

MODELAGEM HIDRODINÂMICO TRIDIMENSIONAL DE CORPOS D'ÁGUA NATURAIS COM DISCRETIZAÇÃO VERTICAL ARBITRÁRIA E VARIÁVEL.

Marcelo Montenegro Cabral¹ Paulo Cesar Colona Rosman²

RESUMO --- Em modelo hidrodinâmicos tridimensionais de corpos d'água naturais a dimensão vertical normalmente recebe um tratamento matemático e numérico diferenciado em relação a dimensão horizontal. Isto é necessário devido à natureza distinta entre os processos físicos envolvidos nas dimensões horizontal e vertical e fundamentalmente devido à deformação do contínuo modelado na dimensão vertical ocasionada pela variação temporal do nível d'água. Nós percebemos que esta última questão pode ser tratada através da descrição do movimento denominada de lagrangeana-euleriana arbitrária. Neste trabalho são apresentadas as técnicas de discretização vertical frequentemente utilizadas em modelos hidrodinâmicos de corpos d'água naturais e é apresentado um modelo hidrodinâmico tridimensional desenvolvido com a descrição do movimento lagrangeana-euleriana arbitrária. É mostrado que a utilização desta técnica pode ser utilizada em substituição as técnicas de discretização vertical usuais além de permitir uma resolução otimizada e variável da malha de cálculo. Alguns testes são apresentados com resultados bastante satisfatórios.

ABSTRACT --- In the context of three-dimensional water bodies modeling, the vertical dimension frequently receives a special mathematical and numerical treatment. This is done because of the distinct nature between the physical processes that occur in the horizontal and vertical dimensions and essentially because of the vertical deformation of the continuous caused by temporal variations of the position of the water surface. We note that this last issue can be treated by the use of the arbitrary lagrangian-eulerian method. This paper presents the most frequently used techniques of vertical discretization in the context of three-dimensional water bodies modeling. It also presents a new three-dimensional model for natural water bodies developed with the arbitrary lagrangian-eulerian method. It is showed that this method can be used in these models instead of using the usual vertical discretization techniques. The arbitrary lagrangian-eulerian method also allows varied discretization with unequal number of levels and intervals between levels along each vertical, granting optimal resolution of the vertical dimension. Some numerical experiments are presented with very satisfactory results.

Palavras-chave: Modelagem hidrodinâmica, discretização vertical, corpos d'água naturais

¹ Doutorando do Programa de Engenharia Oceânica PenO/COPPE-UFRJ. Centro Tecnológico Sala C-209, Ilha do Fundão, CEP 21945-970, Rio de Janeiro, RJ. e-mail: mmcabral@peno.coppe.ufrj.br

² Professor Adjunto do Programa de Engenharia Oceânica PenO/COPPE-UFRJ. Centro Tecnológico Sala C-209, Ilha do Fundão, CEP 21945-970, Rio de Janeiro, RJ e-mail: pccr@peno.coppe.ufrj.br

1 INTRODUÇÃO

Modelos numéricos computacionais vêm sendo cada vez mais utilizados como ferramenta de análise do comportamento de corpos d'água naturais. Algumas questões da engenharia costeira e oceanográfica e de recursos hídricos em geral só podem ser respondidas com a utilização destas ferramentas. Neste contexto estão inseridos os modelos hidrodinâmicos tridimensionais aplicáveis a corpos d'água naturais, foco deste trabalho. Modelos hidrodinâmicos de corpos d'água naturais são extremamente sofisticados e demandam investimentos em equipes de profissionais com atuação nos diversos aspectos de seu desenvolvimento, seja na parametrização dos diversos processos físicos não resolvíveis ou no aperfeiçoamento de técnicas numérico-computacionais. Neste trabalho será proposta uma técnica numérica alternativa para resolução das equações que compõem um modelo desta natureza. Não se pretende aqui desenvolver um sistema de modelagem e sim apresentar um caminho alternativo a ser explorado no desenvolvimento desses sistemas.

Modelos numéricos computacionais truncam os infinitos graus de liberdade presentes no comportamento exato do fenômeno físico em um número finito de variáveis a serem resolvidas computacionalmente. A quantidade dessas variáveis é definida por uma malha de pontos de cálculo. A natureza deste truncamento é determinada pela escolha da técnica numérica empregada, como por exemplo, diferenças finitas, volumes finitos, elementos finitos. Além disso, cada método tem suas próprias variações que controlam a qualidade da aproximação. Métodos numéricos com alta qualidade na aproximação normalmente levam a um maior tempo de processamento

Além da qualidade da aproximação numérica empregada, a forma da discretização do domínio também é uma importante questão a ser considerada. Seja qual for a escolha do método numérico não é possível uma representação rigorosa dos processos físicos que ocorrem nas escalas menores que a resolução da malha de cálculo. A resolução da malha deve estar comprometida com a representação da geometria do domínio modelado, de feições hidrodinâmicas importantes e também com erros numéricos que podem causar instabilidades no modelo. Quanto maior for a resolução da malha, maior será o número de variáveis e consequentemente, maior será o tempo de processamento dos cálculos.

A combinação ótima de técnica numérica, qualidade da aproximação, resolução da malha e tempo de processamento não é de maneira alguma uma tarefa trivial. Sobretudo porque, frequentemente em um mesmo domínio de modelagem, os fenômenos físicos envolvidos têm variações espaciais e temporais que exigiriam um tratamento numérico variável no espaço e no tempo caso seja desejável uma otimização desta combinação.

Devido a diferenças de natureza e de escala, comumente faz-se uma distinção entre o tratamento dado aos fenômenos que podem ser analisados do ponto de vista bidimensional em

planta, e aquele dado aos fenômenos que também devem ser observados ao longo da coluna d'água. Esta distinção também tem consequências no tratamento numérico dado ao conjunto de equações que compõe o modelo matemático. Na maioria dos modelos oceânicos são utilizados métodos numéricos desenvolvidos para malhas estruturadas (Pigoot et al, 2004). No espaço bidimensional, o termo “malha estruturada” designa a classe de malhas de cálculo que tem sua topologia uniforme no espaço, onde cada elemento quadrilátero (exceto aqueles dos contornos) é rodeado por precisamente oito elementos quadriláteros vizinhos, quatro deles dividindo os lados e outros quatro dividindo os vértices. Em recente trabalho Pain et al (2005) aponta como tendência natural nos novos modelos tridimensionais a utilização de malhas não estruturadas com resolução espacial dinamicamente modificada. O modelo que vem sendo desenvolvido na COOPPE/UFRJ como parte integrante do sistema de modelagem SISBAHIA[®] (Rosman, 2000) utiliza malhas não estruturadas na dimensão horizontal. A malha tridimensional é obtida repetindo a mesma estruturação bidimensional da malha em diversos níveis de profundidade. A escolha correta destes níveis, ou seja, a forma da discretização vertical é extremamente importante, sobretudo em problemas onde há fortes gradientes verticais das variáveis envolvidas. Neste trabalho é apresentado o algoritmo que está sendo implementado e testado no SISBAHIA[®]. Um foco especial foi dado nas técnicas que possibilitam que a discretização vertical do domínio seja bastante flexível e variável no tempo.

2 DISCRETIZAÇÃO VERTICAL COM TROCA DE COORDENADA VERTICAL.

Tradicionalmente os modelos de corpos d'água naturais têm sido desenvolvidos para integrar as equações tradicionais do movimento escritas em termos de um sistema de coordenadas modificado em relação ao sistema cartesiano. Sendo (x,y,z,t) o sistema de coordenadas cartesianas, a transformação para um novo sistema de coordenadas (x^*,y^*,r,t^*) é feita seguindo expressões do tipo:

$$x = x^* \quad y = y^* \quad t = t^* \quad z \rightarrow r(x, y, z, t) \quad (1)$$

A função $r = r(x, y, z, t)$ transforma analiticamente o espaço cartesiano em um novo sistema de coordenadas conforme ilustrado na Figura 1. As equações do movimento são então escritas neste novo sistema de coordenadas e resolvidas numericamente como se os pontos de cálculos fossem fixos no espaço. Em seguidas são apresentadas as equações hidrostáticas transformadas para o sistema de coordenadas (x^*,y^*,r,t^*) , conforme Adcroft & Hallberg (2006).

$$\frac{D}{Dt}(\vec{v}_h) + f\hat{k} \wedge \vec{v}_h + \frac{1}{\rho_0} \nabla_r p + \frac{\rho}{\rho_0} \nabla_r (gz) = \vec{F}_h \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} + \rho \frac{\partial}{\partial r}(gz) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial z_r}{\partial t} + \nabla_r \cdot (z_r \vec{v}_h) + \frac{\partial}{\partial r} (z_r \dot{r}) = 0 \quad (4)$$

$$\partial(z_r S) + \nabla_r \cdot (z_r S \vec{v}_h) + \frac{\partial}{\partial r} (z_r S \dot{r}) = Q_S \quad (5)$$

$$\partial(z_r \theta) + \nabla_r \cdot (z_r \theta \vec{v}_h) + \frac{\partial}{\partial r} (z_r \theta \dot{r}) = Q_\theta \quad (6)$$

$$\rho = \rho(\theta, S) \quad (7)$$

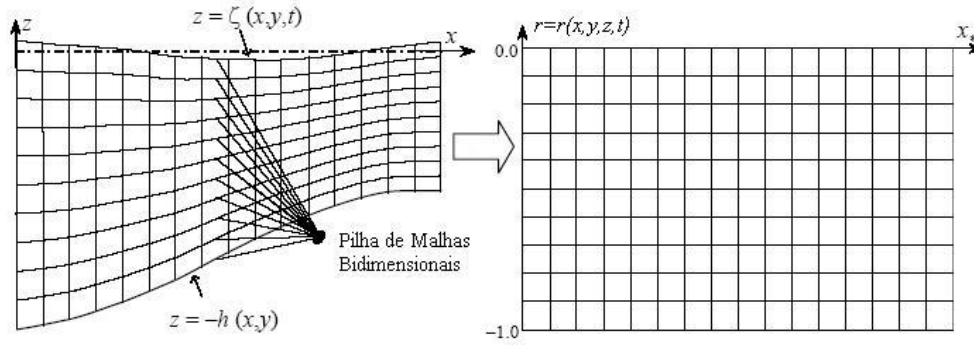


Figura 1 – Efeito da transformação da coordenada vertical $r = r(x, y, z, t)$.

Onde $\vec{v}_h$ é a componente horizontal da velocidade, f é o parâmetro de Coriolis, ρ_0 é uma referência de densidade, ρ é a densidade local, g é aceleração da gravidade, $\vec{F}_h$ é a força horizontal resultante das tensões internas do fluido, p é a componente de pressão baroclínica, $\dot{r}$ é a velocidade perpendicular as isolinhas de coordenada r , $z_r = \partial z / \partial r$ é o fator de escala descrevendo o mapeamento da coordenada vertical, S é a salinidade, θ a temperatura e Q_θ e Q_S são fontes e sumidouros de calor e sal respectivamente. $\nabla_r = (\partial / \partial x, \partial / \partial y, 0)$ é o operador de gradiente ao longo das isolinhas de coordenada r .

Fazendo $r = z$ temos o sistema de coordenadas cartesianas. Com $r = \sigma = (z - \zeta) / (\zeta + h)$, onde h é a profundidade em relação ao nível médio, temos a conhecida transformação sigma padrão (Song e Haidvogel (1994) in: Unlauf et al, 1999). A transformação sigma padrão representa a classe de transformações de coordenadas onde as isolinhas de coordenada vertical se ajustam a topografia do terreno (*Topographic following coordinate* na literatura científica). Este tipo de transformação é bastante utilizado em modelos oceânicos e costeiro. O bem conhecido modelo POM (Princeton Ocean Model) (Blumberg & Mellor, 1987) utiliza este tipo de transformação. Ao aplicar esta transformação, os pontos da malha na vertical tornam-se igualmente espaçados em cada vertical. Fazendo $r = \rho$ temos a transformação em coordenadas isopcnais. Neste tipo de transformação as isolinhas de coordenadas vertical coincidem com as isolinhas de densidade. Esta representação é mais utilizada em modelagem oceânica nos modelos de camadas adiabáticas. Um

exemplo típico de modelo em coordenadas isopícnicas é o MICOM (Miami Isopycnic Coordinate Ocean Model, Bleck et al, 1992).

Até poucos anos atrás, os modelos numéricos oceânicos podiam ser classificados em função do tipo de discretização vertical utilizada. Ou seja, em função da escolha da função $r = r(x, y, z, t)$. Cada sistema tem as suas vantagens e desvantagens. A única atual certeza é que nenhuma delas é ideal para todo o grande leque de aplicações oceânicas (Pain et al, 2005).

Os problemas relacionados com cada uma das formas de discretização vertical resultaram num grande número de publicações que levaram ao aperfeiçoamento de cada uma dessas técnicas e consequentemente à evolução desses modelos. No entanto, esta evolução nem sempre resulta em uma otimização, uma vez estes aperfeiçoamentos visam apenas corrigir problemas inerentes a estas técnicas. Por exemplo, um número muito grande de trabalhos (por exemplo: Mellor, G. L. et al, 1993) foi publicado tratando do problema do gradiente de pressão do sistema de coordenadas sigma (Haney, 1991), e desta forma houve um aprimoramento desta técnica. No entanto, nenhum destes trabalhos questiona a utilização do sistema de coordenadas sigma. Outro problema decorrente da utilização desta técnica é o grande número de termos nas equações quando transformadas analiticamente para o sistema de coordenadas sigma. Conforme discutido em Haung & Spaulding (1996), os modelos que utilizam o sistema de coordenadas sigma normalmente desprezam alguns termos menos importantes nas equações transformadas. A desconsideração destes termos objetiva uma economia computacional, no entanto resulta numa simplificação do modelo matemático original.

Modelos com sistemas de coordenadas híbridas são usados para combinar as vantagens de cada um destes sistemas de coordenadas. Por exemplo, coordenadas isopícnicas devem ser utilizadas no interior das bacias oceânicas estratificadas, coordenadas cartesianas devem ser utilizadas na camada de mistura superficial e na plataforma, e coordenadas sigma nas proximidades do leito (Griffes et al, 2000). Em modelos que utilizam sistemas de coordenadas híbridas, existem questões relacionadas a regiões de interface onde o sistema de coordenada muda. Como exemplos de modelos que utilizam vários sistemas de discretização vertical, podemos citar o modelo HYCOM (Hybrid Coordinate Ocean Model) (Bleck, 2002). Este segundo foi desenvolvido justamente para corrigir as falhas do modelo de coordenadas isopícnicas MICOM, citado no item anteriormente.

3 DISCRETIZAÇÃO GENÉRICA ATRAVÉS DA DESCRIÇÃO EULERIANO-LAGRANGEANO ARBITRÁRIA.

Os algoritmos da mecânica do contínuo computacional quase sempre se utilizam de duas clássicas descrições do movimento: a descrição Lagrangeana e a descrição Euleriana. A escolha da descrição cinemática do contínuo mais apropriado para o problema em questão é de fundamental

importância no desenvolvimento de algoritmos computacionais. Esta escolha determina a relação entre o contínuo em deformação e a malha finita de pontos de cálculo, e então condiciona a habilidade do método numérico em lidar com grandes distorções do contínuo e em obter resoluções acuradas das interfaces materiais e dos contornos móveis, Donea et al (2004). Discussões detalhadas sobre estas descrições podem ser encontradas em livros clássicos de mecânica do contínuo como, por exemplo, Malvern (1969)

Na descrição Lagrangeana, os pontos de cálculo da malha computacional seguem o movimento das partículas materiais associadas a estes, conforme ilustrado na Figura 2 a). Este tipo de descrição do movimento é bastante utilizada no desenvolvimento de modelos de transporte de contaminantes. Uma descrição matemática bastante detalha destes modelos pode ser encontrada em Dunsbergen (1994). A descrição Lagrangeana permite um fácil mapeamento das fronteiras móveis do contínuo modelado e facilita o tratamento de materiais com relações constitutivas com dependência de histórico. Entre as desvantagens desta descrição cinemática podemos citar o grande esforço computacional e armazenamento de memória requerido em algumas aplicações e características pobres de robustez com condições de contorno complicadas.

A descrição Euleriana é bastante utilizada em mecânica dos fluidos computacional. Nesta descrição do movimento, os pontos de cálculo são fixos e as partículas materiais se movem em relação a eles (Figura 2 b)). Na descrição Euleriana, grandes distorções no movimento do contínuo podem ser simuladas, mas geralmente com perda de uma definição precisa das fronteiras e dos detalhes do escoamento (Donea et al, 2004).

Em modelos hidrodinâmicos tridimensionais de corpos d'água naturais, o contínuo modelado está em permanente deformação. Isto ocorre, sobretudo em consequência da variação temporal no nível d'água, que provoca uma deformação do contínuo na dimensão vertical. Outro tipo de deformação pode ocorrer devido ao deslocamento das fronteiras laterais com o alagamento e secamento de áreas alagáveis. Com isso o contínuo sofre também uma deformação horizontal. Neste trabalho, iremos nos deter a deformação vertical do contínuo modelado.

A rigor, podemos dizer que apenas os modelos hidrodinâmicos que utilizam malhas cartesianas fixas podem ser considerados como modelos desenvolvidos em uma descrição puramente Euleriana. Os modelos desenvolvidos com o procedimento de troca de coordenada vertical discutidos no item 2 não seguem uma descrição puramente euleriana. Apenas no espaço transformado, ilustrado na Figura 1, estes modelos podem ser considerados eulerianos. Adcroft & Hallberg (2006) denominam de algoritmos pseudo-eulerianos (quasi-eulerian), a classe de algoritmos que utiliza este procedimento.

O modelo apresentado neste trabalho faz uso de uma técnica numérica bastante conhecida em mecânica computacional, mas surpreendentemente, ainda não muito utilizada em modelos de corpos d'água naturais. Esta técnica baseia-se na descrição lagrangeana-Euleriana arbitrária, frequentemente referida na literatura científica pela sigla ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian), doravante utilizada também nesta tese. Esta técnica teve seu desenvolvimento inicial em meados da década de 60 de acordo com as citações encontradas em Donea et al (2004). O trabalho mais antigo consultado para elaboração deste trabalho foi o apresentado por Hirt et al (1972) que foi republicado em 1997. Esta técnica foi desenvolvida numa tentativa de combinar as vantagens das duas clássicas descrições cinemáticas. Na técnica ALE, os nós da malha computacional podem se mover no contínuo de maneira Lagrangeana, se manter fixos de maneira Euleriana, ou se mover de forma arbitrária sem necessariamente acompanhar as partículas materiais. A Figura 2 ilustra as três descrições cinemáticas abordadas neste trabalho.

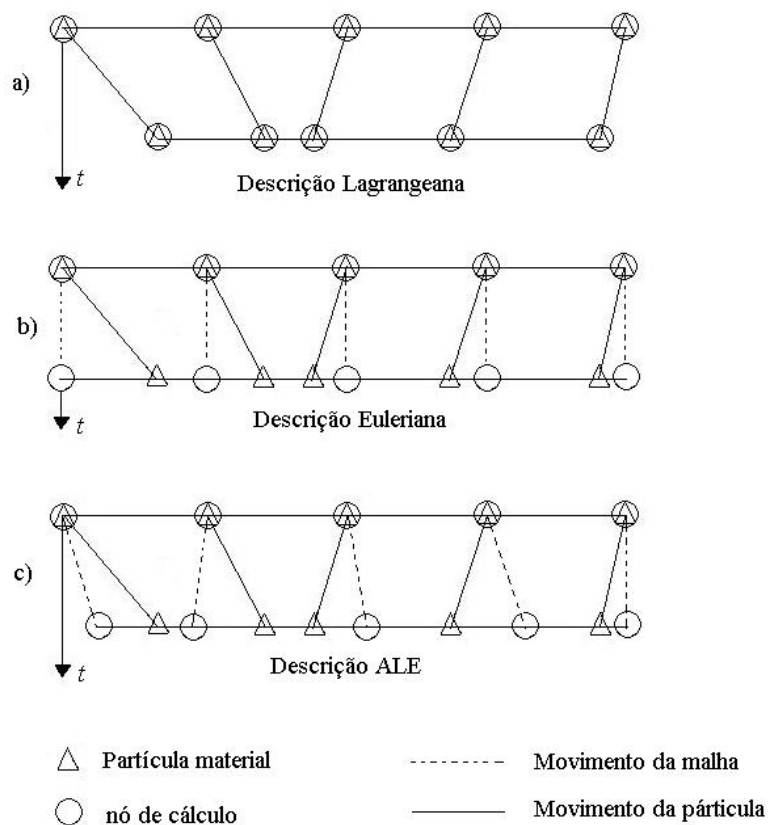


Figura 2 - Exemplo unidimensional de malhas com descrições Eulerianas, Lagrangeanas e Lagrangeana-Euleriana Arbitrária

Por causa da liberdade de movimentação dos nós propiciado pela técnica ALE, é possível adequar a malha de cálculo as variações do nível d'água e ainda concentrar nós da malha em regiões de interesse especial. Também é possível obter discretizações verticais idênticas as obtidas pelos procedimentos de troca de coordenada vertical discutidos no item 2.

3.1 As equações do movimento na forma ALE

A seguir são apresentadas as equações de conservação de quantidade de movimento e de continuidade e de conservação de sal escritas na forma ALE. As deduções matemáticas dessas equações podem ser encontradas em Donea et al (2004). As variáveis dessas equações correspondem ao um ponto de cálculo que se movimento no espaço cartesiano com velocidade $\vec{v}_{malha}$.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \vec{v} \quad (8)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (c \cdot \nabla) \vec{v} \right) = \vec{F} \quad (9)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + c \cdot \nabla S = -S \nabla \cdot \vec{v} \quad (10)$$

Onde $c = \vec{v} - \vec{v}_{malha}$ é a velocidade do fluido em relação ao ponto de cálculo e $\vec{v}_m$ é a velocidade arbitrária do ponto de cálculo. É importante observar que as equações do movimento na forma Euleriana podem ser obtidas dessas equações fazendo $\vec{v}_{malha} = 0$, ou seja considerando os pontos de cálculo fixo. As equações na forma Lagrangeana são obtidas fazendo $\vec{v}_{malha} = \vec{v}$, ou seja fazendo com que os pontos de cálculo acompanhem a velocidade do fluido.

4 DESCRIÇÃO DO MODELO

O modelo computacional proposto neste trabalho utiliza a técnica usualmente referida na literatura como separação vertical-horizontal (Vertical-Horizontal Splitting – VHS) (Jin, 1993), que consiste em dividir a solução do escoamento em dois módulos. Inicialmente é resolvido um sistema composto pelas equações do movimento promediadas na dimensão vertical. Neste módulo horizontal bidimensional é utilizado o modelo hidrodinâmico bidimensional desenvolvido com a técnica de elementos finitos por Rosman (1997). Este modelo consubstancia o pacote de modelos SISBAHIA[®]. Nesta etapa dos cálculos são obtidos os valores da elevação do nível d'água ζ e as velocidades horizontais promediadas na vertical U_i . Não serão apresentas as equações deste modelo bidimensional, nem os detalhes de seu desenvolvimento numérico. O leitor interessado deve consultar (Rosman, 2000).

Ao resolver a elevação do nível de água ζ , defini-se a espessura da coluna d'água, onde serão posicionadas os nós ao longo da vertical. Com isso, é possível posicionar os nós ao longo da vertical segundo um critério definido em um algoritmo externo. Assim tem-se construída uma malha tridimensional a cada passo de tempo. Esses algoritmos de posicionamento dos nós na vertical podem, por exemplo, seguir a idéia do sistema de coordenadas sigma, concentrar nós em regiões de interesse especial, seguir as isolinhas de densidade ou qualquer outra configuração a ser

definida pelo modelador. Existem alguns trabalhos que apresentam algoritmos para posicionamento dinâmico dos nós na vertical em modelo hidrodinâmicos entre os quais podemos destacar Buchar & Beckers (2004) e Fortunato & Oliveira (1999). Neste trabalho o número de nós em cada vertical mantém fixo, apenas a posição dos nós é que é alterada em cada passo de tempo. No entanto, não existem impedimentos na técnica utilizada para que seja utilizado um número de nós determinado para cada vertical.

Após o posicionamento dos nós na vertical são resolvidas as equações tridimensionais do movimento. Para contabilizar a movimentação dos nós de cálculo são utilizadas as equações na forma ALE.

4.1 RESUMO DO ALGORITMO

Nesta seção é apresentado o algoritmo básico utilizado no modelo. A Figura 3, a Figura 4, e a Figura 5, a seguir apresentadas, ilustram as 3 etapas do algoritmo do modelo que são executadas a cada passo de tempo.

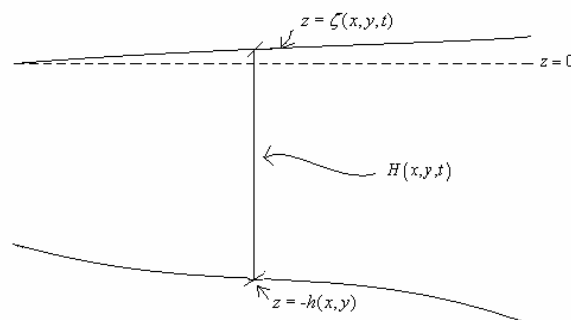


Figura 3 – 1ª Etapa – Cálculo da elevação no nível d'água ζ e da velocidade média promediada na vertical. modelo 2DH

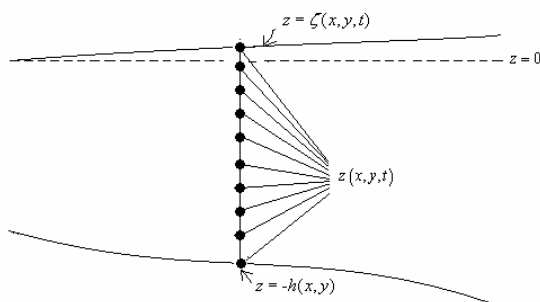


Figura 4 – 2ª etapa: posicionamento dos nós na vertical

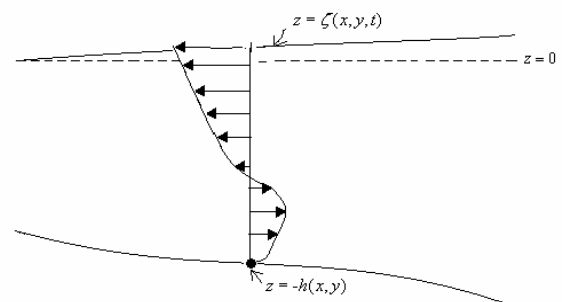


Figura 5 - 3ª etapa: cálculo do campo tridimensional de velocidades

Na 1ª etapa são calculadas a elevação do nível d'água e a velocidade média na vertical. Para isso são utilizadas as equações de conservação de quantidade de movimento e de conservação de

massa promediadas na dimensão vertical. Isto é feito com o modelo hidrodinâmico bidimensional desenvolvido por Rosman (1997)

Na 2ª etapa, os nós são posicionados na vertical de acordo com um algoritmo externo ao modelo matemático.

Na 3ª etapa, após ser construída a malha tridimensional, são resolvidas as equações do modelo tridimensional, a seguir apresentado.

4.2 MODELO MATEMÁTICO

A seguir é apresentado o sistema de equações matemáticas tridimensionais que compõem o modelo computacional apresentado neste trabalho. Nas equações (11) e (12) ζ é cota do nível d'água e portanto o primeiro termo do lado direito da equação refere-se ao gradiente de pressão barotrópico. O segundo termo à direita corresponde ao termo de pressão baroclínica e os terceiros e quartos termos correspondem às tensões turbulentas. u, v, w são respectivamente as duas componentes horizontais e a componente vertical do vetor velocidade. Neste modelo a malha bidimensional permanece fixa no tempo e os nós só se movimentam ao longo da vertical. Por isso apenas a velocidade vertical da malha w_{malha} aparece nas equações.

4.3 Equações governantes

Equação de conservação de quantidade de movimento na direção x:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + (w - w_{malha}) \frac{\partial u}{\partial z} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{1}{\rho_0} g \int_z^\zeta \frac{\partial \rho}{\partial x} + A_h \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + A_v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + fv \quad (11)$$

Equação de conservação de quantidade de movimento na direção y:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + (w - w_{malha}) \frac{\partial v}{\partial z} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{1}{\rho_0} g \int_z^\zeta \frac{\partial \rho}{\partial y} + A_h \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + A_v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - fu \quad (12)$$

Equação da continuidade na forma integral

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_i} \rho dV + \int_{S_i} \rho (\vec{v} - \vec{v}_{malha}) \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (13)$$

Equação de transporte advectivo difusivo de sal:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial y} + (w - w_{malha}) \frac{\partial s}{\partial z} = K_h \left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} \right) + K_v \left(\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \right) \quad (14)$$

Equação de estado. Em regiões costeiras, de uma maneira geral, a massa específica pode ser expressa em função apenas da temperatura (θ) e da salinidade (s). Uma maneira simples de definir esta relação, e que resulta em uma boa aproximação, é a utilização da fórmula de Eckart (Rosman, 1997), dada por:

$$\rho(s, T) = 100 \frac{1 + A}{B + 0.0698A} \quad (15)$$

$$\text{Sendo: } A = 5890 + 38 \cdot \theta - 0,375 \cdot \theta^2 + 3S$$

$$B = 1779,5 + 11,25 \cdot \theta - 0,0745 \cdot \theta^2 - (3,8 + 0,01 \cdot \theta) \cdot S$$

Uma equação de transporte advectivo e difusivo de temperatura também faz parte do modelo matemático. Por ter a forma idêntica à equação (14), esta não foi apresentada.

4.4 Seqüência dos Cálculos do modelo tridimensional (3ª etapa do algoritmo)

Inicialmente são resolvidas as equações de conservação de quantidade de movimento (11) e (12) e com isso são obtidas os valores das componentes horizontais u e v do vetor velocidade. Com estes valores é resolvida a equação de conservação de massa (equação 13) e com isso é obtida a velocidade vertical relativa à malha $w - w_{malha}$. Em seguida são resolvidas as equações de transporte advectivo e difusivo (14) e com isso são obtidos os campos de salinidade e temperatura. Com isso, é calculada a densidade de água em cada ponto de cálculo através da equação de estado (15). Com os valores de densidades é calculado os termos de pressão baroclínico das equações (11) e (12). Em todas as etapas são necessárias interpolações e extrapolações das variáveis. Estas operações são feitas com resultados de passos de tempo anteriores e posteriores com aproximações de segunda ordem.

4.5 Coeficientes de viscosidade e difusão turbulenta.

A modelagem dos coeficientes de turbulência é por si só um vastíssimo campo de pesquisa. Os coeficientes de mistura vertical K_v e A_v são frequentemente representados por modelos de fechamento de alta ordem, enquanto que os coeficientes de mistura horizontal K_H e A_H , como tem menor importância geralmente são parametrizados com esquemas de mais baixa ordem (Haidvogel & Beckmann, 1999). Neste trabalho utilizaremos valores constantes para os coeficientes horizontais K_H e A_H .

Para a modelagem dos coeficientes de viscosidade turbulenta na vertical, Verdier-Bonnet et al (1999) aponta uma tendência em modelos tridimensionais para corpos de água estratificados de utilizar modelos de fechamento de turbulência com duas equações de transporte para variáveis turbulentas. Talvez o modelo de turbulência com duas equações de transporte mais popular é o conhecido modelo $k - \varepsilon$ apresentado inicialmente por Jone & Launder, 1973 (in: Verdier-Bonnet et al, 1999). Sub-rotinas em linguagem FORTRAN com vários modelos de turbulência podem encontradas no modelo GOTM (General Ocean Turbulence Model) disponível na internet no site: <http://www.gotm.net>.

Neste trabalho será utilizada uma parametrização bem mais simples. A viscosidade turbulenta vertical sem influência a estratificação de densidade A_v^0 é calculada utilizando uma bem conhecida distribuição parabólica ao longo da vertical, seguindo o exemplo do modelo hidrodinâmico tridimensional SisBAHIA[®] apresentado em Rosman (2000).

$$A_v^0 = \kappa |u_*| (z + h) \left(1 - \frac{z + h}{H} \right) \quad (16)$$

Na presença de estratificação de densidade, os gradientes de densidade oferecem resistência a transferência vertical de massa e quantidade de movimento promovida pelos processos turbulentos. O número de Richardson de fluxo fornece uma boa medida da influência da estratificação nos processos de mistura vertical, através de uma relação entre os gradientes de densidade e velocidade (Dyer, 1997)

$$Ri = - \frac{g}{\rho_0} \frac{\frac{\partial \rho}{\partial z}}{\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2} \quad (17)$$

Neste trabalho a influência da estratificação nos coeficientes da difusão vertical foram modelados através das expressões encontradas na literatura desenvolvidas por Munk e Anderson (1948) (in: Rodi, 1984):

$$A_v = A_v^0 (1 + 10 Ri)^{-1/2} \quad (18)$$

$$K_v = K_v^0 (1 + 3,33 Ri)^{-3/2} \quad (19)$$

4.6 Condições de contorno

As condições de contorno adotadas no modelo matemático proposto utilizam as mesmas considerações e parametrizações utilizadas em Rosman (2000). Por isso, o leitor interessado deve recorrer a esta referência para mais detalhes.

Para resolver as equações de quantidade de movimento (11) e (12) são utilizadas condições de fluxo nulo nos contornos laterais. No contorno de superfície é imposta a tensão de atrito devido ao vento na superfície. No fundo é imposta a tensão de atrito devido à rugosidade do leito e a condição de não deslizamento, ou seja, velocidade horizontal nula.

Para resolver a equação de continuidade (13) são utilizadas condições cinemáticas na superfície livre e no fundo.

Para resolver a equação de transporte advectivo e difusivo (14) de sal e temperatura são impostas condições de contorno de fluxo nulo nos contornos de terra. Nos contornos abertos

laterais, na situação de afluxo, é imposto o valor da salinidade ou temperatura como condição de contorno. A situação de efluxo é resolvida a equação (14) com desconsideração dos termos difusivos. Não foram implementadas condições de contorno de superfície representativas das trocas de calor com a atmosfera. Estas condições de contorno são essenciais para modelagem diversos tipos de copos d'água, com lagos, reservatórios e regiões oceânicas. As parametrizações dos fluxos de calor na superfície podem ser encontradas em diversas publicações, como por exemplo, Martin & McCutcheon (1999). Esses fluxos não foram considerados nos casos até então testados, mas serão implementados e apresentados em futuras publicações. É importante observar que a não consideração desses fluxos não invalida o modelo numérico apresentado, uma vez que estes podem ser implementados sem modificação alguma no algoritmo e no esquema numérico do modelo proposto.

4.7 Modelo numérico

A maioria dos modernos códigos computacionais desenvolvidos com a descrição Lagrangeana-Euleriana arbitrária são baseados no método de elementos finitos ou o método de volume finitos Donea et al (2004). Entretanto podem ser encontradas algumas poucas publicações sobre aplicações do método ALE baseadas no método de diferenças finitas como, por exemplo: Chew et al (2006). O método numérico selecionado para resolver as equações na forma ALE, deve permitir a utilização de malhas de cálculo com espaçamentos variados e não ortogonais em todas as direções. Para resolver as equações tridimensionais do movimento na forma ALE utilizando uma malha de cálculo com essas características será utilizado o método do elemento móvel conforme apresentado em Cabral (2005). Uma malha bidimensional é definida com o auxílio de softwares de geração de malha a partir dos contornos laterais do domínio. A malha tridimensional é construída simplesmente especificando o número de nós em cada vertical considerando a profundidade de cada nó horizontal. Como condição inicial, os nós são distribuídos com igual espaçamento ao longo de cada vertical. Isto equivale a discretização obtida com a transformação de coordenadas sigma. Ao longo da simulação a movimentação dos nós obedece a um algoritmo de posicionamento dos nós selecionada pelo modelados.

Toda a discretização temporal é feita utilizando esquemas que envolvem erros da ordem $(\Delta t)^2$. Nos termos não lineares foi utilizada a técnica de fatoramento implícito, apresentada em Rosman (1987). Nas equações tridimensionais (11), (12) e (14) a discretização temporal é feita de maneira à implicar apenas os valores das variáveis ao longo da coluna d'água localizadas num mesmo ponto na horizontal. Desta maneira, para cada ponto horizontal, são obtidos sistemas tri diagonais que podem ser resolvidos rapidamente por algoritmos de varredura dupla. Esta idéia é idêntica a adotado por Rosman (2000). Mas detalhes podem ser encontrados nesta última referência.

A equação de conservação de massa é resolvida na sua forma integral através de um procedimento desenvolvido para este modelo computacional. A Figura 6 representa um corte longitudinal na direção x da malha tridimensional. A área hachuriada é a região de aplicação da equação (13) correspondente a superfície de integração S_i e ao volume de integração em V_i . Os valores das velocidades horizontais nos segmentos cb , ab e ad e suas localizações são obtidos através dos valores médios das coordenadas e dos valores das variáveis pontos vizinhos de maneira análoga a aproximação utilizada no método de volumes finitos (ver em Fletcher (1987)). É importante observar que esta etapa do algoritmo já foram obtidos os valores das velocidades horizontais nos nós de cálculo. Através da condição cinemática de superfície livre, a integral de superfície equação (13) é anulada no segmento dc . Isto ocorre, pois como a superfície livre representa uma superfície material, teremos os pontos de cálculo se movendo de maneira lagrangeana, ou seja com $\vec{v} = \vec{v}_{malha}$. Como os segmentos cb e ad estão alinhados com a dimensão vertical z , nestes segmentos o fluxo devido a componentes vertical da velocidade são nulos. Por isso, a única parte da equação (13) desconhecida nesta etapa de cálculo é aquela referente ao fluxo vertical relativo à malha no segmento ab . Com isso, pode ser obtida explicitamente uma expressão para a velocidade vertical relativa $w - w_{malha}$ no segmento ab .

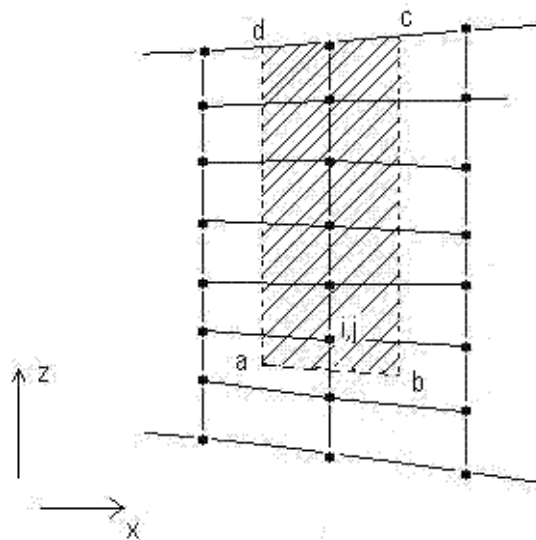


Figura 6 – Ilustração do procedimento para cálculo da velocidade vertical relativa.

Os cálculos são executados partindo do ponto mais próximo do fundo. O segmento ab cruza o ponto médio entre o ponto de cálculo (i,j) ilustrado na figura e o ponto imediatamente abaixo deste. No ponto mais próximo do fundo é utilizada a condição de velocidade vertical nula no fundo ou seja: $w = w_{malha} = 0$. Para o cálculo de velocidade vertical relativa $w - w_{malha}$ em um ponto qualquer é utilizado sempre o resultado do valor obtido no ponto imediatamente abaixo do ponto de cálculo, obtido na etapa anterior.

5 TESTES NUMÉRICOS

Nesta seção são apresentados alguns testes numéricos utilizados para verificação do modelo. Em todos os testes apresentados neste trabalho o posicionamento dinâmico dos nós na vertical seguiu a idéia do sistema de coordenadas sigma padrão. Ou seja, a cada passo de tempo, cada vertical é dividida pelos nós de cálculo em segmentos igualmente espaçados.

5.1 Teste em canal uniforme com ação do vento

Este teste corresponde à reprodução do experimento realizado por Yu (1987):in: Jin 1993. AS instalações deste experimento eram compostas de um canal com seção transversal de 0,80 m x 0,59 m. Sobre o canal havia um túnel de vento, que permitia a geração de uma tensão de atrito constante e uniforme sobre a superfície livre. A Figura 7 ilustra as instalações deste experimento. Com a reprodução deste experimento é possível a verificação do perfil de velocidade obtido pelo modelo numérico sob o efeito da tensão do vento. Os resultados do modelo numérico foram comparados com a uma solução analítica para o perfil de velocidades apresentada em Rosman (2000). Neste caso a água tem salinidade e temperatura constantes e uniformes durante todo o experimento.

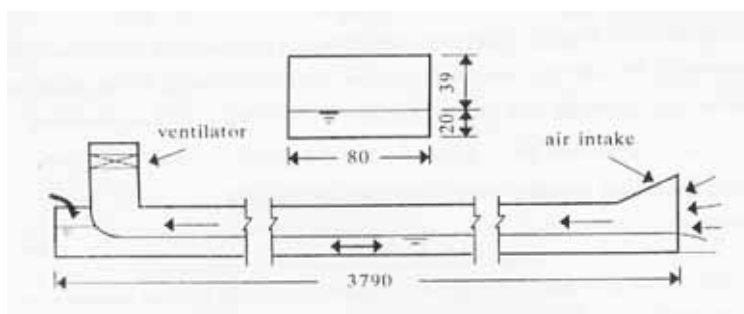


Figura 7 – Esquema do experimento de Yu (1987)

Foram feitas várias simulações com diferentes condições de vazão no canal e velocidade do vento. Na Figura 8 e nas Figura 9 são apresentados dois dos resultados obtidos para os perfis verticais de velocidades. Como podem ser observados nestas figuras, os resultados numéricos concordam muito bem com a solução analítica. Foi utilizado um passo de tempo de 5 segundos.

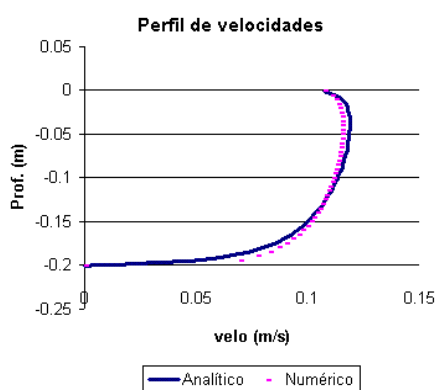


Figura 8 - Resultado do perfil vertical de velocidade obtido com velocidade média do canal 10,4 cm/s e velocidade do vento de - 5,7 m/s

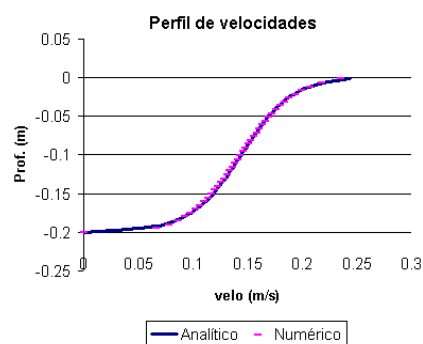


Figura 9 - Resultado do perfil vertical de velocidade obtido com velocidade média do canal 14,1 cm/s e velocidade do vento de 8 m/s

5.2 Teste em canal com fundo inclinado

Este teste apresentado em Jin (1983) tem como objetivo verificar o efeito dos termos advectivos no perfil de velocidades. Para isso, é reproduzido um escoamento uniforme num canal com fundo inclinado como ilustrado na Figura 10. Novamente os resultados numéricos são confrontados com os resultados obtidos com a solução analítica para o perfil de velocidades apresentada em Rosman (2000). Esta solução analítica tem como premissa o escoamento ser permanente e uniforme, ou seja: a solução analítica despreza os termos advectivos.

O canal modelado tem 1300 m de comprimento que foi discretizado com 66 seções cálculo. A largura, de 50 m foi discretizada com 3 pontos em cada seção transversal. Foi imposta em uma das extremidades uma vazão de $40 \text{ m}^3/\text{s}$ no sentido indicado na Figura 10. Foi utilizado um passo de tempo de 5 s.

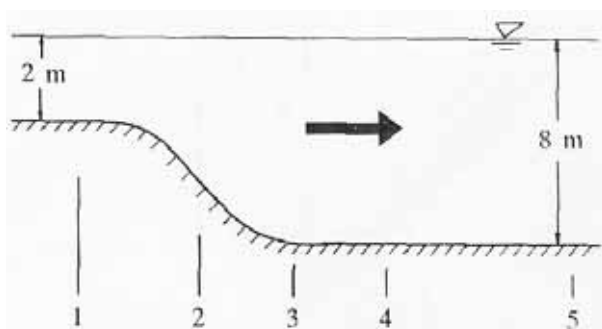


Figura 10 – Experimento em canal com fundo inclinado

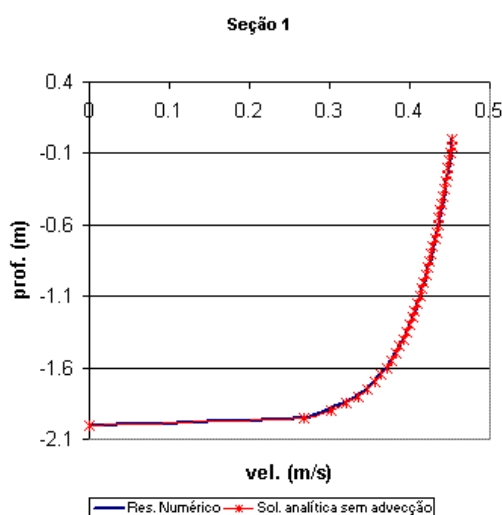


Figura 11 – Resultado do experimento na canal de fundo inclinado na seção 1

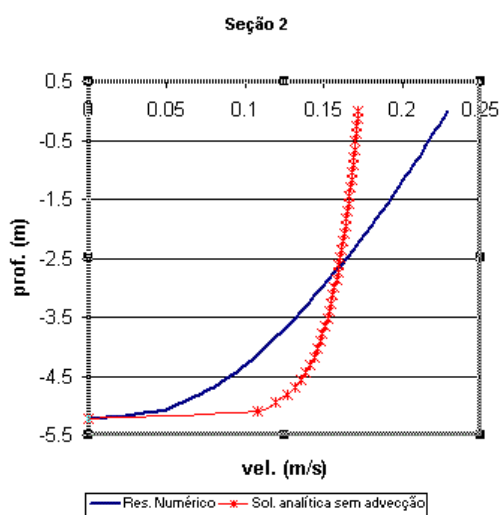


Figura 12 - Resultado do experimento na canal de fundo inclinado na seção 2 (meio da rampo)

Na Figura 11e na Figura 12 são apresentados os resultados dos perfis de velocidade obtidos com o modelo numérico e com a solução analítica. Na seção 1 do canal (Figura 11), no início do

canal, com o fundo é plano, os resultados no modelo numérico e a solução analítica coincidem perfeitamente. Este resultado é esperado uma vez que, por conta do fundo plano não há variações longitudinal da velocidade e, portanto os termos advectivos são nulos. Na seção do canal 2 (Figura 12), no meio da rampa, os termos advectivo passam a ter um efeito significativo e o perfil numérico desvia consideravelmente do perfil obtido com o modelo analítico. Estes coincidem com os resultados apresentados em Jin (1993). Foi utilizado um passo de tempo de 5 s.

5.3 Escoamento em canal com influência de maré e formação de Cunha salina

O domínio modelado corresponde a um canal de seção retangular uniforme com largura de 100 m, comprimento de 10.887,5 m e profundidade média de 6m. Este domínio foi discretizado dividindo o comprimento em 25 partes iguais, com espaçamento uniforme de 435,5 m. Na dimensão Lateral, foram utilizados apenas três nós. Na vertical, o domínio foi discretizado em 31 níveis de profundidade com espaçamento determinado dinamicamente a partir da altura da coluna d'água, seguindo a mesma idéia da transformação de coordenadas sigma padrão, ou seja cada vertical é dividida pelos pontos de cálculo em segmentos de dimensões idênticas.

O modelo foi forçado, com condições de contorno nas extremidades do canal. Em uma das extremidades do canal, em $x = 0$ m, foi imposta a condição de contorno típica de influência da maré, ou seja, foi prescrita a elevação no nível d'água na forma de um registro típico de maré, conforme ilustrado na Figura 13. Esta série temporal foi extraída de um registro de maré em COPPETEC (2004) na desembocadura do Canal de São Francisco – Baía de Sepetiba – RJ.

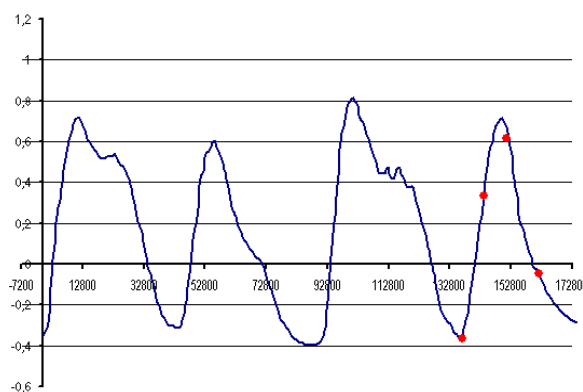


Figura 13 – Condição de contorno de elevação do nível d'água no contorno de mar do modelo extraída de registro de maré na desembocadura do Canal de São Francisco – Baía de Sepetiba - RJ

Na outra extremidade do canal, ou seja, na posição $x = 10.887,5$ m foi imposta uma vazão constante de $15 \text{ m}^3/\text{s}$ durante o período do experimento.

A seguir são apresentados gráficos com vetores de velocidade e padrões de salinidade obtidos no experimento, nos instantes indicados com marcadores em vermelho na Figura 13.

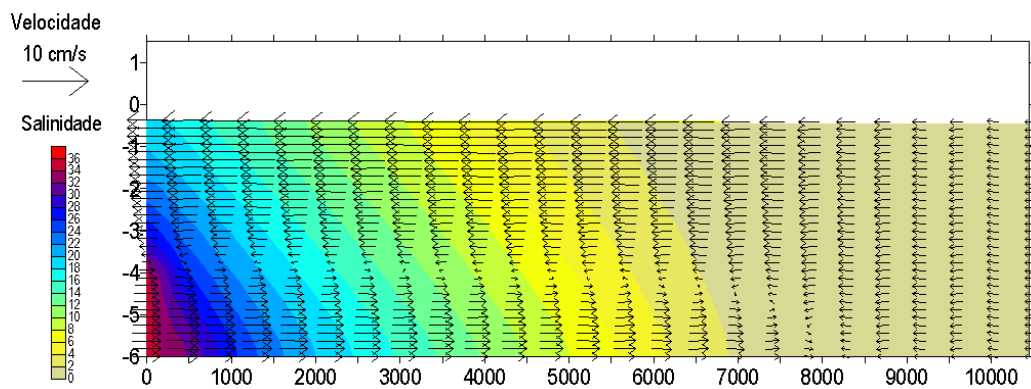


Figura 14 – Resultado da simulação com canal retangular no instante $t = 136800$ s

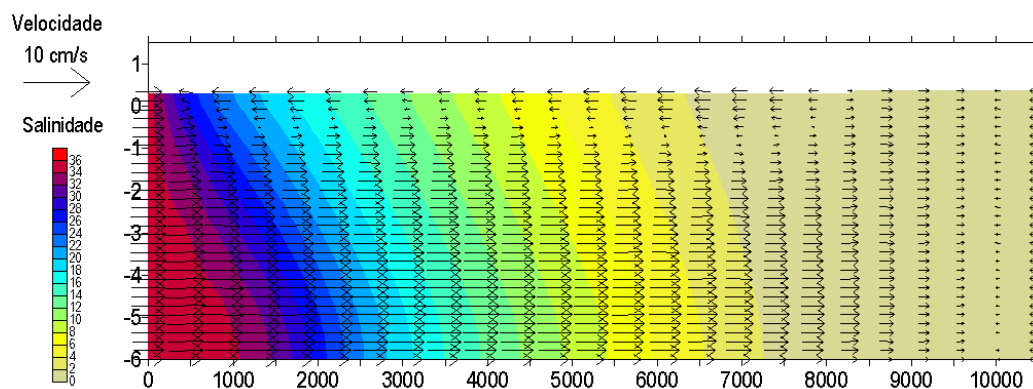


Figura 15 - Resultado da simulação com canal retangular no instante $t = 144000$ s

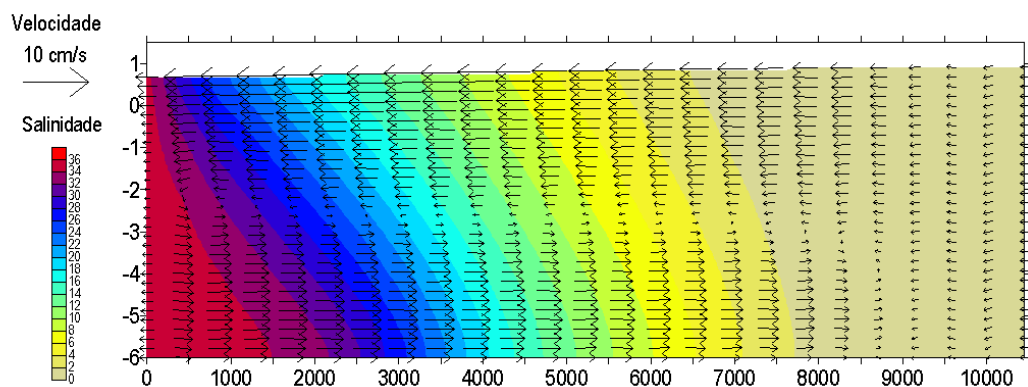


Figura 16 - Resultado da simulação com canal retangular no instante $t = 151200$ s

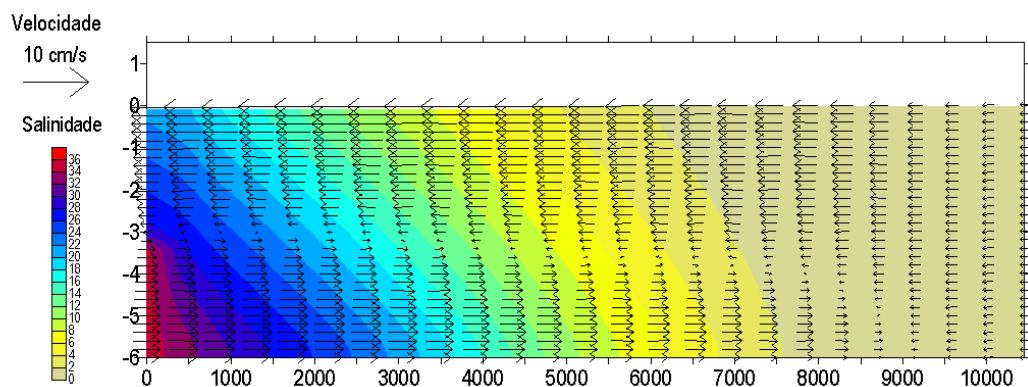


Figura 17 - Resultado da simulação com canal retangular no instante $t = 162800$ s

Como pode ser observado nas Figuras, os resultados condizem com as feições hidrodinâmicas esperadas para um estuário com cunha salina bem formada. Em algumas verticais é observada uma grande diferença de salinidade entre a região próxima da superfície e a região próxima ao fundo, mostrando que o modelo consegue resolver fortes gradientes. O campo de velocidades também é coerente com a estrutura de velocidade de estuário com cunha salina bem formada.

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho foram apresentados os primeiros testes do modelo que vem sendo desenvolvida na COPPE/UFRJ como parte do contínuo desenvolvimento do sistema de modelagem SISBAHIA[®]. Os resultados obtidos nos testes apresentados neste trabalho foram bastante satisfatórios e promissores. Testes adicionais ainda são necessários para a verificação da aplicabilidade deste modelo em problemas mais complexos. A próxima etapa será a utilização de algoritmos mais sofisticados de posicionamento dinâmico dos nós na vertical. Com isso será explorada a potencialidade do modelo em ter uma discretização vertical que se ajuste as feições hidrodinâmicas internas e não só às variações da coluna d'água. Em um teste mais definitivo, o modelo será testado em um caso real com confrontação dos resultados com dados medidos em campo.

BIBLIOGRAFIA

- ADCROF, A., HALLBERG, R., 2006, *On Methods for solving the oceanic equations of motion in generalized vertical coordinates*. Ocean Modelling 11 224-233.
- CABRAL, M. M., ROSMAN, P.C.C., 2005, *Modelagem tridimensional de corpos d'água naturais pelo método do elemento móvel*. Anais do XV Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos. ABRH
- CHEW, C.S, YEO, K.S., SHU, C, 2006. *A generalized finite-difference (GFD) ALE scheme for incompressible flows around moving solid bodies on hybrid mesfree-Cartesian grids*. Journal of Computational Physics 218 (510-548)
- BLECK, R. ET AL, 2002. *Hybrid Coordinate Ocean Model (HYCOM)*, User's Manual. <http://panoramix.rsmas.miami.edu/hycom/documentation.html>
- BLUMBERG, A. F. & MELLOR G. L., 1987. A description of a three-dimensional coastal ocean circulation model. Three dimensional coastal ocean model 1-16. American Geophysical Union
- BUCHARD, H & BECKERS, J.M., 2004, Non uniform adaptative vertical grids in ocean-dimensional numerical ocean models. Ocean Modelling (6), 51-81
- DYER, K. R., 1997 *Estuaries: A physical Introduction*, Second edition, John Wiley & Sons, New York, USA.
- DONEA, J, HUERTA, A. PONTOT, J.-Ph, RODRIGUEZ-FERRAN, A., 2004. *Arbitrary Lagrangian-Eulerian Methods*. Encyclopedia of Computational Mechanics, Volume I, Chapter 14. John Wiley & Sons Ltd.

- DUNWSBERGE, D. W., 1994. *Particle models for transport in three dimensional shallow water flows*. P.H.D Thesis, Delft University of Technology. Netherland. 228 p.
- FLETCHER, C.A.J, 1997, *Computational techniques for fluid dynamics Volume I*. Springer Series in Computational Physics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- FORTUNATO, A.B. OLIVEIRA, A., 1999. *An Adaptive Technique for vertical structure of shallow water models*. Applied Mathematical Modelling 23, 639-650 Elsevier
- HAIDVOGEL, D. B. & BECKMANN, 1999. *Numerical Ocean Circulation Modeling*. Series On Environmental Science And Management. Imperial College Press
- HANEY, R.L., 1991. *On the pressure gradient force over steep topography in sigma coordinate ocean models*. Journal of Physical Oceanography 21, 610-619.
- HIRT, C.W, AMSDEN A.A., COOK, J.L., 1972 – *An arbitrary Lagrangian-Eulerian Computing Method for all flow Speeds*. Joural of Computational Physicis 135, 203-216 (1997)
- HUANG, W., SPAULDING, M., 3D, 1995 *Model of estuarine circulation and water quality induced by surface discharges*. Journal of Hydraulic Engineering (121), 300-311.
- JIN, X-Y, 1993, *Quasi-Three dimensional Numerical Modelling of Flow and dispersion in shallow Water*. Ph. D. Thesis, Delft University of Technology at Delft, The Netherlands.
- MALVERN, L.W., 1969. *Introduction to the Mechanics of the Continuous Medium*. Prentice-Hall: Englewood Cliffs.
- MARTIIN J. L.,S. C. McCUTCHENON. 1999. *Hydrodynamics and transport for water quality modeling*. Lewis Publishers, NY.
- PAIN C.C. ET AL, 2005, *Three-dimensional unstructured mesh ocean modeling*, Ocean Modeling 10, 5-33, Elsevier.
- PIGGOTT ET AL 2004, h, r, hr adaptivity with applications in numerical ocean modeling, Ocean Modelling (10), 95-113.
- ROSMAN, P.C.C., 1987. *Modeling shallow water bodies via filtering technics*. Ph. D. Dissertation. Massachussets institute of Technology (MIT), 273 p
- ROSMAN, P.C.C.,1997, Subsídios para modelagem de sistemas estuarinos – In: Associação Brasileira de Recursos Hídricos, Métodos Numéricos em Recursos Hídricos, Volume 3, pp 231-343, Brasil
- ROSMAN, P.C.C., 2000, SISBAHIA – (Sistema Base de Hidrodinâmica Ambiental) – Documentação de referência técnica- Fundação COPPETEC – COPPE/UFRJ. Disponível na internet no site: www.sisbahia.coppe.ufrj.br .
- UNLAUF, L., WANG, Y. & HUTTER, K, 1999. *Comparing Two Topographic Following Primitive Equation Models For Lake Circulation*. Journal of Computacional Physics 153, 638-659
- VERDIR-BONNET, C. et al, 1999. *Three dimensional modeling of coastal circulations with different $k - \varepsilon$ closures*. Journal of Marine Systems 21 (1999) 321-339