14)$$

denominando-se  $\sigma = \omega - kU_0$  como *frequência intrínseca*.

Após linearização das equações do movimento, a expressão da velocidade horizontal pode ser deduzida (DEAN e DALRYMPLE, 1991):

$$u = \frac{H}{2} \frac{gk}{\omega - kU_0} \frac{\cosh[k(z+h)]}{\cosh kh} \cos(kx) \quad (15)$$

$$= \omega K_{1,u}(z; \omega) \eta(x)$$

onde

$$K_{1,u}(z; \omega) = \left( 1 - kh \frac{U_0}{\omega h} \right) \frac{\cosh[k(z+h)]}{\sinh kh} \quad (16)$$

Neste caso, a função de transferência entre os espectros de velocidade horizontal na elevação  $z$  e de elevação da superfície livre seria

$$S_{mn} = \frac{1}{(\omega - kU_0)^2 \cosh^2[k(z+h)]} S_{uu} = \frac{K_{1,u}^{-2}(z; h)}{\omega^2} S_{uu} \quad (17)$$

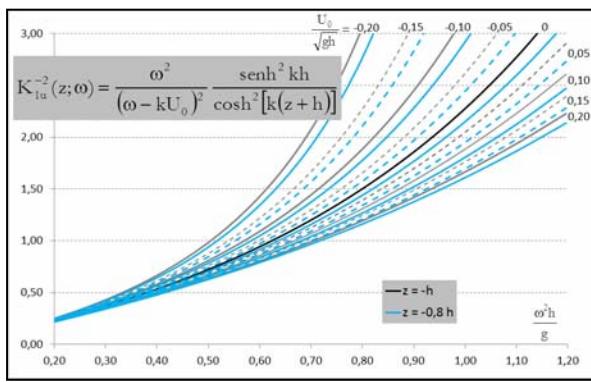
Esta expressão é semelhante àquela apresentada por Hedges et al. (1985). A Tabela 2 apresenta o fator de resposta de velocidade para um instrumento colocado no fundo ( $z=-h$ ) e a Figura 1 apresenta o gráfico desta função de transferência espectral de velocidade para elevações  $z=-h$  e  $z=0,8h$ , e para diferentes valores do número de Froude  $U_0/\sqrt{gh}$ ; observe que, em frequências acima de 1 rad/s (períodos inferiores a 6,3 s), a diferença de valores da função de transferência entre as condições sem corrente e com corrente cresce monotonicamente com a frequência. Nesta figura, a linha central (mais grossa) corresponde à velocidade nula: as curvas acima desta linha indicam a corrente contrária e, abaixo, indicam corrente favorável. É evidente o crescimento do erro envolvido ao se desprezar a presença da corrente, o que é coerente com o decaimento da velocidade orbital ao longo da profundidade em águas intermediárias.

Alternativamente, pode-se apresentar a função de transferência da velocidade em função dos parâmetros  $(\omega^2 h/g)$  e  $(U_0/\omega h)$ , que são indicadores

da profundidade relativa para o comprimento em águas profundas e do número de Strouhal, respectivamente.

**Tabela 2 - Fator de resposta de velocidade,  $(K_{1,u})^2$  no fundo ( $z=h$ ).**

$U_0/\omega h$	$\omega^2 h/g$				
	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
-0,20	0,8651	7,4604	-	-	-
-0,15	0,8168	4,2812	114,3309	-	-
-0,10	0,7790	3,1778	16,7772	275,9166	-
-0,09	0,7724	3,0381	14,0577	140,1114	-
-0,08	0,7661	2,9146	12,0948	85,6342	-
-0,07	0,7600	2,8045	10,6211	58,5977	-
-0,06	0,7542	2,7058	9,4797	43,2421	306,0395
-0,05	0,7486	2,6168	8,5728	33,6683	177,1442
-0,04	0,7432	2,5360	7,8371	27,2775	115,4585
-0,03	0,7380	2,4625	7,2295	22,7835	81,6582
-0,02	0,7330	2,3953	6,7203	19,4911	61,2748
-0,01	0,7282	2,3336	6,2878	16,9983	48,0743
0,00	0,7235	2,2767	5,9164	15,0590	39,0424
0,01	0,7191	2,2242	5,5944	13,5158	32,5874
0,02	0,7147	2,1754	5,3127	12,2641	27,8080
0,03	0,7105	2,1301	5,0643	11,2321	24,1646
0,04	0,7065	2,0879	4,8439	10,3691	21,3185
0,05	0,7026	2,0485	4,6469	9,6384	19,0485
0,06	0,6988	2,0116	4,4701	9,0130	17,2055
0,07	0,6951	1,9769	4,3104	8,4726	15,6861
0,08	0,6916	1,9443	4,1655	8,0016	14,4163
0,09	0,6881	1,9137	4,0336	7,5879	13,3425
0,10	0,6848	1,8847	3,9130	7,2221	12,4250
0,15	0,6695	1,7615	3,4380	5,8914	9,3368
0,20	0,6562	1,6656	3,1068	5,0606	7,6036



**Figura 1 - Função de resposta espectral para a componente horizontal da velocidade orbital – Caso I. Ponto situado no fundo e a uma elevação de 20% da profundidade acima do fundo.**

Com base na expressão da aceleração vertical,

$$a_{(z)} = \frac{H}{2} (\omega - kU_0)^2 \frac{\operatorname{senh}[k(z+h)]}{\operatorname{senh} kh} \cos(kx) \quad (18)$$

$$= \omega^2 K_{1,a(z)}(z; \omega) \eta(x)$$

Onde

$$K_{1,a(z)}(z; \omega) = \left(1 - kh \frac{U_0}{\omega h}\right)^2 \frac{\operatorname{senh}[k(z+h)]}{\operatorname{senh} kh} \quad (19)$$

obtém-se a função de transferência entre a aceleração vertical e o deslocamento da superfície livre. Para um instrumento posicionado na superfície livre, ou seja, considerando aproximadamente  $z=0$ , segue-se

$$S_{\eta\eta} = \frac{1}{(\omega - kU_0)^4} S_{a_{(z)}a_{(z)}} \quad (20)$$

Para uma elevação arbitrária  $z$  abaixo da superfície (nível médio), a relação entre os espectros é:

$$S_{\eta\eta} = \frac{K_{1,a(z)}^2(z; \omega)}{\omega^4} S_{a_{(z)}a_{(z)}} \quad (21)$$

Nas expressões anteriores, usou-se a relação de dispersão dada pela equação (14).

Estas expressões são algebricamente semelhantes àquelas obtidas no caso sem corrente, desde que se considere a frequência intrínseca do movimento (período intrínseco em oposição ao período aparente que é medido por um observador fixo em relação ao fundo). Os valores, contudo, podem diferir significativamente.

Em relação ao espectro da aceleração vertical próximo à superfície, o erro entre os casos com ou sem corrente varia com a quarta potência da razão entre as frequências intrínseca e aparente, de acordo com a expressão:

$$\delta_a = \left( \frac{\omega}{\omega - kU_0} \right)^4 - 1 \quad (22)$$

A Tabela 3 mostra os valores da função de transferência adimensional para a aceleração verti-

cal (por exemplo, uma boia na superfície) como função da profundidade relativa aparente ( $\omega^2 h/g$ ) e do número de Strouhal para a corrente ( $U_0/\omega h$ ). A linha central nesta Tabela corresponde ao caso sem corrente. Consequentemente, conhecendo-se uma situação particular de corrente, o período da onda em relação a um observador fixo e a profundidade d'água local, é possível calcular o erro na estimativa da altura de onda, comparando-se o valor real com o valor na linha central (para a mesma profundidade relativa aparente).

**Tabela 3 - Fator de resposta adimensional de aceleração em  $z=0$ ,  $K_{1,a(z)}$  (0;  $\omega$ ).**

$U_0/\omega h$	$\omega^2 h/g$				
	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
-0,20	1,4188	1,9933	–	–	–
-0,15	1,2880	1,5676	2,3183	–	–
-0,10	1,1775	1,3140	1,5182	1,9121	3,9968
-0,09	1,1574	1,2737	1,4370	1,7138	2,3090
-0,08	1,1378	1,2360	1,3662	1,5664	1,9102
-0,07	1,1189	1,2006	1,3035	1,4501	1,6705
-0,06	1,1004	1,1672	1,2475	1,3548	1,5019
-0,05	1,0825	1,1356	1,1969	1,2745	1,3738
-0,04	1,0651	1,1057	1,1509	1,2053	1,2714
-0,03	1,0482	1,0773	1,1086	1,1449	1,1870
-0,02	1,0317	1,0503	1,0697	1,0913	1,1155
-0,01	1,0156	1,0246	1,0336	1,0434	1,0539
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,01	0,9848	0,9765	0,9686	0,9605	0,9522
0,02	0,9699	0,9541	0,9392	0,9243	0,9094
0,03	0,9554	0,9326	0,9116	0,8910	0,8708
0,04	0,9413	0,9119	0,8855	0,8601	0,8356
0,05	0,9275	0,8921	0,8608	0,8314	0,8034
0,06	0,9141	0,8731	0,8375	0,8046	0,7738
0,07	0,9010	0,8547	0,8154	0,7795	0,7464
0,08	0,8881	0,8371	0,7943	0,7559	0,7209
0,09	0,8756	0,8200	0,7742	0,7337	0,6971
0,10	0,8634	0,8036	0,7551	0,7127	0,6749
0,15	0,8062	0,7295	0,6711	0,6229	0,5816
0,20	0,7549	0,6663	0,6024	0,5517	0,5099

## Caso II: Vorticidade constante

Na presença de vorticidade, a dinâmica da interação onda-corrente é mais complexa, tendo em vista a equação do movimento integrada (11). Existe um acréscimo no campo de aceleração do escoamento combinado, devido à interação entre

onda e corrente. A solução linear para a função de corrente e a correspondente equação de dispersão são apresentadas na Parte 1, respectivamente as equações (22) e (28). As expressões para a componente horizontal da velocidade orbital e para a aceleração vertical são deduzidas a partir da expressão da função de corrente:

$$u = \frac{H}{2} \left( \frac{gk}{\omega - kU_s} - \Omega_0 \right) C(z) \cos(kx) \quad (23)$$

$$a_{(z)} = \frac{H}{2} (\omega - kU_s) [\omega - k(U_s + \Omega_0 z)] S(z) \cos(kx) \quad (24)$$

onde  $C(z) = \frac{\cosh[k(z+h)]}{\cosh kh}$ ,  $S(z) = \frac{\sinh[k(z+h)]}{\sinh kh}$

$U_s = U_0 + \Omega_0 h$  é a velocidade da corrente na superfície livre. A aceleração vertical em  $z=0$  reduz-se à expressão:

$$a_{(z)} \Big|_{z=0} = -\frac{H}{2} (\omega - kU_s)^2 \cos(kx) \quad (25)$$

Utilizando a equação de dispersão apresentada na equação (28) da Parte 1, a expressão da velocidade horizontal assume uma forma algébrica semelhante àquela mostrada na equação (15), substituindo  $U_0$  pela velocidade na superfície livre  $U_s$ :

$$u = \frac{H}{2} (\omega - kU_s) \frac{\cosh[k(z+h)]}{\sinh kh} \cos(kx) \quad (26)$$

$$= \omega K_{2,u}(z; \omega) \eta(x)$$

Em geral, valem as expressões para a velocidade horizontal e para a aceleração vertical:

$$K_{2,u}(z; \omega) = \left( 1 - kh \frac{U_s}{\omega h} \right) \frac{\cosh[k(z+h)]}{\sinh kh} \quad (27)$$

$$K_{2,a(z)}(z; \omega) = \frac{(\omega - kU_s) [\omega - k(U_s + \Omega_0 z)] \sinh[k(z+h)]}{\omega^2 \sinh(kh)} \quad (28)$$

Tais expressões são semelhantes àquelas deduzidas para a teoria linear sem corrente ou com corrente uniforme (equação (16)), embora no caso presente, deva-se utilizar a frequência intrínseca, calculada com a velocidade de corrente próximo à superfície. A influência da vorticidade manifesta-se no valor do número de onda  $k$ , com base na equação de dispersão apropriada. A Tabela 4 e a Tabela 5 mostram o fator de resposta em frequência para velocidade horizontal no fundo e para aceleração vertical em  $z=0$ , ambos adimensionais.

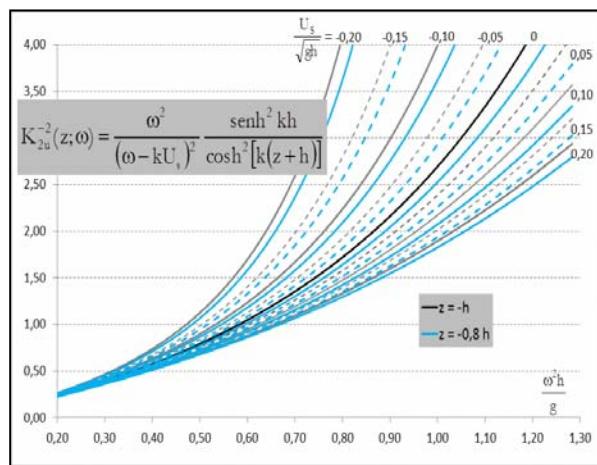
**Tabela 4 - Fator de resposta de velocidade horizontal em  $z=-h$ ,  $K_{2,u}$ . Parâmetro de vorticidade  $\Omega_0/\omega = 0,1$ .**

$U_s/\omega h$	$\omega^2 h/g$				
	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
-0,20	0,9691	12,3742	-	-	-
-0,15	0,9078	5,7848	530,2245	-	-
-0,10	0,8608	3,9934	27,9772	945,7535	-
-0,09	0,8526	3,7828	22,2633	364,7933	167503
-0,08	0,8448	3,5994	18,3924	189,2171	8881,3518
-0,07	0,8374	3,4382	15,6304	115,8950	2043,9132
-0,06	0,8303	3,2955	13,5787	78,9087	786,9070
-0,05	0,8234	3,1683	12,0047	57,7808	394,8816
-0,04	0,8169	3,0542	10,7653	44,6004	232,6965
-0,03	0,8106	2,9513	9,7679	35,8207	152,6144
-0,02	0,8045	2,8580	8,9504	29,6687	107,9789
-0,01	0,7987	2,7730	8,2698	25,1812	80,8112
0,00	0,7931	2,6953	7,6956	21,7992	63,1350
0,01	0,7877	2,6240	7,2054	19,1807	51,0183
0,02	0,7825	2,5583	6,7827	17,1070	42,3580
0,03	0,7774	2,4977	6,4147	15,4328	35,9526
0,04	0,7726	2,4414	6,0919	14,0587	31,0785
0,05	0,7679	2,3892	5,8066	12,9146	27,2795
0,06	0,7634	2,3405	5,5528	11,9500	24,2574
0,07	0,7590	2,2950	5,3257	11,1278	21,8104
0,08	0,7548	2,2525	5,1215	10,4200	19,7987
0,09	0,7507	2,2126	4,9369	9,8054	18,1223
0,10	0,7467	2,1751	4,7693	9,2674	16,7088
0,15	0,7286	2,0172	4,1210	7,3577	12,0923
0,20	0,7130	1,8961	3,6802	6,2055	9,6091

Deve-se enfatizar, contudo, que a dinâmica da onda é afetada pela corrente próxima à superfície livre, ou seja,  $z=0$ , enquanto que em muitos equipamentos para observação das ondas, i.e. tipo PUV, a corrente é medida próximo ao fundo. A Figura 2 apresenta a curva de resposta de velocidade orbital para duas profundidades de instalação, no fundo e a 20% acima do fundo, para diferentes valores de número de Froude calculados com a velocidade junto à superfície livre.

**Tabela 5 - Fator de resposta adimensional de aceleração em  $z=0$ ,  $K_{2,a(z)}$ . Parâmetro de vorticidade  $\Omega_0/\omega = 0,1$ .**

$U_s/\omega h$	$\omega^2 h/g$				
	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
-0,20	1,4422	2,1578	-	-	-
-0,15	1,3025	1,6282	2,7211	-	-
-0,10	1,1856	1,3399	1,5864	2,0996	-
-0,09	1,1644	1,2954	1,4899	1,8367	2,7181
-0,08	1,1439	1,2540	1,4075	1,6520	2,0990
-0,07	1,1240	1,2153	1,3356	1,5115	1,7838
-0,06	1,1047	1,1790	1,2722	1,3991	1,5757
-0,05	1,0860	1,1449	1,2155	1,3063	1,4232
-0,04	1,0678	1,1127	1,1644	1,2276	1,3043
-0,03	1,0501	1,0823	1,1179	1,1597	1,2080
-0,02	1,0330	1,0534	1,0754	1,1001	1,1277
-0,01	1,0163	1,0260	1,0362	1,0473	1,0593
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,01	0,9842	0,9752	0,9663	0,9572	0,9479
0,02	0,9688	0,9515	0,9349	0,9183	0,9017
0,03	0,9538	0,9289	0,9055	0,8826	0,8602
0,04	0,9391	0,9072	0,8779	0,8498	0,8228
0,05	0,9249	0,8864	0,8520	0,8194	0,7886
0,06	0,9110	0,8665	0,8274	0,7912	0,7574
0,07	0,8974	0,8474	0,8042	0,7649	0,7286
0,08	0,8842	0,8291	0,7823	0,7402	0,7020
0,09	0,8713	0,8114	0,7614	0,7171	0,6773
0,10	0,8587	0,7944	0,7415	0,6953	0,6543
0,15	0,8000	0,7179	0,6549	0,6029	0,5587
0,20	0,7475	0,6532	0,5848	0,5307	0,4862



**Figura 2 - Função de resposta em frequência para a componente horizontal da velocidade orbital - Caso II. Ponto situado no fundo (linha preta) e a uma elevação de 20% da profundidade acima do fundo (linha azul).  $\Omega_0/\omega = 0,1$**

### Caso III: Perfil Exponencial de Velocidade

A equação de vorticidade  $\nabla^2\psi = +\gamma^2\psi$ ,  $\gamma$  sendo um número real, admite solução cujo perfil de velocidade de corrente é expresso da forma de cosseno hiperbólico (denominado, neste trabalho, perfil exponencial). Este exemplo foi estudado por Dalrymple e Cox (1976), que o considerou apenas como corrente contrária à onda. No entanto, tal problema poderia descrever a situação de onda e corrente direcionadas no mesmo sentido.

Seguindo mesmo desenvolvimento daqueles autores, a função de corrente é dada pela expressão:

$$\begin{aligned} \psi(x, z) = & -\frac{(U_s - c)}{\gamma} \frac{\operatorname{senh}[\gamma(z+h)]}{\cosh \gamma h} \pm \\ & \pm \frac{H}{2} \sqrt{\frac{g \operatorname{tanh} \alpha h}{\alpha - \gamma \operatorname{tanh} \gamma h \operatorname{tanh} \alpha h}} \frac{\operatorname{senh}[\alpha(z+h)]}{\operatorname{senh} \alpha h} \cos kx \end{aligned} \quad (29)$$

É oportuno observar que a solução do problema

$$\nabla^2\psi = \Omega_0 + \gamma^2\psi \quad (30)$$

não é a superposição das soluções dos Casos I e III. De fato, pode-se reduzir a expressão (11) à forma:

$$\nabla^2(\psi + A) = \gamma^2(\psi + A) \quad (31)$$

onde  $A = \Omega_0/\gamma^2$  é uma constante, que é o próprio Caso III. Resulta daí a importância de estudá-lo.

A Figura 3 apresenta diferentes perfis de velocidade de corrente para valores do parâmetro  $\gamma h$  variando entre 0,02 e 1. Quanto maior o valor deste parâmetro, mais acentuado é o decaimento vertical da velocidade, situação mais condizente com perfis de velocidade resultantes de ação de vento sobre a água. Por outro lado, valores pequenos de  $\gamma h$  resultam em perfis de velocidade mais uniformes. Observa-se, porém, que tal solução, que foi investigada por Dalrymple e Cox (1976) corresponde a uma solução particular, pois não estabelece condições para a velocidade no fundo. Além disso, deve ser observado que, tomando-se a derivada da expressão (22) em relação a  $z$  e analisando a parcela não oscilatória, obtém-se

$$-\frac{\partial}{\partial z}(\psi(x, z)) = (U_s - c) \frac{\cosh[\gamma(z+h)]}{\cosh \gamma h} \quad (32)$$

Ou seja, tal expressão depende da celeridade da onda e, portanto, o perfil da velocidade não

pode ser determinado independentemente do período (absoluto ou intrínseco) da onda.

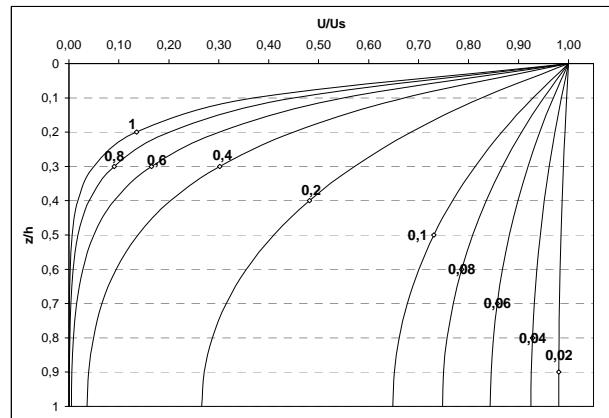


Figura 3 - Perfil de velocidade de corrente (Caso III) para valores de  $\gamma h$  entre 0,02 e 1,0.

O coeficiente  $\gamma$  pode ser estimado a partir da vorticidade próximo à superfície livre, pois

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d\psi}{dz} \Big|_{z=0} = (U_s - c) \\ -\frac{d^2\psi}{dz^2} \Big|_{z=0} = \gamma(U_s - c) \operatorname{tanh}(\gamma h) \end{array} \right. \Rightarrow \frac{\text{vorticidade}}{\text{velocidade}} \Big|_{z=0} \approx \gamma^2 h \quad (33)$$

se  $\gamma h < 0,5$ . Ou seja, o parâmetro  $\gamma$  pode ser relacionado com a magnitude relativa da vorticidade, junto à superfície livre.

A velocidade horizontal associada ao escoamento oscilatório é dada pela expressão:

$$u = \pm \frac{H}{2} \omega K_{3u}(z, \omega) \cos(kx) \quad (34)$$

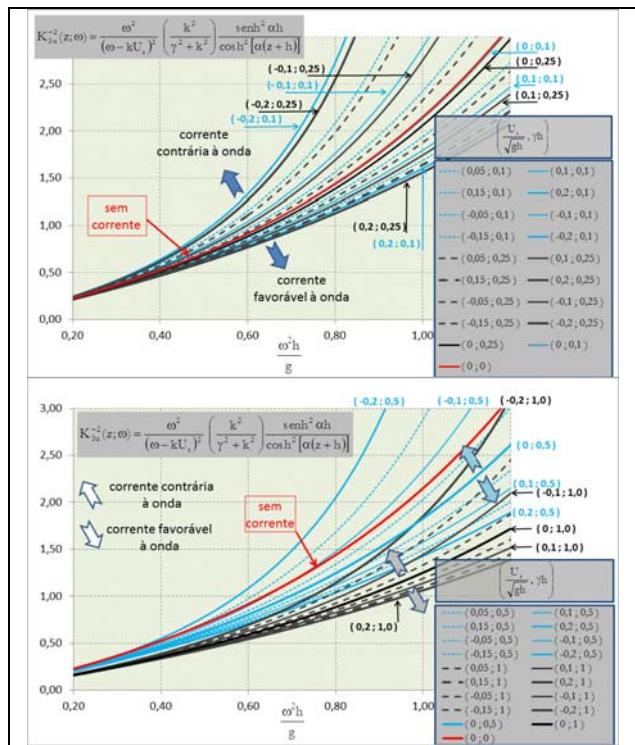
Onde

$$\begin{aligned} K_{3u}(z, \omega) = & \pm \frac{\alpha}{\omega} \sqrt{\frac{g \operatorname{tanh} \alpha h}{\alpha - \gamma \operatorname{tanh} \gamma h \operatorname{tanh} \alpha h}} \frac{\cosh[\alpha(z+h)]}{\operatorname{senh} \alpha h} \\ = & \pm \frac{(\omega - kU_s)}{\omega} \frac{\alpha}{k} \frac{\cosh[\alpha(z+h)]}{\operatorname{senh} \alpha h} \end{aligned} \quad (35)$$

onde  $\alpha = \sqrt{\gamma^2 + k^2}$  e se utilizou a equação de dispersão para este caso (equação (30), Parte 1). No limite em que  $\gamma$  tende a zero, recupera-se a equação (16).

A Figura 4 apresenta as funções de resposta de velocidade para diferentes valores de  $\gamma h$ , para um

ponto localizado a 20% da lâmina d'água acima do fundo. Observa-se que não apenas a velocidade próxima à superfície é determinante para a descrição da cinemática e para a estimativa da elevação da superfície livre, como também a vorticidade, que é caracterizada por  $\gamma h$ , é fundamental para a dinâmica do escoamento. E mais, no caso de uma velocidade  $U_s$  nula, ainda assim o escoamento admite uma solução oscilatória rotacional.



**Figura 4 - Função de resposta em frequência para a componente horizontal da velocidade orbital – Caso III. Ponto situado a 20% da profundidade acima do fundo. Curvas para diferentes valores de número de Froude (referente à velocidade da corrente na superfície  $U_s$ ) e do parâmetro  $\gamma h$ .**

Este exemplo põe em cheque duas hipóteses corriqueiramente aceitas: (1) a de que o escoamento possa ser decomposto em uma parcela rotacional associada à corrente e uma parcela irrotacional associada à onda; e (2) a de que a corrente possa ser substituída por uma corrente uniforme equivalente, conforme a definição de Hedges e Lee (1992) (valor de velocidade da corrente que produziria uma onda com o mesmo comprimento). Verifica-se imediatamente, a partir da equação (29), que a parcela oscilatória da função de corrente também é rotacional e, a partir da Figura 4, que tanto a velocidade quanto a vorticidade são, de modo independ-

dente, determinantes da dinâmica do escoamento. Tais observações já haviam sido feitas por Swan (1992), que propunha modelar o escoamento total como a propagação de uma onda de vorticidade.

Para a aceleração vertical, obtém-se

$$a_{(z)} = \pm \frac{H}{2} \omega^2 K_{3a}(z, \omega) \cos(kx) \quad (36)$$

Onde

$$K_{3a(z)}(z, \omega) = \pm \frac{(\omega - kU_s)^2}{\omega^2} \frac{\operatorname{senh}[\alpha(z+h)] \cosh[\gamma(z+h)]}{\operatorname{senh} \alpha h \cosh \gamma h} \quad (37)$$

Próximo à superfície livre, ou seja, quando  $z$  tende a zero, esta expressão reduz-se a

$$K_{3a(z)}(0, \omega) = \pm \frac{(\omega - kU_s)^2}{\omega^2} \quad (38)$$

resultado formalmente análogo àqueles obtidos para os Casos I e II, em que apenas a velocidade próximo à superfície interfere com o fator de resposta de frequência. De notar, porém, que o número de onda é influenciado pela velocidade e pela vorticidade em  $z=0$ .

#### Caso IV: Perfil Senoidal de Velocidade

A equação de vorticidade  $\nabla^2 \psi = -\gamma^2 \psi$ ,  $\gamma$  sendo um número real, admite solução cujo perfil de velocidade de corrente é expresso da forma de cosseno (denominado, neste trabalho, perfil senoidal). A solução do problema linearizado é dada pela expressão:

$$\psi(x, z) = -\frac{(U_s - c)}{\gamma} \frac{\operatorname{sen}[\gamma(z+h)]}{\cos \gamma h} \pm \frac{H}{2} A_4(z) \cos kx \quad (39)$$

Onde

$$A_4(z) = \begin{cases} \sqrt{\frac{gh \tan \beta h}{\beta h + \gamma h \tan \gamma h \tan \beta h}} \frac{\operatorname{sen}[\beta(z+h)]}{\operatorname{sen} \beta h} & , \text{se } k^2 < \gamma^2 \\ \sqrt{\frac{gh}{1 + \gamma h \tan \gamma h}} \left(1 + \frac{z}{h}\right) & , \text{se } k^2 = \gamma^2 \\ \sqrt{\frac{gh \tanh \beta h}{\beta h + \gamma h \tan \gamma h \tanh \beta h}} \frac{\operatorname{senh}[\beta(z+h)]}{\operatorname{senh} \beta h} & , \text{se } k^2 > \gamma^2 \end{cases} \quad (40)$$

e  $\beta = \sqrt{\gamma^2 - k^2}$ , cuja equação de dispersão é apresentada na Parte 1, equação (31). Este problema também é tratado por Dalrymple e Cox (1976), porém eles consideraram que esta situação representasse apenas onda e corrente fluindo no mesmo sentido. Esta solução, embora algebricamente mais complexa do que aquela tratada no Caso III, mostra um perfil de velocidade adequado a uma corrente cuja distribuição de vorticidade é mais compatível com perfis de corrente associados a escoamentos de marés ou fluviais, posto que admite reversão do escoamento ao longo da coluna d'água. Além disso, parece ser uma solução mais rica do que aquela apresentada por Dalrymple e Cox (1976), pois, dependendo do valor do número de onda  $k$  em relação ao parâmetro  $\gamma$ , a solução pode admitir um perfil tanto senoidal, como exponencial, como constante. Tal diferença de comportamento, porém, não é mencionada por aqueles autores. Finalmente, assim como no Caso III, diferentes condições de contorno podem ser impostas para a velocidade no fundo e/ou na superfície, assim como para a vorticidade, no fundo e na superfície, e para a vazão líquida total, ao contrário dos Casos I e II. Tais condições merecem ser investigadas mais detalhadamente, inclusive com o auxílio de um modelo numérico como foi feito por Dalrymple e Cox, mas tal discussão foge ao escopo do presente trabalho. É suficiente observar, porém, que o perfil de velocidade assemelha-se àquele encontrado em várias situações de interesse prático, inclusive admitindo reversão do escoamento ao longo da coluna d'água (Figura 5).

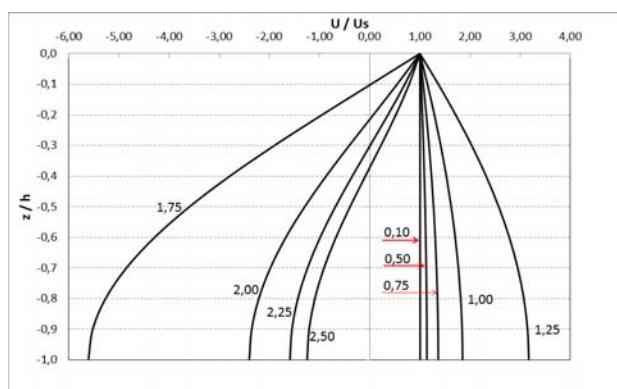


Figura 5 - Perfil vertical da corrente (parcela não oscilatória, Caso IV) para diferentes valores de  $\gamma h$ .

A componente horizontal da velocidade é dada por:

$$u = \pm \frac{H}{2} \omega K_{4u}(z, \omega) \cos(kx) \quad (41)$$

onde

$$K_{4u}(z, \omega) = \begin{cases} \left(1 - kh \frac{U_s}{\omega h}\right) \beta \frac{\cos[\beta(z+h)]}{\sinh\beta h} & , \text{se } k^2 < \gamma^2 \\ \left(1 - kh \frac{U_s}{\omega h}\right) \frac{1}{kh} & , \text{se } k^2 = \gamma^2 \\ \left(1 - kh \frac{U_s}{\omega h}\right) \beta \frac{\cosh[\beta(z+h)]}{\sinh\beta h} & , \text{se } k^2 > \gamma^2 \end{cases} \quad (42)$$

A aceleração vertical é dada pela expressão:

$$a_{(z)} = \frac{H}{2} \omega^2 K_{4a(z)}(z, \omega) \cos(kx) \quad (43)$$

Onde

$$K_{4a(z)}(z, \omega) = \frac{k^2}{\omega^2} (U_s - c) A_4(z) \frac{\cos[\gamma(z+h)]}{\cos\gamma h} \quad (44)$$

Utilizando-se a equação de dispersão apresentada na equação (31) da Parte 1, pode-se reescrever o fator de resposta de aceleração como

$$K_{4a(z)}(z, \omega) = -\frac{(\omega - kU_s)^2}{\omega^2} \frac{\cos[\gamma(z+h)]}{\cos\gamma h} S_4(z) \quad (45)$$

Onde

$$S_4(z) = \begin{cases} \frac{\sin[\beta(z+h)]}{\sinh\beta h} & , \text{se } k^2 < \gamma^2 \\ \left(1 + \frac{z}{h}\right) & , \text{se } k^2 = \gamma^2 \\ \frac{\sinh[\beta(z+h)]}{\sinh\beta h} & , \text{se } k^2 > \gamma^2 \end{cases} \quad (46)$$

Em  $z=0$  restitui-se a mesma expressão obtida nos três casos anteriores.

## DISCUSSÃO

O estudo da interação entre ondas e correntes tem atraído a atenção de pesquisadores há muitos anos, pela importância que representa o correto conhecimento do campo de velocidades e acelerações para a estimativa de esforços sobre estruturas

submersas, bem como para a caracterização do transporte de sedimentos no fundo. A presença de camadas limites no fundo e na superfície, assim como a distribuição de turbulência ao longo da coluna d'água, são fatores inerentes à física do escoamento, mas que não condizem com as hipóteses de fluido invíscido e escoamento irrotacional. Abstraindo-se desses fatores, mas procurando avançar a abordagem teórica, a inclusão da vorticidade em conjunto com a hipótese de fluido invíscido representaria uma modelagem conceitual, na qual o padrão de turbulência não provocaria transferências laterais de quantidade de movimento. Isto representaria um primeiro estágio de aproximação matemática para um fenômeno muito complexo, embora um pouco mais realista do que admitir que o escoamento fosse totalmente irrotacional.

A comprovação das previsões teóricas sobre a influência da vorticidade coloca, porém, um problema prático que não é trivial: como medir simultaneamente a velocidade e a vorticidade de maneira confiável, sem perturbar o escoamento? Observe-se em primeiro lugar que a vorticidade se expressa em termos de variações espaciais da velocidade, embora todos os equipamentos utilizados (ADV, ADCP) fazem apenas medições pontuais. Em segundo lugar, não menos importante, não se pode esquecer que a vorticidade presente num escoamento, tanto em laboratório quanto na Natureza, é necessariamente tridimensional, enquanto que os modelos teóricos apresentados neste trabalho são todos bidimensionais para fluido invíscido. Enquanto que em duas dimensões existe apenas a advecção da vorticidade, em três dimensões adiciona-se o mecanismo de deformação dos tubos de vorticidade, o que pode contribuir para a variação total da vorticidade. Assim, através de mecanismos não lineares da interação entre ondas e correntes, o escoamento oscilatório pode deformar os tubos de vorticidade do escoamento subjacente, produzindo vorticidade em outras direções. Finalmente, as ondas e as correntes observadas na natureza são resultado de um processo de interação que não é necessariamente local, e as medições efetuadas não podem ser reproduzidas por vontade e sob completo controle do investigador. Isto transforma o problema da interação entre ondas e corrente em um desafio que ainda persiste para a Engenharia Costeira nos dias de hoje e o leitor é fortemente recomendado a (re)ler os abrangentes trabalhos de revisão feitos por Peregrine (1976), Peregrine et al. (1983), Jonsson (1990) e por Thomas e Klopman (1997).

Os efeitos da corrente sobre a dinâmica das ondas no mar podem ser caracterizados através de

uma mudança de frequência (efeito Doppler) ou quantificados através de grandezas mecânicas. A Parte 1 quantificou os efeitos de se desconsiderar a presença da corrente ao se estimar o comprimento das ondas, fundamentalmente em consequência da diferença entre frequências intrínseca e aparente. A Parte 2 quantificou os mesmos efeitos ao se estimar a altura da onda a partir de registros de pressão, também em consequência das mudanças na equação de dispersão, dos efeitos não lineares e da própria função de transferência entre pressão e elevação da superfície livre. Nestas duas discussões, apareceu claramente o efeito da vorticidade sobre as grandezas cinemáticas e geométricas da onda. Os efeitos não lineares se manifestarão em situações de ondas extremas, de esbeltez elevada e, especialmente, quando elas se encontrarem com correntes opositas com velocidade crítica próxima à celeridade de grupo do trem de ondas. No entanto, seria possível que a própria interação entre o escoamento oscilatório (que pode ser ele mesmo rotacional) e a corrente produza mudanças no perfil médio da velocidade, com base nos mecanismos de transporte de vorticidade. Neste caso, recorre-se à equação de conservação da ação de onda, ou da transferência de energia, ou do transporte de vorticidade, assunto a ser tratado na Parte 4.

No caso da componente horizontal das velocidades orbitais e das acelerações verticais, apresentadas aqui para aproximações teóricas linearizadas em quatro casos de perfis de corrente, as expressões matemáticas para estimativa de alturas de onda são formalmente semelhantes àquelas deduzidas para o caso sem corrente. No entanto, as fórmulas intrinsecamente envolvem o comprimento de onda, que é diferente para cada caso de perfil de velocidade e de vorticidade, bem como é influenciado diretamente pelos respectivos valores junto à superfície livre (Tabela 6).

Foi constatado por diversos pesquisadores (e.g. SROKOSZ, 1985; LAI et al., 1989; SOBEY e HUGHES, 1999; STRONG et al., 2000<sup>a,b</sup>) que poderiam ocorrer erros significativos na estimativa da altura das ondas caso uma corrente estivesse presente e fosse desconsiderada. Conforme apresentado nos dois trabalhos anteriores desta série (NEVES e DIAS, 2013; DIAS e NEVES, 2013), com base em evidências experimentais e a partir de análises teóricas, é razoável esperar que tais erros aumentem: (1) com o incremento da não linearidade da onda (esbeltez); (2) com a magnitude da corrente em relação à celeridade (ou à celeridade de grupo) da onda; (3) com o sentido de propagação da onda (correntes contrárias perturbariam mais o escoamento); e (4) com a

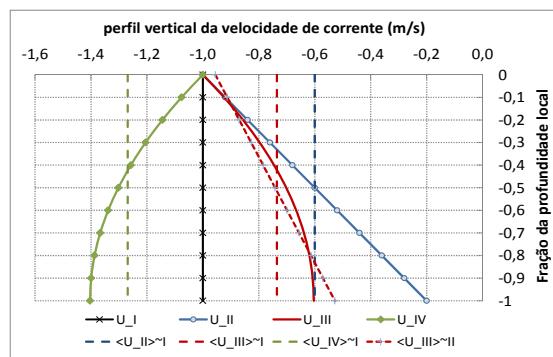
intensidade da vorticidade (e.g. WOLF e PRANDLE, 1999).

**Tabela 6 - Comprimento de onda e fatores de resposta de velocidade e aceleração para perfis de velocidade indicados na Figura 6.**

Caso	L (m)	$K_{n,u}^{-2}$	$K_{n,a(z)}^{-2}$
O	64,90	0,7125	1,0000
I	55,05	0,8060	0,5811
II	58,40	0,7081	0,5984
III	57,34	0,7578	0,5931
IV	52,76	0,8612	0,5685
$\langle U_{II} \rangle^{\sim I}$	59,10	0,7611	0,7317
$\langle U_{III} \rangle^{\sim I}$	57,75	0,7753	0,6766
$\langle U_{IV} \rangle^{\sim I}$	52,22	0,8450	0,4915
$\langle U_{III} \rangle^{\sim II}$	57,28	0,7469	0,6059

As soluções do problema linearizado, representadas pelos Casos I a IV, podem ser bastante ilustrativas para caracterizar a necessidade de medição simultânea de ondas e correntes. Por exemplo, para uma velocidade na superfície livre ( $z=0$ ) igual a 1m/s, período absoluto da onda igual a 8s, e profundidade igual a 8m, obtém-se os parâmetros  $\omega^2/h/g$  igual a 0,50 e  $U_0/(\omega h)$  igual a  $\pm 0,16$ , valendo o sinal negativo para onda se propagando em sentido contrário à corrente. Os perfis de corrente ilustrados na Figura 6 consideram: os quatro casos (I a IV), onda e corrente em sentidos contrários; o Caso I foi testado utilizando o valor médio na vertical dos Casos II, III e IV (indicados com a notação  $\langle U_n \rangle^{\sim I}$ , onde n corresponde ao Caso); e o Caso II com o perfil linear de velocidade que melhor aproximasse o perfil de velocidade do Caso III (indicada com a notação  $\langle U_{III} \rangle^{\sim II}$ ). O objetivo deste ensaio comparativo é o de identificar o que seria mais significativo na determinação do comprimento de onda (dispersão) e dos fatores de resposta de aceleração na superfície livre ( $z=0$ ) e de velocidade ( $z=-h$ ): a velocidade na superfície livre ou a velocidade média ao longo do perfil?

Os valores de  $(K_{l,u})^{-2}$  para um ponto situado no fundo,  $z=-h$ , são respectivamente 0,6721 (mesmo sentido) e 0,8332 (sentidos opostos), ou seja um erro de +11% ou de -7.8% em relação ao valor sem corrente 0,7297 na frequência desejada. Neste caso, a dinâmica da onda superposta à corrente é equivalente àquela de uma onda propagando-se sem corrente e com período (intrínseco) de 8,97 s ou 6,98 s, respectivamente, para corrente no mesmo sentido ou em sentidos opostos.



**Figura 6 - Perfil vertical da velocidade da corrente para os quatro casos. Em linha tracejada, as velocidades médias para cada caso e para uma aproximação linear ( $\langle U_{III} \rangle^{\sim II}$ ).**

Para as mesmas condições de velocidade na superfície livre, período absoluto, profundidade e elevação na coluna de água ( $z=-h$ ), a inclusão de uma vorticidade fraca igual a  $0,1 \text{ s}^{-1}$  ( $W = \Omega_s/\omega = 0,127$ ) já altera os valores de  $(K_{2,u})^{-2}$ : eles passam a valer, respectivamente 0,7486 (mesmo sentido) e 0,7293 (sentidos opostos), ou seja um erro de +2,6% ou inferior a 0,1% em relação ao valor sem corrente e sem vorticidade 0,7297, na frequência absoluta desejada. Este é um resultado surpreendente, especialmente porque existe uma diferença razoável entre período aparente (8 s) e o período intrínseco, neste caso, igual a 9,01 s ou 7,04 s, para onda e corrente no mesmo sentido ou em sentidos opostos.

Para uma magnitude de vorticidade igual a  $0,2 \text{ s}^{-1}$ , ( $W = \Omega_s/\omega = 0,255$ ), passaria a haver uma inversão de sentido da corrente ao longo da vertical. Os valores de  $(K_{2,u})^{-2}$  passariam a ser 0,8342 (erro +14%) e 0,6409 (erro -12%). Evidencia-se assim a importância da vorticidade na determinação da velocidade orbital ao longo da coluna de água.

Alternativamente, poder-se-ia adotar a velocidade média da corrente ao longo da vertical para cálculo da função de resposta (e.g. HEDGES et al., 1985). Para o caso de vorticidade igual a  $0,1 \text{ s}^{-1}$ , a velocidade média na vertical seria  $U = \pm 0,6 \text{ m/s}$ , a resposta seria 0,6918 (mesmo sentido) ou 0,7833 (sentidos opostos); em relação aos valores exatos, os erros seriam de -7,6% e +7,4%, respectivamente.

No Caso III, calculou-se o valor de resposta espectral para a velocidade  $(K_{3,u})^{-2}$ , para as mesmas condições de corrente na superfície, período, profundidade e parâmetro de vorticidade  $W$  utilizado no Caso II. Os valores de  $\gamma h$  adotados para produzir este resultado foram 0,31102 (mesmo sentido) e 0,31817 (sentidos opostos). Para onda e corrente no

mesmo sentido, obtiveram-se os valores de 1,6655 (mesmo sentido) e 1,4650 (sentidos opostos) para  $(K_{3,u})^2$  calculado em  $z=h$ . Em relação ao valor sem corrente e sem vorticidade, 0,7297, o desvio seria de +128% e +101%, respectivamente. O período intrínseco em cada condição de propagação seria, respectivamente, 8,94 s e 7,02 s. Caso se adotasse a velocidade média na vertical (0,74 m/s) para corrigir o fator de resposta de velocidade, o valor de resposta espectral ( $K_{1,u}$ )<sup>2</sup> seria 0,6845 (mesmo sentido) ou 0,7991 (sentidos opostos), ou seja, desvios de -59% e de -45% em relação ao Caso III, com vorticidade, ou desvios de -6,2% e de +9,5% em relação ao caso sem corrente e sem vorticidade.

Hedges et al. (1985), entre outros pesquisadores, propuseram corrigir os fatores de resposta de velocidade pelo perfil de velocidade média na vertical (Caso I, valor constante). Outros pesquisadores, porém, enfatizaram a importância da vorticidade junto à superfície livre, em vez de utilizar o gradiente vertical de velocidade próximo ao fundo. Para investigar esta diferença de opinião, calcularam-se o comprimento de onda, o fator de resposta de velocidade horizontal em  $z=-0,8h$  e o fator de resposta de aceleração em  $z=0$ . Consideraram-se a velocidade de corrente ( $U_s$ ) igual a 1 m/s contrária à propagação da onda, a profundidade local ( $h$ ) igual a 8 m, o período aparente (ou seja, em relação ao fundo) igual a 8 s e a vorticidade na superfície igual a  $0,1 \text{ s}^{-1}$ . Os resultados são apresentados na Tabela 6.

Analizando-se o quadro apresentado na Tabela 6, observa-se que os valores do comprimento de onda (excetuando o Caso O para ausência de corrente) apresentam um desvio de  $\pm 2,15\%$  em torno do valor médio de 56,24 m, o que indica que qualquer uma das aproximações seja aparentemente aceitável, embora tal valor seja 13,4% menor do que o valor para o comprimento de onda (64,9 m) na ausência de corrente o que seria certamente inaceitável. Analisando-se os valores para  $K_{n,u}^{-2}$  e  $K_{n,a(z)}^{-2}$ , com e sem corrente, conclui-se que os efeitos da corrente (efeito Doppler) não podem ser desprezados na estimativa da altura de onda, especialmente a partir da medições de aceleração junto à superfície livre.

Passando à análise do fator de resposta espectral de velocidade, o Caso III será tomado como referência, pois seria um perfil condizente, por exemplo, com a presença de vento associado à corrente de maré. Nesta situação, se fosse adotado o Caso I, com o mesmo valor de velocidade junto à superfície (-1 m/s), para um sensor colocado a 20% da lâmina d'água acima do fundo, o erro seria de 6,36%. Adotar o Caso I com o valor médio na verti-

cal da velocidade do Caso III, (0,74 m/s) conduziria a um erro de +2,31%, em relação ao Caso III. A corrente uniforme equivalente seria -0,78 m/s e o valor do fator de resposta da velocidade seria igual a 0,7791, um erro de 2,8% em relação ao valor do Caso III. Adotar um perfil linear, que fosse uma aproximação ótima ao real perfil característico do Caso III, reduziria o erro para uma faixa mais aceitável de -1,44%. Já a inclusão de um perfil linear que tivesse a mesma velocidade e o mesmo gradiente de velocidade junto à superfície livre que o Caso III, resultaria em erro de -6,56%. Já o desvio entre o Caso III e o caso sem corrente seria de -5,98%.

Ao analisar os dados obtidos de boias do tipo "waverider", tais instrumentos não obtêm qualquer informação sobre a velocidade da corrente. No entanto, tais instrumentos são utilizados para determinar a "verdade" do espectro direcional das ondas. Conforme apresentado neste trabalho, as funções de transferência entre aceleração e elevação da superfície livre também são bastante influenciadas pela velocidade e pela vorticidade próximas à superfície (Tabela 6). Portanto, o lançamento de boias em regiões onde haja correntes de maré ou forte influência do vento, deveria ser acompanhado de medições complementares, seja sobre o perfil vertical da corrente, como das condições do vento.

Conclui-se, portanto, que ignorar a presença da corrente (magnitude e vorticidade) na transformação em altura de onda pode conduzir erros razoáveis em termos práticos de engenharia e que a melhor solução seja ajustar velocidade e vorticidade, utilizando o Caso II como uma primeira aproximação. Idealmente, poder-se-ia utilizar uma aproximação bilinear (DALRYMPLE, 1973) ou linear em segmentos (CUMMINS e SWAN, 1993).

Tal conclusão é evidentemente restrita às condições particulares investigadas neste trabalho. A Parte 5 desta série de artigos fará uma revisão criteriosa das condições experimentais de ensaio (profundidade, período e altura da onda, magnitude e tipo de perfil de velocidade) que foram utilizadas para comprovação das abordagens teóricas apresentadas neste artigo. A título de exemplo, o perfil de velocidade investigado por Thomas (1981) era praticamente uniforme, exceto em camadas no fundo e na superfície, a profundidade relativa variava entre 0,25 e 0,31 e, nessas condições, a diferença entre o comprimento de onda calculado pela teoria linear (corrente uniforme) e o valor medido não superava 1%. No caso dos quatro ensaios relatados por este autor para ondas não lineares, a profundidade relativa variou na faixa entre 0,24 e 0,30; o parâmetro  $\omega^2 h/g$  situou-se em 1,41 e o parâmetro  $U_0/(\omega h)$

variou de 0,021 a 0,071 (corrente contrária à onda). Nestes casos, o erro entre o valor medido do comprimento de onda e o valor estimado pela equação (14) variou na faixa entre 2,6% e 6,4%. Já o fator de resposta de velocidade para o caso com corrente, conforme apresentado na Tabela 2, ficaria na faixa 6,33 a 9,77, o que, comparado com o valor 5,57 no caso sem corrente, situaria o erro na faixa entre -12% e -43% nos valores espectrais.

Uma situação prática importante em termos de interpretação de medições de campo surge em locais de meso- e de macromarés, onde exerce variação entre preamar e baixa-mar superior a 3m. Consequentemente, ao longo do ciclo da maré, o instrumento (que permanece fixo) ficaria posicionado em diferentes elevações relativas (em relação à profundidade local instantânea). Considerando que a onda tenha período absoluto igual a 6,98s (em relação a um observador fixo), que a velocidade da corrente uniforme seja igual a 0,52m/s no mesmo sentido de propagação da onda, que o instrumento esteja posicionado a 1m do fundo, que a profundidade em preamar seja de 9m e em baixa-mar, de 6m, os valores da função de transferência de velocidade para superfície livre,  $(K_{l,u})^2$ , valerão, respectivamente, 1,503 e 0,825. Caso a corrente tivesse a mesma magnitude, porém direcionada contra a corrente, tais valores seriam 1,779 e 0,927 em preamar e baixa-mar. Percebe-se então a importância da caracterização correta da profundidade local e da velocidade da corrente na interpretação de registros coletados por instrumentos do tipo PUV ou ADV posicionados no fundo.

Recentemente, instrumentos tipo PUV permitiram caracterizar a direção das ondas a partir do desenvolvimento teórico de Longuet-Higgins (LONGUET-HIGGINS et al., 1963) que estabelecia o espalhamento direcional do espectro de ondas a partir de cinco constantes:

$$\begin{aligned} a_0(\omega) &= \frac{S_{pp}(\omega)}{2\pi K_p^2(z_p, \omega)} \\ a_1(\omega) &= \frac{S_{pu}(\omega)}{\pi K_p(z_p, \omega) K_u(z_{uv}, \omega)} \\ a_2(\omega) &= \frac{S_{uu}(\omega) - S_{vv}(\omega)}{\pi K_u^2(z_{uv}, \omega)} \\ b_1(\omega) &= \frac{S_{pv}(\omega)}{\pi K_p(z_p, \omega) K_u(z_{uv}, \omega)} \\ b_2(\omega) &= \frac{2S_{vu}(\omega)}{\pi K_u^2(z_{uv}, \omega)} \end{aligned} \quad (47)$$

onde  $S_{pp}$ ,  $S_{uu}$  e  $S_{vv}$  são os auto-espectros de pressão e componentes de velocidade horizontal, respectivamente, e  $S_{pu}$ ,  $S_{pv}$  e  $S_{vu}$  são os espectros cruzados entre pressão e velocidade (SOBEY e HUGHES, 1999). O espectro direcional,  $S_{\eta\eta}(\omega, \theta)$ , é dado então pela expressão

$$S_{\eta\eta}(\omega, \theta) = S_{\eta\eta}(\theta) \left\{ a_0(\omega) + \frac{2}{3} [a_1(\omega) \cos \theta + b_1(\omega) \sin \theta] + \right. \\ \left. + \frac{1}{6} [a_2(\omega) \cos 2\theta + b_2(\omega) \sin 2\theta] + \dots \right\} \quad (48)$$

A medição da velocidade e da pressão é feita em um ponto em certa elevação  $Z_l = z_l + h$  acima do fundo onde o instrumento é instalado. O cálculo das expressões  $a_1$  e  $b_1$ , em (47), envolve o produto dos fatores de resposta de pressão e de velocidade (SOBEY e HUGHES, 1999), o que no Caso II envolveria uma expressão do tipo:

$$K_{2,p}(z, \omega) K_{2,u}(z; \omega) = \\ = \left\{ 1 - \frac{(\omega - kU_s)^2}{gk \tanh kh} \right\} \frac{(\omega - kU_s)}{\omega} \frac{\sinh[kZ_l] \cosh[kZ_l]}{\sinh^2 kh} + \\ + \frac{\omega - k[U_0 + \Omega_0 Z_l]}{\omega - kU_s + \Omega_0 \tanh kh} \frac{(\omega - kU_s)}{\omega} \frac{\cosh^2[kZ_l]}{\sinh kh \cosh kh} \quad (49)$$

Nos Casos III ou IV, tais expressões seriam ainda mais sensíveis à frequência intrínseca e à distribuição de vorticidade. Embora o cálculo dos espectros indicados no numerador das expressões (47), que envolve apenas os registros de pressão e das componentes  $u$  e  $v$  da velocidade, independa da forma do perfil da corrente, a frequência de pico certamente seria afetada pelo efeito Doppler. As expressões que aparecem no denominador das expressões (47), porém, envolvem os fatores de resposta de pressão ou de velocidade, os quais variam com a forma do perfil de corrente. Consequentemente, os valores calculados de  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  e  $b_2$  seriam diferentes, em função das características do perfil vertical da corrente (pelo menos, admitindo-se os casos considerados neste trabalho). Alguns exemplos voltarão a ser tratados na Parte 4.

Os Casos III e IV levantam outras indagações importantes. Em primeiro lugar, eles evidenciam teoricamente a possibilidade de que o escoamento oscilatório seja, ele próprio, rotacional, ao contrário do que ocorre no Caso II, onde toda a vorticidade está presente apenas na corrente. Em segundo lugar, em termos teóricos, observa-se que, alternativamente às soluções das equações governantes apresentadas nas equações (29) e (39) – as quais

correspondem às condições de contorno velocidade na superfície igual a  $U_s$  e função de corrente nula no fundo  $-$ , o problema matemático poderia ser especificado em termos de outros pares de condições de contorno, tais como: (a) velocidade na superfície livre e no fundo; (b) velocidade e vorticidade na superfície livre; (c) velocidade e vorticidade no fundo; (d) vorticidade na superfície livre e no fundo; (e) função de corrente na superfície livre e no fundo, ou seja, imposição de uma vazão. Cada uma dessas opções geraria uma expressão diferente para a função de corrente, resultando em diferentes formas da equação de dispersão e, consequentemente, outras expressões das funções de transferência de pressão, velocidade e aceleração. Tais questões não serão abordadas na presente série de artigos, porém servem para ilustrar que o problema abordado por Dalrymple e Cox (1976) é, na verdade, bem mais complexo e ainda não completamente esgotado.

Em locais onde ocorram fortes correntes de maré, ou ação de vento por longo intervalo de tempo, ou a formação de grupos de onda, é possível existir um padrão de vorticidade próximo ao fundo e outro, distinto, próximo à superfície livre. Portanto, considerar que a velocidade da corrente seja permanente e uniforme na vertical ou estimar o perfil de vorticidade a partir de medições isoladas, ou no fundo ou próximo à superfície livre, pode induzir a erros significativos, como é ilustrado pelos Casos III e IV.

A rigor, medições mais detalhadas com perfidores acústicos indicam que efeitos tridimensionais são inevitáveis (NEVES e ENDRES 2013). Medições efetuadas com instrumentos do tipo ADCP na costa potiguar em lâmina d'água de 6m, evidenciaram um forte cisalhamento junto à superfície livre e um perfil do tipo logarítmico no fundo (Figura 7). O primeiro estaria associado ao vento, constante naquele trecho de costa, enquanto que o segundo estaria associado à maré, da ordem de 3m de amplitude. No entanto, o escoamento médio na parcela superior do perfil era orientado em direção distinta daquela referente às camadas mais profundas. Characteriza-se assim um efeito fortemente tridimensional, que não pode ser desprezado. Este assunto será aprofundado na Parte 4 desta série de artigos, pois se relaciona, em última análise, ao próprio transporte de vorticidade em um ambiente onda-corrente.

Observa-se também que o escoamento resultante da superposição de ondas e correntes, na Natureza, frequentemente origina processos não estacionários. Esta é uma limitação grave contra o uso de métodos espetrais de Fourier, que se baseiam

em cálculos globais do registro. Outra situação importante ocorre quando a própria corrente varia espacialmente (na horizontal) ou se a onda se organiza em padrões bidimensionais em planta, eventualmente modelados pela equação de Kadomtsev-Petviashvili<sup>2</sup>. Nestes casos, o registro da onda poderá variar de acordo com a posição horizontal de fundo do instrumento. Consequentemente, as propriedades estatísticas do registro, para o mesmo trem de ondas, poderão ser distintas para uma dada configuração simultânea de sensores. Tal situação é análoga à medição de ondas em laboratório, onde sabidamente ocorre a reflexão das ondas. Portanto, é legítimo questionar se os métodos de análise usados atualmente com base na análise espectral de Fourier são capazes de caracterizar corretamente processos não ergódicos e não estacionários, ou se não seria oportuno aprofundar a aplicação de métodos adaptativos, como por exemplo baseados na Transformada de Hilbert-Huang (HHT) ou *wavelets*.

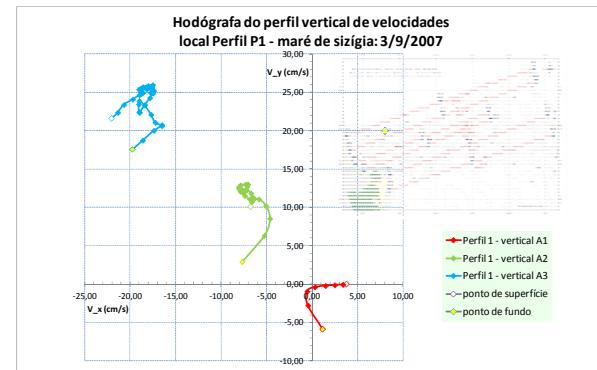


Figura 7 - Hodógrafa do perfil vertical de velocidade em 3 pontos ao longo do alinhamento inferior, ao largo de Ponta Negra, RN. (comunicação pessoal Ada Scudelari).

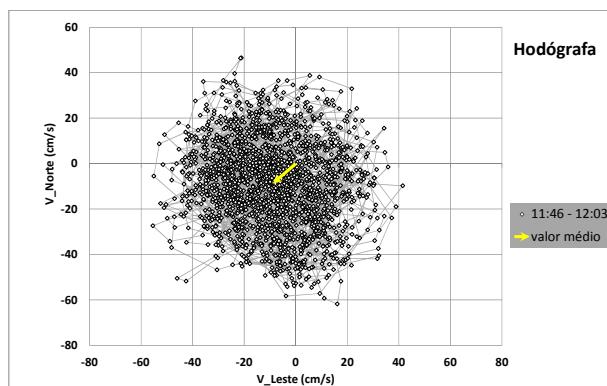
Como ilustração da complexidade do escoamento combinado onda-corrente na Natureza, a Figura 8 apresenta a hodógrafa de um registro de 17 minutos da velocidade horizontal, obtida através de um equipamento do tipo PUV, com frequência de aquisição de 2Hz, instalado em local de aproximadamente 9m na costa do Rio Grande do Norte, onde a amplitude da maré é de aproximadamente 3m.

É evidente que não existe claramente definida uma direção preponderante no registro da velocidade orbital. Seria questionável o cálculo dos espectros cruzados entre pressão e velocidade pela

<sup>2</sup> Ver imagem de um interessante exemplo em [http://en.wikipedia.org/wiki/File:Ile\\_de\\_r%C3%A9\\_C3%A9A9.JPG](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Ile_de_r%C3%A9_C3%A9A9.JPG)

metodologia de Longuet-Higgins et al. (1963), e o cálculo de uma direção com as fórmulas apresentadas nas equações (47) e (48). Além disso, de acordo com a bibliografia apresentada pelo fabricante do instrumento, não está claro se o efeito Doppler seria embutido nos cálculos internos do equipamento. Finalmente, com base nas evidências teóricas previamente apresentadas, aquele instrumento é incapaz de obter a velocidade e a vorticidade próximo à superfície livre.

Percebe-se assim anecessidadede discutir em maior detalhe a questão da simulação experimental e do monitoramento de escoamentos combinados de ondas e correntes, o que será feito na Parte 5 desta série de artigos.



**Figura 8 - Medição com instrumento tipo PUV posicionado próximo ao fundo em local de 10m de profundidade. (Dados cedidos por V.E. Amaro e A.C. Scudelari).**

## CONCLUSÕES

O trabalho apresenta resultados para a função de transferência linear entre elevação da superfície livre e velocidade horizontal e entre elevação e aceleração vertical, para quatro perfis de correntes barotrópicas (uniforme, linear, exponencial e coseno). Os resultados teóricos indicam fortemente a necessidade de inclusão não apenas da velocidade da corrente na superfície livre como também do cisalhamento vertical (vorticidade horizontal) na estimativa da altura da onda. Reciprocamente, caso se meça a altura da onda (por intermédio de boias) e se deseje calcular a velocidade oscilatória ou a tensão no fundo, desprezando a presença de uma corrente, erros significativos podem ocorrer.

Foram comentados alguns modelos numéricos ou teóricos encontrados na literatura que permitem estimar as características do escoamento combinado onda-corrente. Todos se baseiam na formula-

ção do problema matemático em termos da função de corrente, mas podem ser divididos em duas categorias: aqueles que se apoiam em expansões em série e aqueles baseados em uma transformação geométrica do domínio matemático de cálculo. O esforço computacional é semelhante, conforme indicado por Dalrymple (1973).

Para fins de engenharia costeira, parece um esforço desnecessário medir a velocidade, para então estimar o espectro da superfície livre, para novamente utilizar uma aproximação matemática (teorias lineares ou não lineares) efinalmente estimar a velocidade orbital para cálculo de tensões no fundo (modelos morfológicos) ou esforços (modelos estruturais). Com certeza, a possibilidade de medição direta do perfil de velocidades do escoamento de modo não intrusivo, tanto no campo como em laboratório, abre um novo horizonte para a percepção das ondas, o que permitirá melhor utilização das grandezas dinâmicas no dimensionamento de obras ou na previsão da evolução morfológica. No entanto, é necessário rever os conceitos teóricos que têm sido utilizados na interpretação das medições de velocidade e aprofundar a descrição teórica do fenômeno da interação entre onda e corrente.

## AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi desenvolvido com apoio da Fundação CAPES através dos Projetos PROCAD0144/01-0, PROCAD 053/2007 e CAPES-FCT-*Amigos de Boussinesq: Rede Cooperativa de Pesquisa sobre Hidrodinâmica Costeira e de Águas Rasas* (COPPE/UFRJ + FEIS/UNESP + IPH/UFRGS + UNIFEI + UFRN + LNEC + FCT/UNL), e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) como parte das atividades de pós-doutoramento do autor no Instituto de Pesquisas Hidráulicas da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. (Processo 151053/2013-8) O autor agradece também à Profª. Ada Scudelari, ao Prof. Venerando Amaro, ambos da UFRN, e à Dra Alessandra Mantovanelli pelo uso de dados de PUV e de perfilador acústico que ilustraram a discussão.

## REFERÊNCIAS

BROOKE BENJAMIN, T. (1961). "The solitary wave on a stream with an arbitrary distribution of vorticity". *Journal of Fluid Mechanics*, v.12: 97-116.

CHOI, B.H.; EUM, H.M.; WOO, S.B. (2003). "A synchronously coupled tide-wave-surge model of the Yellow Sea". *Coastal Engineering*, vol. 47, p.381-398.

CRAIK, A.D.D. (2004). "The origins of water wave theory". *Annual Review of Fluid Mechanics*, v.36, p.1-28.

CUMMINS, I. e SWAN, C. (1993). "Non-linear wave-current interactions. Wave kinematics and environmental forces". Proceedings of a Conference. Ocean Science and Offshore Engineering, Soc. for Underwater Technology, v.29: 35-51.

DALRYMPLE, R.A. (1973). "Water wave models and wave forces with shear currents". Tese de Ph.D., Dep. Engenharia Costeira e Oceanográfica, Universidade da Flórida.

DALRYMPLE, R.A. (1974). "A finite amplitude wave on a linear shear current", *Journal of Geophysical Research*, v.79 (30): 4498-4504.

DALRYMPLE, R.A. e COX, J.C. (1976). "Symmetric finite-amplitude rotational water waves", *Journal of Physical Oceanography*, v.6 (6): 847-852.

DEAN, R.G. (1965). "Stream Function representation of non-linear ocean waves", *Journal of Geophysical Research*, v.70: 4561-4572.

DEAN, R.G. (1974). "Evaluation development of water wave theories for engineering application. Volume 1. Presentation of Results". Special Report No. 1, U.S. Army Corps of Engineers, Coastal Engineering Research Center.

DEAN, R.G. e DALRYMPLE, R.A. (1991). "Water wave mechanics for engineers and scientists". World Scientific Publ., Singapura.

DIAS, A. M. (1992). "A influência de correntes para a medição de ondas do mar". Dissertação de M.Sc., Prog. de Engenharia Oceânica, COPPE/UFRJ. 68p.

[http://www.oceanica.ufrj.br/intranet/teses/1992\\_mestrado\\_andrea\\_moragas.pdf](http://www.oceanica.ufrj.br/intranet/teses/1992_mestrado_andrea_moragas.pdf)

DIAS, A. M. e NEVES, C. F. (2013). "A importância da caracterização da corrente para a correta determinação do comprimento e da altura das ondas. Parte 2: pressão dinâmica". *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, v.18 (4), p.213-229.

DUBREIL-JACOTIN, M.L. (1934). *Surla détermination rigoureuse des ondes permanentes périodiques d'ampleur finie*. *Journal de Mathématiques*, XIII, fasc. 3, 217-290.

FENTON, J.D. (1973). "Some results for surface gravity waves on shear flow". *J. Inst. Maths. Applics.*, v.12: 1-20.

HEDGES, T. S.; ANASTASIOU, K. e GABRIEL, D. (1985). "Interaction of random waves and currents". *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, ASCE, v.111, 2: 275-288.

HEDGES, T. S. e LEE, B. W. (1992). "The equivalent uniform current in wave-current computations", *Coastal Engineering*, 16, p.301-311.

HERBERS, T. H. C.; LOWE, L.R.; GUZA, R. T. (1991). "Field Verification of Acoustic Doppler Surface Gravity Wave Measurement". *Journal of Geophysical Research*, vol. 96, C9, p. 17.023-17.035.

HUNT, J.N. (1955). "Gravity waves in flowing water". *Proceedings of the Royal Society of London*, série A, vol. 231, p. 496-504.

JONSSON, I.G. (1990). "Wave-current interactions". In: B. Le Meautée D.M. Hanes (editors) (1990) *The Sea*, Vol. 9, Parte A.

KISHIDA, N. e SOBEY, R.J. (1988). "Stokes' theory for waves on a linear shear current". *J. Engineering Mechanics*, ASCE, v.114, p.1317-1334.

LAI, R.J.; LONG, S.R.; E HUANG, N.E. (1989). "Laboratory studies of wave-current interaction". *Journal of Geophysical Research*, 94, C11, p. 16.201-16.214.

LALLI, F. e BASSANINI, P. (2004). "Wave-current interaction in shallow flows". *International Journal of Offshore and Polar Engineering*, ISOPE, 14, 2, p.86-88.

LONGUET-HIGGINS, M.S., CARTWRIGHT, D.E. e SMITH, N.D. (1963). "Observations of the directional spectrum of sea waves using the motion of a floating buoy". In: *Ocean Wave Spectra. Proceedings of a Conference*, Easton MD, maio de 1961. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, p.111-136.

MOREIRA, R.M. e PEREGRINE, D.H. (2012). "Nonlinear interactions between deep-water waves and currents". *Journal of Fluid Mechanics*, 691, p.1-25. doi:10.1017/jfm.2011.436.

NEVES, C.F. (1987). "A particular rotational wave theory". Tese de Ph.D., Dep. Engenharia Costeira e Oceanográfica, Universidade da Flórida.

NEVES, C.F. e DIAS, A. M. (2013). "A importância da caracterização da corrente para a correta determinação do comprimento e da altura das ondas. Parte 1: embasamento teórico e

- dispersão". *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, v.18 (3), p.215-229.
- NEVES, C.F.; ENDRES, L.A.M.; FORTES, C.J.; CLEMENTE, D.S. (2012)."The use of ADV in wave flumes: getting more information about waves". *Proceedings.33<sup>rd</sup> International Conference on Coastal Engineering*.Santander, julho 2012.Coastal Engineering Board.ASCE.
- NEVES, C.F. e ENDRES, L.A.M. (2013)."The influence of currents on wave height estimates from pressure and velocity measurements". *6<sup>th</sup> Short Course/Conference on Applied Coastal Research*.Lisboa, 4 a 7 junho de 2013.Laboratório Nacional de Engenharia Civil - LNEC.
- OCHI, M.K. (1998). *Ocean Waves*.Cambridge University Press.
- OLABARRIETA, M., MEDINA, R. e CASTANEDO, S. (2010). Effects of wave-current interaction on current profile. *Coastal Engineering*.p.643-655. doi:10.1016/j.coastaleng.2010.02.003
- PENG, M.; XIE, L.; PIETRAFESA, L.J. (2006)."A numerical study on hurricane-induced storm surge and inundation in Charleston Harbor, South Carolina". *Journal of Geophysical Research*, 111, C8, p.doi:10.1029/2004JC002755
- PEREGRINE, D.H. (1976)."Interaction of water waves and currents". *Advances in Applied Mechanics*, v.16: 9-117.
- PEREGRINE, D.H.; JONSSON, I.; GALVIN, C. (1983).*Annotated bibliography on wave current interaction*.Miscellaneous Report 83-7.U.S. Army Corps of Engineers, Coastal Engineering Research Center, Fort Belvoir.
- REGO, V.S. (1999). "Um modelo de ondas tipo Boussinesq para escoamentos com cisalhamento vertical". Tese de D.Sc, Programa de Engenharia Oceânica, COPPE/UFRJ. [http://www.oceanica.ufrj.br/intranet.teses/1999\\_doutorado\\_valeria\\_souza\\_rego.pdf](http://www.oceanica.ufrj.br/intranet.teses/1999_doutorado_valeria_souza_rego.pdf)
- REGO, V.S. e NEVES, C.F. (2001). "Um modelo de ondas tipo Boussinesq para escoamentos com cisalhamento vertical". *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, v.6, 4: 71-90.
- SOBEY, R.J. e HUGHES, S.A. (1999)."A locally nonlinear interpretation of PUV measurements". *Coastal Engineering*, vol. 36, p. 17-36
- SROKOSZ, M. A. (1985). "Wave-current interactions: a review of some problems". Institute of Oceanographic Sciences.Report 212. 34p.
- STRONG, B.; BRUMLEY, B.; TERRAY, E.A.; KRAUS, N.C. (2000<sup>a</sup>). "Validation of the Doppler shifted dispersion relation for waves in the presence of strong tidal currents, using ADCP wave directional spectra and comparison data". *Proceedings.6<sup>th</sup> International Workshop on Wave Hindcasting and Forecasting*.Monterey, CA, USA. November 6-10, 2000.
- STRONG, B.; BRUMLEY, B.; TERRAY, E.A.; STONE, G.W. (2000<sup>b</sup>). "The performance of ADCP-derived directional wave spectra and comparison with other independent measurements". *Proceedings.Oceans 2000*. Providence, RI, USA, September 11-14, 2000. MTS/IEEE.vol.2, p.1195-1203.
- SUN, Y; CHEN, C.; BEARDSLEY, R.C.; XU, Q.; QI, J.; LIN, H. (2013). "Impact of current-wave interaction on storm surge simulation: A casestudy for Hurricane Bob". *Journal of Geophysical Research*, vol. 118, p. 2685-2701, doi:10.1002/jgrc.20207.
- SWAN, C. (1992). A stream function solution for waves on a strongly sheared current. *Proceedings.22<sup>nd</sup> International Conference on Coastal Engineering*.Veneza, ASCE. Vol. 1, p. 684-697.
- SWAN, C. e JAMES, R.L. (1998). "Random waves on a vertically sheared current". *Proceedings.25<sup>th</sup> International Conference on Coastal Engineering*. Copenhagen, ASCE. Vol. 1, p. 706-719.
- TELLES DA SILVA, A.F. e PEREGRINE, D.H. (1986). "Steep, steady surface waves on water of finite depth with constant vorticity". *Journal of Fluid Mechanics*, 195: 281-302.
- THOMAS, G.P. (1981). "Wave-current interactions: an experimental and numerical study. Part 1: Linear waves". *Journal of Fluid Mechanics*, 110: 457-474.
- THOMAS, G.P. (1990). "Wave-current interactions: an experimental and numerical study. Part 2: Non-linear waves". *Journal of Fluid Mechanics*, 216: 505-536.
- THOMAS, G.P. e KLOPMAN, G. (1997)."Wave-current interactions in the near-shore region". In: *Gravity waves in water of finite depth*, Ed. J. N. Hunt, *Advances in Fluid Mechanics*, Computational Mechanics Publications, p. 255-319.
- THOMAS, R.; KHARIF, C.; MANNA, M. (2012). "A nonlinear Schrödinger equation for water waves on finite depth with constant vorticity". *Physics of Fluids*, 24.doi: 10.1063/1.4768530
- THOMPSON, P.D. (1949). The propagation of small surface disturbances through rotational flow. *Annals. N.Y. Acad. Sci.*, v.51, p.464-474.

WOLF, J. e PRANDLE, D. (1999). "Some observations of wave-current interaction". *Coastal Engineering*, 37, p. 471-485.

XIE, L.; WU, K.; PIETRAFESA, L.J.; ZHANG, C. (2001). "A numerical study of wavecurrent interaction through surface and bottom stresses: Wind-driven circulation in the South Atlantic Bight under uniform winds". *Journal of Geophysical Research*, 106, 16.841– 16.855.

XIE, L.; PIETRAFESA, L.J.; WU, K. (2003). "A numerical study of wave-current interaction through surface and bottom stresses: Coastal ocean response to Hurricane Fran of 1996". *Journal of Geophysical Research*, 108, C2, 3049, doi:10.1029/2001JC001078.

YIH, C.-S. (1972). "Surface waves in flowing water". *Journal of Fluid Mechanics*, 51, (2), p.209-220.

ZHANG, Y.; KENNEDY, A.B.; PANDA, N.; DAWSON, C.; WESTERINK, J.J. (2013). Boussinesq-Green-Naghdi rotational water wave theory. *Coastal Engineering*, 73, p.13-27.

***The Importance Of Characterizing A Current For The Correct Estimate Of Wave Length And Height. Part 3: Orbital Velocities And Vertical Acceleration***

**ABSTRACT**

Buoys with accelerometers, often used for wave measurements, do not take into account the presence of currents. On the other hand, sensors which measure flow velocities linearly subtract the oscillatory part of the signal, neglecting strong non-linear effects of the wave-current interaction. This may lead to errors in the determination of wave height and length, as well as other dynamic quantities. Results from a linearized solution of Euler's equations are presented for orbital velocities and vertical acceleration near the free surface, considering four types of current profile: uniform velocity, linear shear, exponential, and cosine. This work estimates the errors which occur in particle velocity and vertical acceleration when an underlying current is neglected.

Results are presented in terms of the following parameters: the Froude number referred to the surface current value  $(U_s/(gh)^{1/2})$ , relative water depth  $(h/L_0)$ , and dimensionless vorticity  $(\Omega_0/\omega)$ , where  $U_s$  is the velocity of the current near the surface,  $\omega$  is the wave frequency in rad/s relative to a fixed observer,  $h$  is the water depth, and  $L_0$  is the deep water wave length given by Linear Theory in the absence of current.

**Key-words:** waves; vorticity, wave-current interaction; Stream Function Wave Theory.