

GERAÇÃO E CONTROLE DE ROLL WAVES EM FLUIDOS HIPERCONCENTRADOS

*Leandro de Oliveira B. Leite*¹; *Fabiana de Oliveira Ferreira*²; *Geraldo de Freitas Maciel*³ & *Adriana Silveira Vieira*⁴

RESUMO-A proposta deste trabalho é estudar a geração de Roll Waves em fluidos hiperconcentrados escoando em canais inclinados. A priori foi desenvolvido um modelo matemático para a geração de Roll Waves com base nas equações de águas rasas e reologia Binghamiana, conforme apresentada em Maciel (1998). Num segundo momento, utilizando-se de uma linguagem inovadora (Matlab-Simulink), um novo modelo matemático com a inclusão de termos difusivos foi desenvolvido. Recentemente, um modelo matemático completo com base nas equações de Navier Stokes e reologia de Herschel-Bulkley foi equacionado. A análise numérica para o modelo em questão foi realizada em plataforma de programação Python e as condições de instabilidades e de geração de Roll Waves foram estabelecidas.

ABSTRACT- The purpose of this work is to study roll waves generation in hyperconcentrated fluids flowing in sloping canals. First, a mathematical model based on the shallow water equations was developed taking in account a binghamian rheology (Maciel (1998)). Second, a new mathematical model, with the inclusion of difusive terms, was determined and the numerical simulations were obtained using Matlab-Simulink. Recently, a complete mathematical model, based on Navier Stokes equations and Herschel-Bulkley rheology was established. In this case, the numerical simulations were carried through a new platform – Python - and the conditions of generation of Roll Waves had been established.

Palavras-chave: Roll Waves, fluido hiperconcentrado, Simulink.

¹ Mestrando em Eng. Mecânica, FEIS/UNESP, PPGEM, Av Brasil Centro, 56, 15385-000, Ilha Solteira. e-mail leandroobl@dem.feis.unesp.br

² Mestranda em Eng. Mecânica, FEIS/UNESP, PPGEM, Av Brasil Centro, 56, 15385-000, Ilha Solteira. e-mail fabid@dem.feis.unesp.br

³ Professor Adjunto da FEIS-UNESP, PPGEM, Alameda Bahia, 550, 15385-000, Ilha Solteira. e-mail maciel@dec.feis.unesp.br

⁴ Mestranda em Eng. Mecânica, FEIS/UNESP, PPGEM, Av Brasil Centro, 56, 15385-000, Ilha Solteira. e-mail fabid@dem.feis.unesp.br

1 - INTRODUÇÃO

Os escoamentos que se processam sobre declividades podem desenvolver instabilidades em forma de ressalto hidráulico móvel ou Bore Waves. Essas instabilidades podem aparecer tanto em fluidos newtonianos, quanto em fluidos não newtonianos. Tais perturbações, com comprimento de onda definido, são denominadas Roll Waves. Não é raro encontrá-las em rios íngremes, em canais artificiais, vertedouros de barragens, deslizamentos de avalanchas ou em corridas de lamas e detritos.

Visando a aplicação deste estudo em problemas de engenharia, um modelo matemático capaz de reproduzir Roll Waves contribuiria para um maior controle do fenômeno em questão, por exemplo, um eventual redimensionamento de bordas livres de um canal. A figura 1 mostra o fenômeno das Roll Waves na natureza e o desenvolvimento da mesma, geradas em lama na rampa de lavas torrenciais da UNESP - Ilha Solteira.



Figura 1- Visualização do fenômeno Roll Waves em escoamentos hiperconcentrados (esquerdo) e na rampa de lavas torrenciais da UNESP-Ilha Solteira (direito) respectivamente.

Jeffreys (1925) foi o primeiro a estabelecer um critério sobre a formação de Roll Waves, deduziu a partir de uma análise de estabilidade linear, que o escoamento uniforme tornava-se instável se o número de Froude fosse superior a 2. Dressler (1949) utilizando as equações de águas rasas sem os termos de difusão, combinada à equação do ressalto hidráulico, mostra que, soluções regulares, periódicas e separadas por descontinuidades com picos na superfície livre aparecem, quando $\tan(\theta) > 4.g/C^2$, (θ : declividade do canal). Essa análise não permite determinar o comprimento dessas ondas.

Quanto à formação de Roll Waves em fluidos hiperconcentrados, o maior número de trabalhos está associado à análise em reologia Binghamiana; Liu e Mei (1994), Maciel (1998), Noble (2004).

Ng e Mei (1994), estudaram a formação de Roll Waves, a partir de uma proposta reológica de fluido com comportamento pseudoplástico (Power Law), observando o aparecimento de choques periódicos.

Pascal (2005), utilizando-se da mesma proposta reológica de Liu e Mei (1994), incluindo o efeito da permeabilidade em um canal inclinado, observou numericamente a formação de Roll Waves, tanto para fluido newtoniano quanto para fluido não newtoniano, determinando assim características do fenômeno, tais como: a altura, o comprimento e a velocidade de propagação da onda.

Os modelos reológicos adotados no estudo matemático-numérico do fenômeno das Roll Waves tem sido verificados experimentalmente pelo grupo de trabalho da UNESP - Ilha Solteira, através de campanhas de reometria, e estão em consonância com estudos experimentais realizados por Coussot (1992), Piau (1996), Huang e Garcia (1998), garantindo, assim, a consistência física da análise desenvolvida neste trabalho.

Mais recentemente, tem aparecido na literatura tentativas de simulação de Roll Waves em fluidos de Herschel-Bulkley. O grupo de trabalho da UNESP - Ilha Solteira tem também pesquisado esta vertente, conforme apresentado e discutido neste artigo Maciel *et al* (2006).

2 - ROLL WAVES EM FLUIDO DE BINGHAM

Esta seção apresenta uma análise numérica por blocos lógicos para o modelo matemático desenvolvido por Maciel (1998) a partir da proposta reológica de Bingham (presença de tensão crítica), e equação de águas rasas com a inclusão do termo difusivo, dado por $\frac{\partial}{\partial x} \left(h \nu \frac{\partial h}{\partial x} \right)$ onde h é cota da superfície livre e ν a viscosidade cinemática.

2.1 Modelo Matemático

$$\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} - \frac{1}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 + \frac{\text{Re}}{\text{Fr}^2 (1-U)} \left\{ h^3 - \alpha \text{Fr}^2 (1-U)^2 + \alpha \left[U^2 h^2 \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \right] \right\} \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\tan(\theta)(h-1)(h-h_1^*)(h-h_2^*)}{\varepsilon \text{Fr}^2 (U-1)h} \quad (1)$$

sendo,

$$h_1^* = \frac{1}{2}(U-1) \left\{ [1-U] - \sqrt{\left[(U+1) + \sqrt{\left(1 + \frac{3+C^*}{1-C^*} \right)} \right] \left[(U+1) - \sqrt{\left(1 + \frac{3+C^*}{1-C^*} \right)} \right]} \right\} \quad (2)$$

$$h_1^* = \frac{1}{2}(U - 1) \left\{ [1 - U] + \sqrt{\left((U + 1) + \sqrt{\left(1 + \frac{3 + C^*}{1 - C^*} \right)} \right) \left((U + 1) - \sqrt{\left(1 + \frac{3 + C^*}{1 - C^*} \right)} \right)} \right\} \quad (3)$$

$$C^* = \frac{\tau_c}{\rho g h_0 \sin \theta} \quad (4)$$

sendo,

- U: Velocidade de propagação da onda;
- h: Cota da superfície livre;
- Re: Número de Reynolds;
- Fr: Número de Froude;
- α : Coeficiente de distribuição de velocidade na vertical;
- ε : Esbeltez da onda;
- z: Distância longitudinal.

3 - METODOLOGIA DE ANÁLISE

3.1 Simulink e o MATLAB

Simulink é um programa utilizado para modelagem, simulação e análise de sistemas dinâmicos. O programa se aplica a sistemas lineares e não lineares, contínuos e/ou discretos no tempo e sistemas híbridos. Utiliza uma interface gráfica com o usuário para construção dos modelos a partir de diagramas em blocos.

3.2 Blocos lógicos

A representação dos sistemas físicos por meio de equações nem sempre deixa clara a relação entre as funções de entrada e de saída desses sistemas. Portanto é conveniente e desejável sistematizar a descrição matemática de um sistema, de tal forma que aquela relação seja expressa claramente. Uma forma de apresentação das equações diferenciais de um sistema consiste no emprego de Diagramas de Bloco, em que cada bloco representa uma operação matemática, associando pares entrada-saída.

4 - MODELAGEM VIA PROMPT DE COMANDO PARA ROLL WAVES

A priori em (Maciel, 2001), foi desenvolvido um simulador menos robusto (ODE23 do Matlab) via prompt de comando, cujo método numérico é considerado frágil para as condições de contorno almejadas pelo grupo de trabalho.

4.1 Sintaxe Matlab

```

h' '-(1/h)*h'+k1*h'+k2*((h-1)*(h-h1)*(h-h2))/h = 0
% fazendo y(2) = h' e y(1) = h
% logo y(1)' = y(2)
% y(2)' = (1/y(1))*y(2)-k1*y(2)-k2*((y(1)-1)*(y(1)-h1)*(y(1)-h2))/y(1),
sendo:
k1 = (Re/((F^2)*(1-U)))*((y(1)^3)-(alf*F^2)*((1-U)^2) + alf *
(((U*y(1))^2)*(1-1/alf)));
k2 = (Re/F^2)*(tan(tet)/(eps*(U-1)))
h1 = 0.5*(U-1)*((U+1)-sqrt(((U+1)+sqrt(1+((3+C)/(1-C))))*((U+1)-
sqrt(1+((3+C)/(1-C))))))
h2 = 0.5*(U-1)*((U+1)+sqrt(((U+1)+sqrt(1+((3+C)/(1-C))))*((U+1)-
sqrt(1+((3+C)/(1-C))))))

```

O software desenvolvido via prompt de comando não possuía uma interface amigável software-usuário além de não suportar condições agressivas de contorno, como elevados números de Reynolds.

A proposta do Matlab - Simulink é contornar esses problemas de maneira prática e dinâmica, obtendo-se assim um simulador altamente eficiente e interativo.

5 - MODELAGEM DOS TERMOS DA EQUAÇÃO ROLL WAVES PARA BLOCOS LÓGICOS (SIMULINK)

Um modelo matemático consistente expresso através de blocos lógicos deve ser desenvolvido por partes, de tal modo a evitar erros e proporcionar uma fácil manutenção do programador junto aos mesmos.

O Simulink permite este tipo de desenvolvimento através da criação de Subsistemas, que são blocos que agrupam um conjunto maior de blocos tornando assim o ambiente principal de operação (interface software-usuário) menos carregado, oferecendo ao usuário uma maior clareza e entendimento do processo simulado.

Nas figura 2 e 3 tem-se explicitado como exemplo a modelagem em blocos lógicos do Subsistema h1 para o termo h_1^* conforme a equação (3), sendo h1 dada pela equação (sintaxe Matlab):

```

h1 = 0.5*(U-1)*((U+1)-sqrt(((U+1)+sqrt(1+((3+C)/(1-C))))*((U+1)-
sqrt(1+((3+C)/(1-C))))))

```

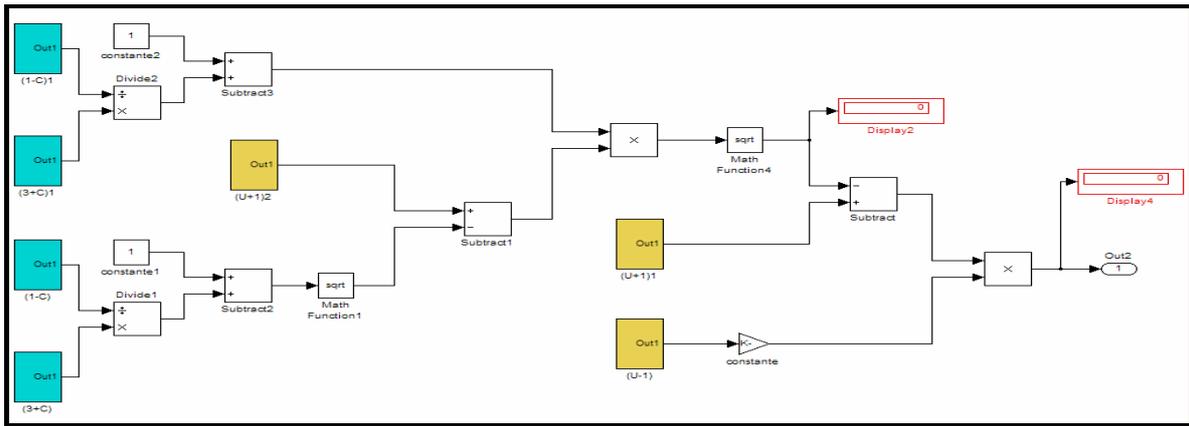


Figura 2 – Equação h_1^* (3) modelada em blocos lógicos.

Cada termo da equação discretizada é modelado adequadamente em blocos lógicos fechando o sistema Roll Waves, tem-se a seguir, a título de exemplo, um dos termos componentes da equação Roll Waves (1) e sua configuração em modo explore dentro do sistema principal, conforme ilustrado nas figuras 3 e 4:

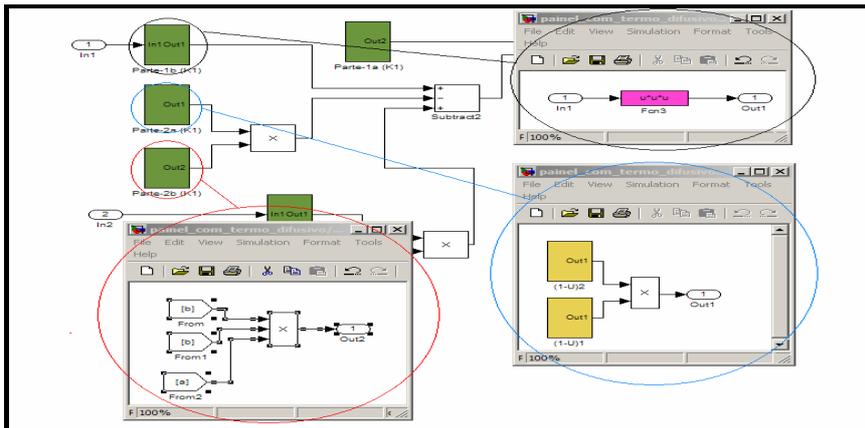


Figura 3 – Equação k_1 modelada em blocos lógicos com Subsistemas em modo explore.

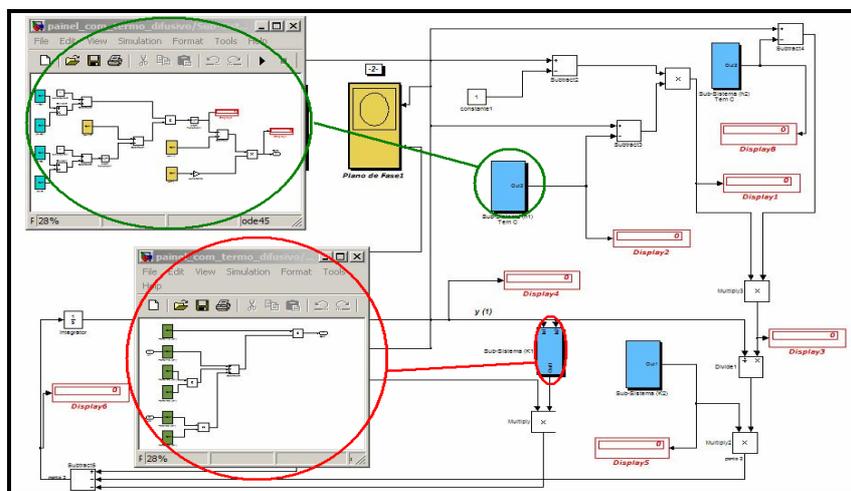


Figura 4 – Subsistemas em modo explore (h_1 em verde e k_1 em vermelho).

Na figura 5 tem-se explicitado o painel de controle desenvolvido para maior interação software-usuário, no qual são evidenciados os dados de entrada para a simulação.

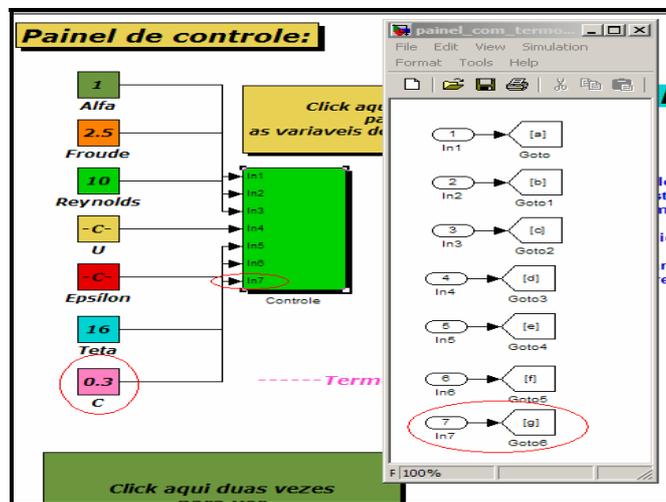


Figura 5 – Bloco com parâmetro de entrada C (termo difusivo) e seu bloco **Goto** correspondente dentro do Subsistema Controle (caixa verde).

O bloco **Goto** recebe o valor do bloco C (termo difusivo, C^* da equação (1)) e envia este valor para todos os pontos do simulador que tenham o termo C associado através do bloco de recepção de dados **From** (dados advindos do painel de controle). Esta técnica permitiu o desenvolvimento de uma interface amigável e dinâmica para alteração de parâmetros de entrada no simulador.

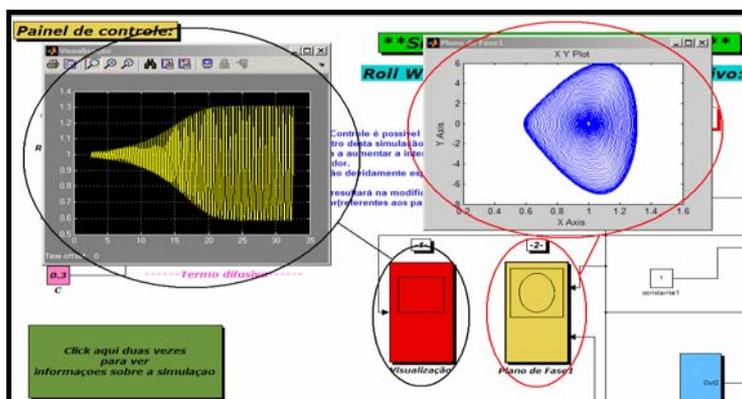


Figura 6 – Visualizadores (scope em vermelho e bloco [XY Graph] em amarelo).

Na figura 6, estão em evidência o bloco Scope captando sinais do simulador e plotando os mesmos dinamicamente e o bloco [XY Graph] que possibilita visualizar o espaço de fase do sistema dinâmico Roll Waves, caracterizado pela entrada do sinal da derivada da altura da onda em Y e pela altura da onda em X.

6 - TEMPO E PASSO DE SIMULAÇÃO

A simulação de modelos de sistemas dinâmicos envolve a integração numérica dos sinais ao longo do tempo, a qual é executada por um conjunto de equações diferenciais ordinárias (*ODE: Ordinary Differential Equations*).

6.1 - Configuração adotada para simulação Roll-Waves

[Simulation Time]: tempo de simulação.

[Start Time]: 0.

[Stop Time]: 30.

[Solver options]: opção de solver.

[Variable-step / Fixed-step]: passo variável.

[ode113 (Adams)]: método numérico Adams-Bahforth Moulton PECE solver non-stiff de ordem variável.

[Max step size]: 0, 0006.

[Min step size]: 0,00005.

[Initial step size]: 0, 00005.

[Relative tolerance]: 1e-3.

[Absolute tolerance]: auto.

6.2 - Dados obtidos pelo simulador para parâmetros diversos

6.2.1 Simulação 1

Para os parâmetros a seguir foram obtidos os seguintes resultados:

$R_e=10$ → Número de Reynolds;

$F=2.5$ → Número de Froude;

$U=1.38$ → Velocidade de propagação da onda;

$\alpha=1.0$ → Coeficiente de distribuição de velocidade;

$\theta=16^\circ$ → Declividade do canal;

$c=0.3$ → Termo difusivo;

$\varepsilon=0.001$ → Esbeltez da onda.

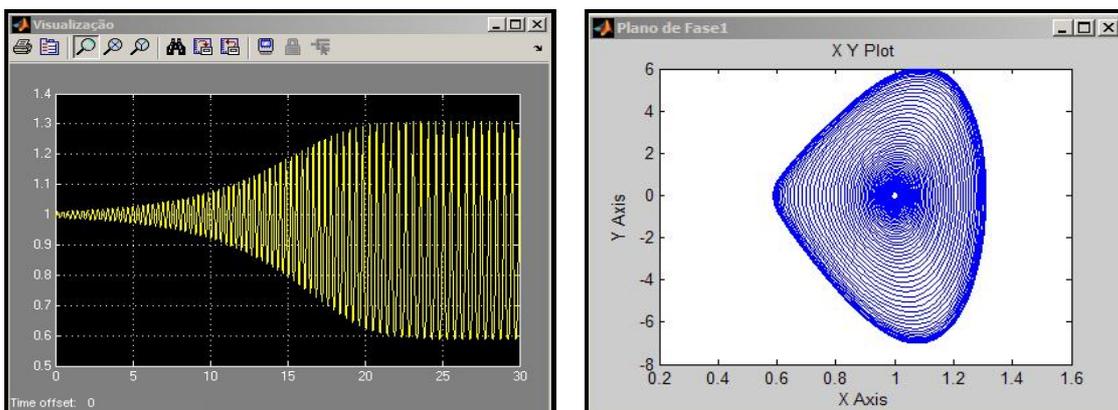


Figura 7 – Visualização da simulação e seu plano de fase respectivamente.

Neste caso, para os parâmetros de entrada explicitados anteriormente, verificou-se a ocorrência

do fenômeno Roll Waves e sua estabilização no tempo entre 20 e 25 segundos de simulação, assim como seu plano de fase convergindo num ciclo limite “marca digital do fenômeno”.

6.2.2 Simulação 2

- $R_e=100$ → Número de Reynolds;
- $F=2.5$ → Número de Froude;
- $U=1.38$ → Velocidade de propagação da onda;
- $\alpha=1.0$ → Coeficiente de distribuição de velocidade ;
- $\theta=16^\circ$ → Declividade do canal;
- $c=0.3$ → Termo difusivo;
- $\varepsilon=0.001$ → Esbeltez da onda.

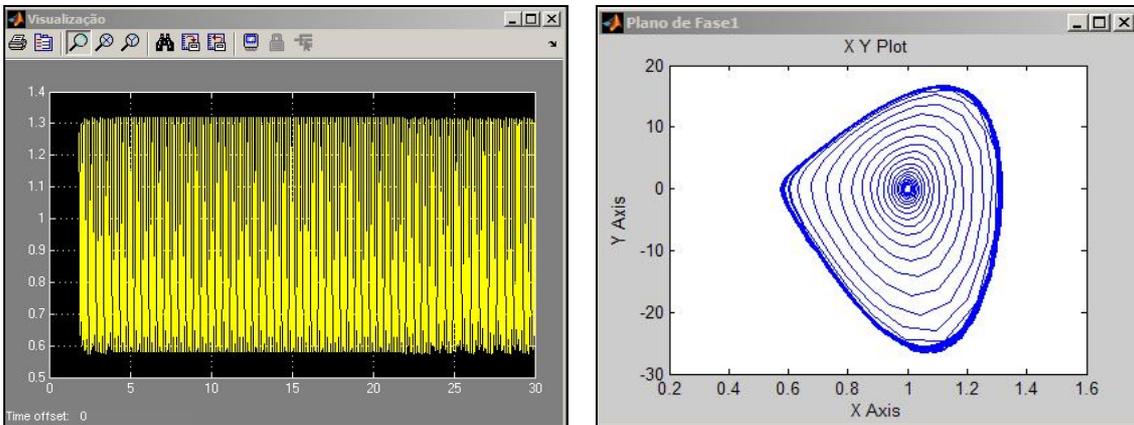


Figura 8 – Visualização da simulação e seu plano de fase para a simulação 2.

Neste segundo caso notou-se a formação e estabilização num tempo inferior ao primeiro caso com o aumento no número de Reynolds de 10 para 100, porém mantendo-se a amplitude (eixo X do plano de fase) e aumentando o comprimento (eixo Y do plano de fase) das Roll Waves.

6.2.3 Simulação 3

- $R_e=2000$ → Número de Reynolds;
- $F=2.5$ → Número de Froude;
- $U=1.394$ → Velocidade de propagação da onda;
- $\alpha=1.0$ → Coeficiente de distribuição de velocidade ;
- $\theta=16^\circ$ → Declividade do canal;
- $c=0.045$ → Termo difusivo;
- $\varepsilon=0.001$ → Esbeltez da onda.

6.3 - Nova configuração para Simulation parameters

- [Simulation Time]: tempo de simulação.
- [Start Time]: 0.
- [Stop Time]: 10.
- [Solver options]: opção de solver.
- [Variable-step / Fixed-step]: passo variável.

[ode113 (Adams)]: método numérico Adams-Bahforth Moulton PECE solver non-stiff de ordem variável.

[Max step size]: 0, 000006.

[Min step size]: 0,000005.

[Initial step size]: 0, 000005.

[Relative tolerance]: 1e-3.

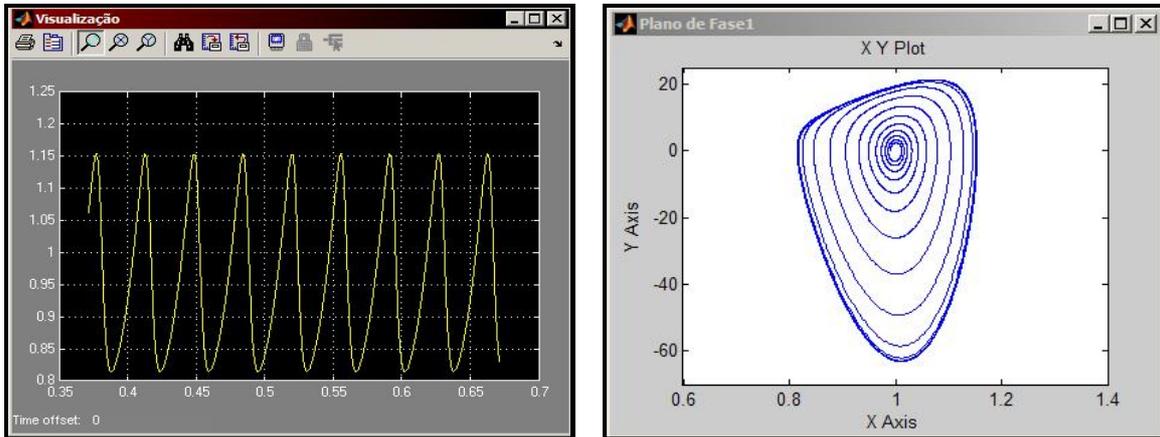


Figura 9 – Visualização da simulação e seu plano de fase para a simulação 3.

Para a simulação 3 com o aumento no número de Reynolds para 2000, diminuição no termo difusivo para 0,045 e aumento na velocidade de propagação para 1,394 notou-se uma diminuição na amplitude e uma elevação do comprimento das Roll Waves.

6.3.1 Simulação 4

$R_e=10$ → Número de Reynolds;

$F=2.5$ → Número de Froude;

$U=1.38$ → Velocidade de propagação da onda;

$\alpha=1.0$ → Coeficiente de distribuição de velocidade ;

$\theta=16^\circ$ → Declividade do canal;

$c=0.0$ → Termo difusivo;

$\varepsilon=0.001$ → Esbeltez da onda.

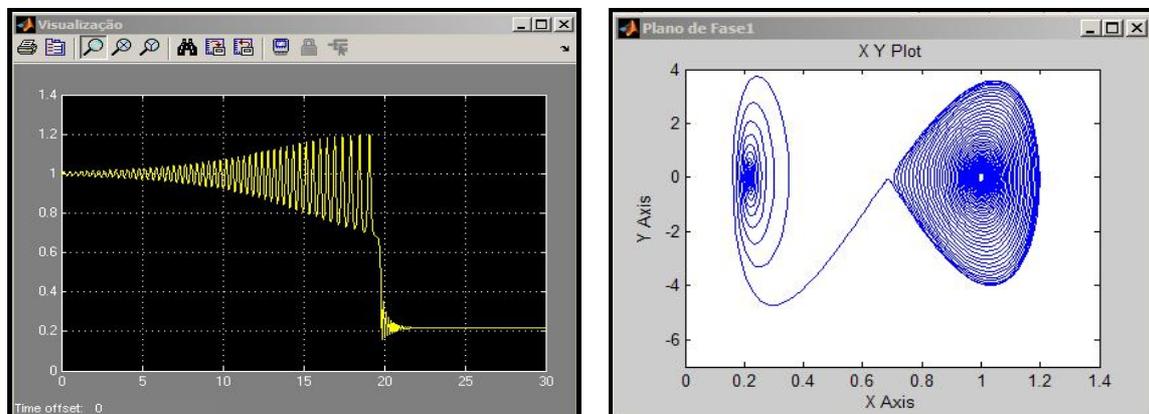


Figura 10 – Visualização da simulação e seu plano de fase para a simulação 3.

Neste caso verificou-se a ocorrência de uma “instabilidade” do modelo matemático aparentemente devido à busca de novos pontos de equilíbrio em h_1 e h_2 (configuração “saddle point” h_1^* ($X=0.2$) e h_2^* ($X=0.7$)). Observa-se que a não geração de Roll Waves, não estaria, no entanto, associada à adoção ou não do termo difusivo C^* , mas sobretudo ao efeito do Re e U .

7 - ROLL WAVES EM FLUIDO DE HERSCHEL-BULKLEY

Esta seção apresenta as equações que são utilizadas no desenvolvimento do modelo matemático para geração de Roll Waves em um fluido de reologia de Herschel-Bulkley.

7.1 - Equações governantes

Considerando um escoamento bidimensional de um fluido hiperconcentrado em um canal inclinado, o modelo matemático que represente o fenômeno será obtido através da integração na vertical das equações de Navier-Stokes, incluindo o modelo reológico de Herschel-Bulkley (1926) no tensor de tensões, dado por: $\tau = \tau_c + K_n \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^n$, onde τ_c é a tensão crítica, n é o índice de escoamento e K_n é o índice de consistência do fluido.

As componentes de velocidades longitudinal e vertical são dadas por (u, w) , a pressão por P , sendo a altura total do escoamento dada por h . O escoamento é governado pelas seguintes equações:

Conservação da massa:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

Quantidade de movimento:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g \sin \theta + \frac{\partial}{\partial z} \left[\tau_c + K_n \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^n \right] \quad (6)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \cos \theta \quad (7)$$

onde ρ é a massa específica do fluido e g é a aceleração da gravidade.

A pressão e o cisalhamento na superfície são dados por:

$$P, \tau_c = 0 \quad \text{em} \quad z = h \quad (8)$$

A condição cinemática na superfície é expressa por:

$$w = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{em} \quad z = h \quad (9)$$

No fundo do canal tem-se a seguinte condição:

$$u = w = 0 \quad \text{em} \quad z = 0 \quad (10)$$

Integrando a equação (7) e usando a condição (8), chega-se a expressão para a pressão hidrostática:

$$P = -\rho g \cos \theta (z - h) \quad (11)$$

Inserindo a expressão (11) na equação (6), tem-se a seguinte equação para a quantidade de movimento:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = g \sin \theta - g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{K_n}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left[\tau_c + K_n \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^n \right] \quad (12)$$

O escoamento pode ser dividido em duas regiões, a região cisalhada e a região não cisalhada (*plug layer*), conforme mostrado em Huang (1998). Neste caso, o perfil de velocidade é dado por:

$$u = u(z_0) \quad z_0 \leq z \leq h \quad (13)$$

$$u = u(z_0) \left[1 - \left(\frac{z}{z_0} \right)^{(n+1)/n} \right] \quad 0 \leq z \leq z_0 \quad (14)$$

onde z_0 é a altura da região cisalhada e $u(z_0) = \frac{n}{n+1} \left(\frac{\rho g z_0^{n+1} \sin \theta}{K_n} \right)^{1/n}$

Após alguns desenvolvimentos, a velocidade média é dada pela equação (15).

$$\bar{u} = \int_0^h u dz = \frac{n}{n+1} \left(\frac{\rho g \sin \theta}{K_n} \right)^{1/n} \left(\frac{h \rho g \sin \theta - \tau_c}{\rho g \sin \theta} \right)^{\frac{n+1}{n}} \left[1 - \frac{n}{2n+1} \left(\frac{h \rho g \sin \theta - \tau_c}{h \rho g \sin \theta} \right) \right] \quad (15)$$

Através de resolução numérica pode-se verificar o perfil de velocidade, conforme mostra a figura 11.

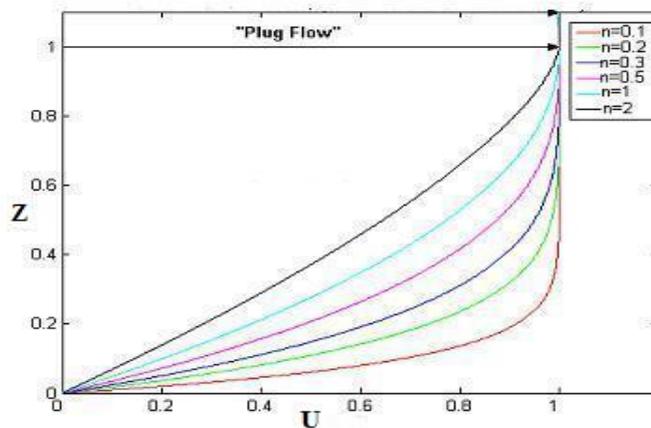


Figura 11 - Perfil de velocidade para diferentes valores de n .

Usando o teorema de Leibniz integram-se as equações (5) e (6) de 0 a h ; aplicando as condições de contorno (10) e (11), obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial \bar{u}h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial \bar{u}h}{\partial t} + \frac{\partial \alpha \bar{u}^2 h}{\partial x} + \frac{1}{2} g \cos \theta \frac{\partial h^2}{\partial x} = g.h \sin \theta - \frac{\tau_c}{\rho} + \frac{K_n}{\rho} \left[\frac{\bar{u}(\rho g \sin \theta)^2 (n+1)(2n+1).h}{(h\rho g \sin \theta - \tau_c)((n+1)n\rho g \sin \theta - n^2 \tau_c)} \right]^n \quad (17)$$

onde h é a altura do escoamento, \bar{u} é a velocidade média na vertical, τ_c é a tensão crítica, θ é a declividade do canal, ρ é massa específica do fluido, K_n é o índice de consistência do fluido, n é índice de escoamento e α é o coeficiente de distribuição de velocidade na vertical, dado por:

$$\alpha = \frac{1}{\bar{u}^2 h} \int_0^h u^2 dz = \frac{(2n+1)}{(3n+2)} \left[\frac{(2(2n+1)^2 h \rho g \sin \theta + \tau_c (4n+3)n)}{((n+1)^2 h \rho g \sin \theta + 2n \tau_c (n+1) + n^2 \tau_c^2 / h \rho g \sin \theta)} \right] \quad (18)$$

As equações (16) e (17) constituem o sistema que governa o escoamento laminar usando o modelo reológico de Herschel-Bulkley.

8. ADIMENSIONALIZAÇÃO DAS VARIÁVEIS

A partir das escalas de adimensionalização:

$$\text{Escala de comprimento: } x = l_0 x^* \text{ e } (h, z) = h_0 (h^*, z^*) \quad (19)$$

$$\text{Escala de tempo: } t = \frac{l_0}{u_0} t^* \quad (20)$$

$$\text{Escala de velocidade: } \bar{u} = \bar{u}_0 \bar{u}^* \quad (21)$$

$$\text{Número de Froude: } Fr = \frac{\bar{u}_0^2}{(gh_0)} \quad (22)$$

onde:

$$l_0 = \frac{\bar{u}_0^2}{g \sin \theta} \quad (23)$$

$$\bar{u}_0 = \frac{n}{n+1} \left(\frac{\rho g \sin \theta}{\mu_n} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{h_0 \rho g \sin \theta - \tau_c}{\rho g \sin \theta} \right)^{\frac{n+1}{n}} \left[1 - \frac{n}{2n+1} \left(\frac{h_0 \rho g \sin \theta - \tau_c}{h_0 \rho g \sin \theta} \right) \right] \quad (24)$$

Pode-se definir a tensão de cisalhamento em função de \bar{u}_0 e h_0 , conforme a equação (25):

$$\tau_p = \tau_c + K_n \left[\frac{\bar{u}_0 (\rho g \sin \theta)^2 (n+1)(2n+1)h_0}{(h_0 \rho g \sin \theta - \tau_c)(n(n+1)h_0 \rho g \sin \theta + n^2 \tau_c)} \right]^n \quad (25)$$

Introduzindo as variáveis adimensionais nas equações (16) e (17), tem-se o novo sistema de equações:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial x} = 0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \alpha \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - (\alpha - 1) \frac{\bar{u}}{h} \frac{\partial h}{\partial t} + \beta \frac{\partial h}{\partial x} = h - C^* - (1 - C^*) \left\{ \left[\frac{\bar{u}(1 - C^*)}{h - C^*} \right] \left[\frac{((n+1) + nC^*)h}{(n+1)h + nC^*} \right] \right\}^n \quad (27)$$

onde:

$$\beta = \frac{gh_0 \cos \theta}{\bar{u}_0^2} = \frac{1}{Fr^2} \quad (28)$$

$$C^* = \frac{\tau_c}{\rho gh_0 \sin \theta} \quad (29)$$

$$\alpha = \frac{(2n+1)}{(3n+2)} \left[\frac{(2(n+1)^2 h + C^*(4n+3)n)}{\left((n+1)^2 h + 2(n+1)nC^* + \frac{n^2}{h} (C^*)^2 \right)} \right] \quad (30)$$

9. ANÁLISE DE ESTABILIDADE LINEAR

Para determinar as condições de instabilidade de um escoamento uniforme de um fluido hiperconcentrado, uma análise de estabilidade linear é feita, adicionando uma pequena perturbação nas equações (26) e (27), sendo:

$$h = 1 + H(x, t) \quad (31)$$

$$\bar{u} = 1 + V(x, t) \quad (32)$$

Considerando $H, V \ll 1$, as equações (26) e (27) são linearizadas, produzindo a seguinte equação em função de H :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + (\alpha - \beta) \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + 2\alpha \frac{\partial H}{\partial x \partial t} + (2n+1) \frac{\partial H}{\partial x} + n \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (33)$$

Para determinar a equação da dispersão, considera-se que:

$$H = \hat{H} e^{i(kx - \omega t)} \quad (34)$$

onde k é o n° de ondas e $\omega = \omega_r + i\omega_i$ é o plano complexo. Assim, a equação da dispersão é dada por:

$$\omega^2 - (2\alpha k - ni)\omega + (\alpha - \beta)k^2 - (2n+1)ki = 0 \quad (35)$$

Resolvendo esta equação, tem-se:

$$\omega = \frac{1}{2} \left[2\alpha k - ni \pm \sqrt{a + bi} \right] \quad (36)$$

Considerando, $0 < n \leq 1$, $0 < \alpha \leq 1.2$, $b > 0$ e $k \neq 0$, tem-se:

$$I(\omega) = \frac{1}{2} \left[-n \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - a)} \right] \quad (37)$$

$$\Re(\omega) = \frac{1}{2} \left[2\alpha k \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} + a)} \right] \quad (38)$$

onde:

$$a = 4(\alpha^2 - a + \beta)k^2 - n^2 \quad (39)$$

$$b = 4(2n+1 - \alpha n)ki \quad (40)$$

Se $I(\omega) < 0$, conseqüentemente $I(\omega)^-$ tende a decair e estabilizar. Então $I(\omega) > 0$ se e somente se:

$$\alpha^2 - \alpha + \beta < \frac{(2n+1 - n\alpha)^2}{n^2} \quad (41)$$

Substituindo a relação (30) em (41), tem-se:

$$\beta = \frac{1}{Fr^2} < \frac{2n+1}{n^2} \left\{ (2n+1) - \frac{\left[2(n+1)^2 + (4n+3)nC^* \right] n}{\left[(n+1)^2 + 2n(n+1)C^* + n^2C^{*2} \right]} \right\} = \beta_n \quad (42)$$

A figura 12, mostra a taxa de crescimento da perturbação e a velocidade de fase $\left(\frac{\Re(\omega)}{k} \right)$ em função de k , para vários valores de β . Fixando $n = 0.4$ e $C^* = 0.1$, ou seja, para um fluido fortemente não newtoniano.

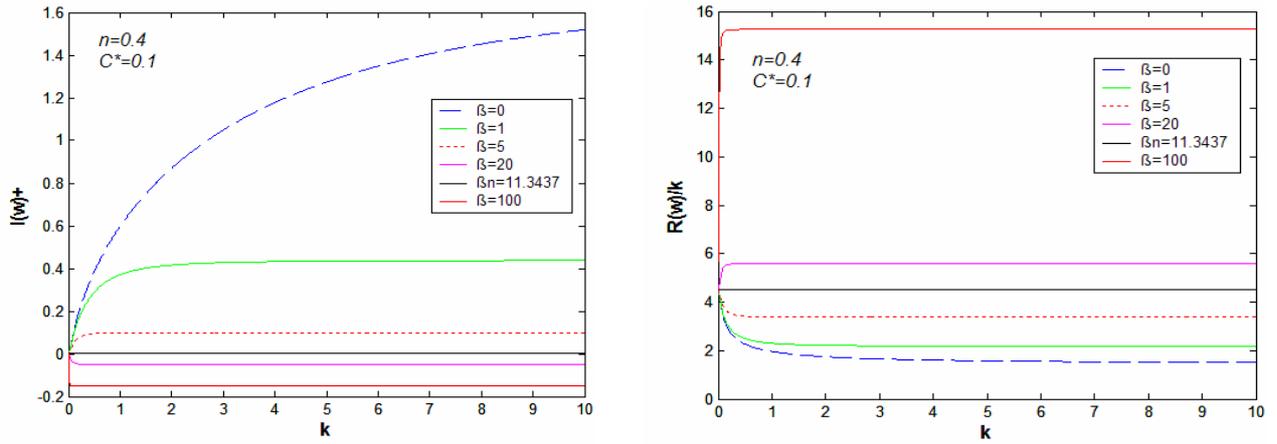


Figura 12-Taxa de crescimento das perturbações (esq.) e velocidade de fase (dir.) respectivamente.

Observa-se que a curva neutra da estabilidade ocorre quando $k = 0$ e $\beta = \beta_n$ e que para todos os valores de k o ponto inicial da instabilidade depende somente de n . Se $\beta > \beta_n$, todas as perturbações com $k \neq 0$ são menores do que zero. Além disso, ao aumentar o valor de β , ocorre uma variação significativa na velocidade de fase. O comportamento da função é semelhante ao que foi encontrado por Ng e Mei (1994), quando utilizou o modelo reológico do tipo Power Law (fluido lei de potência).

10. EQUAÇÃO DA ROLL WAVE

Para analisar o estudo permanente do sistema de equações, as mesmas são reescritas em um sistema móvel de coordenadas, fazendo a seguinte mudança de variável: $z = x - Ut$, onde U é velocidade de propagação da onda. Aplicando a mudança de variável nas equações (26) e (27), obtém-se um novo sistema de equações, dado por:

- Conservação da massa

$$h(\bar{u} - U) = 1 - U \quad (43)$$

- Conservação da quantidade de movimento

$$-U \frac{\partial u}{\partial z} + \alpha \bar{u} \frac{\partial h}{\partial z} + (\alpha - 1) U \frac{\bar{u}}{h} \frac{\partial h}{\partial z} + \beta \frac{\partial h}{\partial z} = 1 - \frac{C^*}{h} - \quad (44)$$

$$-\frac{1}{h}(1 - C^*) \left[\left(\frac{\bar{u}(h_0 \rho g \sin \theta - \tau_c)}{h_0 \rho g \sin \theta - \tau_c} \right) \left(\frac{((n+1)h_0 \rho g \sin \theta + n\tau_c)h}{(n+1)h_0 h \rho g \sin \theta + n\tau_c} \right) \right]$$

Substituindo a equação (44) em (45) e eliminando a variável \bar{u} , chega-se a seguinte equação diferencial de primeira ordem:

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{h - C^* - (1 - C^*) \left[\left(\frac{(1 + U(h-1))(1 - C^*)}{(h - C^*)} \right) \left(\frac{(n+1) + nC^*}{(n+1)h + nC^*} \right) \right]^n}{\left((\alpha - 1)U^2 - \frac{\alpha(1-U)^2}{h^2} + \beta h \right)} = \frac{F(h)}{G(h)} \quad (45)$$

A equação obtida está em consonância com a equação deliberada por Ng e Mei (1994), fazendo $C^* = 0$.

10.1 Condições de choque

A partir da equação (46), visando prescrever o comprimento da Roll Wave, há necessidade de se impor a condição de choque. O comprimento da onda pode ser definido da seguinte forma:

$$\lambda = \int_{h_1}^{h_2} \frac{G(h)}{F(h)} dh \quad (46)$$

onde h_1 é a altura antes do choque e h_2 é altura depois do choque.

As condições de choque (semelhantes às condições de Rankine-Hugoniot da dinâmica dos gases) são derivadas das equações da conservação da massa e da quantidade de movimento em (26) e (27) e são dadas por:

$$U [h]_1^2 = [\bar{u} h]_1^2 \quad (47)$$

$$U [\bar{u} h]_1^2 = \left[\alpha \bar{u}^2 h + \frac{1}{2} \beta h^2 \right]_1^2 \quad (48)$$

onde $[h]_1^2 = h_2 - h_1$. Usando a equação (43) e eliminando \bar{u} de (48), chega-se a relação entre as alturas:

$$\alpha(1-U)^2 - h_1 h_2 U^2 (\alpha - 1) - \frac{1}{2} \beta h_1^2 h_2 - \frac{1}{2} \beta h_1 h_2^2 = 0 \quad (49)$$

Resolvendo para h_2 , com $\beta > 0$, tem-se:

$$h_2 = \left\{ \left[\frac{h_1}{2} + (\alpha - 1) \frac{U^2}{\beta} \right]^2 + \frac{2\alpha(1-U)^2}{h_1 \beta} \right\}^{\frac{1}{2}} - \frac{h_1}{2} - (\alpha - 1) \frac{U^2}{\beta} \quad (50)$$

Para $\beta = 0$, tem-se:

$$h_2 = \frac{(1-U)^2 \alpha}{(\alpha-1)U^2 h_1} \quad (51)$$

11. RESULTADOS NUMÉRICOS

A resolução da equação (46) é obtida através de uma rotina de cálculo desenvolvida, usando a plataforma computacional Python. A figura 13 mostram o perfil das Roll Waves para $n=0.4$, $\beta=1$ e $U=2.18$, variando o valor de C^* .

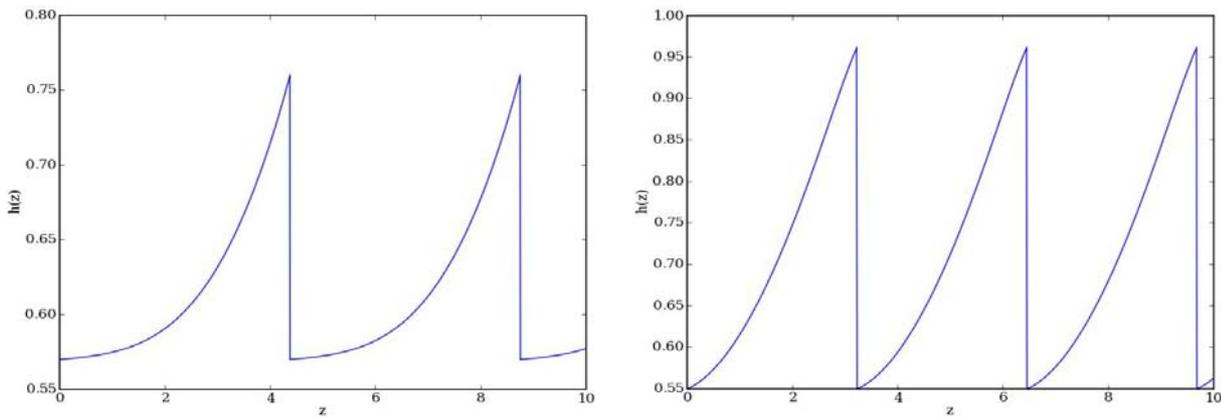


Figura 13- Perfil das Roll Waves para $n=0.4$, $\beta=1$, $U=2.18$, $C^*=0.1$ (esq.) e $C^*=0.4$ (dir.) respectivamente.

Baseados na figura 13, pode-se observar que um aumento do parâmetro C^* , provoca um aumento na amplitude e uma diminuição no comprimento de onda gerada. A figura 14 mostra o perfil das Roll Waves para $n=0.4$, $C^*=0.1$ e $\beta=1$, variando o valor da velocidade de propagação (U).

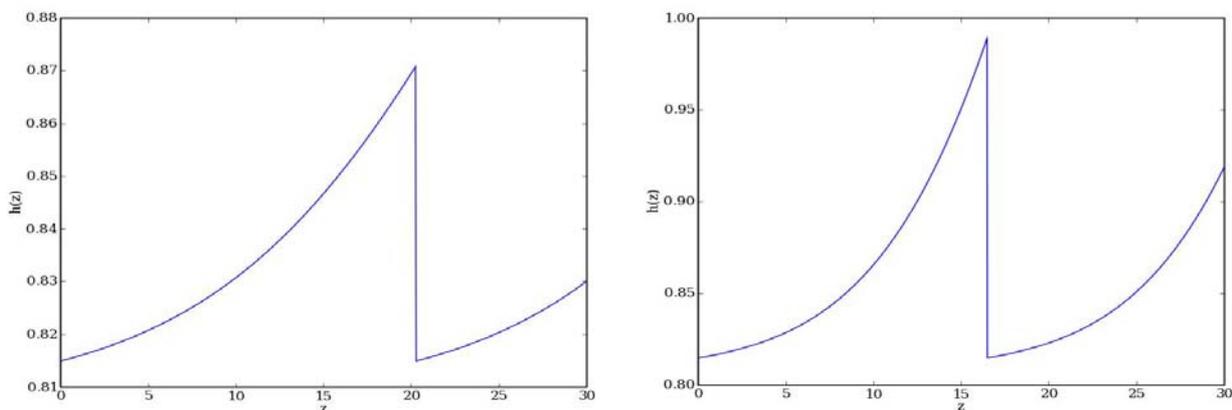


Figura 14- Perfil das Roll Waves para $n=0.4$, $C^*=0.1$, $\beta=1$ e $U=2.17$ (esq.) e $U=2.18$ (dir.) respectivamente.

Aumentando a velocidade de propagação (U), observa-se uma diminuição na amplitude e uma pequena variação no comprimento da onda. A figura 15, mostra o perfil das Roll Waves para $n = 0.4$, $C^* = 0.1$ e $U = 3.38$, variando o valor do parâmetro β .

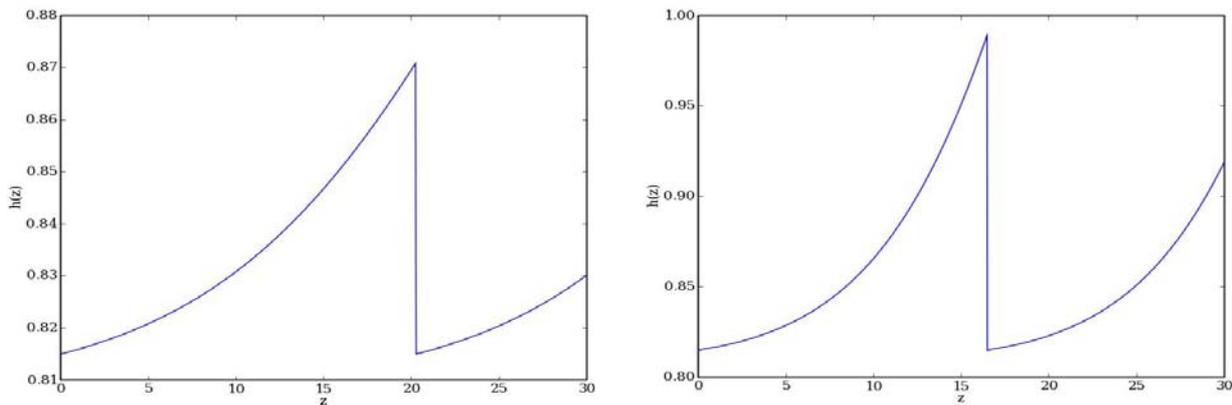


Figura 15- Perfil das Roll Waves para $n = 0.4$, $C^* = 0.1$, $U = 3.38$, $\beta = 1$ (esq.) e $\beta = 5$ (dir.) respectivamente

Pode-se enfim observar que aumentando o parâmetro β ocorre uma significativa diminuição no comprimento da onda. Ressalta-se que os resultados cinemáticos e dinâmicos apontados neste item estão em consonância com aqueles ilustrados em Maciel (1998).

12. CONCLUSÃO

Para a análise em reologia Binghamiana o software Matlab se mostrou uma ferramenta dinâmica e acessível para com o problema proposto, dentro do rigor científico que o assunto exige.

Uma abordagem numérica inovadora com modelagens desenvolvidas através de blocos lógicos permitiu o desenvolvimento de um simulador, cujo método numérico de resolução e todos os outros parâmetros analisados neste trabalho são devidamente estabelecidos pelo usuário e pelas condições de contorno do problema, de modo a adaptar o simulador a condições diversas de maneira fácil e interativa.

Resultados dessa natureza já foram obtidos por Maciel (1998), cujas conclusões estão em consonância com aquelas apontadas neste trabalho, o que permitiu fazer uma sistematização com relação à influência do efeito viscoso (difusivo), ou mais explicitadamente, o número de Reynolds.

Analisando o fenômeno a partir da proposta reológica de Herschel-Bulkley, foi feita uma análise de estabilidade linear, mostrando as condições de estabilidade do sistema. Através desses

resultados numéricos, pode-se observar o aparecimento de Roll Waves quando $\beta < \beta_n$, ou seja, para

$$Fr > \frac{1}{\sqrt{\beta_n}}.$$

A nova equação de Roll Waves, com condições de choque, não só corrobora os resultados anteriores em reologias mais simplificadas, como também vai possibilitar prever esse tipo de fenômeno para escoamentos de fluidos hiperconcentrados onde o “tensor reológico” é mais próximo da proposta de Herschel-Bulkley.

BIBLIOGRAFIA

COUSSOT, P. e PIAU, J.M. (1994). “*On the Behavior of Mud Suspensions*”. *Rheologica Acta*, 33, N° 3, pp 175-184.

DRRSSLER, R.F., (1949), “*Mathematical Solution of the Problem of Roll Waves in inclined open Channels*”, *Communs Pure Appl. Math.*, 2, pp. 149-194.

HUANG, X. e GARCIA, M.H. (1998), “*A Herschel-Bulkley Model for Mud Flow Down a Slope*”, *J. Fluid Mech*, 374, pp 305-333.

JEFFREYS H. (1925). “*The flow of Water in an Inclined Channel of Rectangular section*”, *Phil Mag*, 49, pp 793-807.

LIU, K. e MEI, C.C. (1994). “*Roll Waves on a Layer of a Muddy Fluid Flowing Down a Gentle Slope – A Bingham Model*”, *Phys Fluids*, 6, pp. 2577-2590.

MACIEL, G.F. (1998), “*Uma proposta de modelação de roll waves em fluidos de Bingham*”. XVII Congresso Nacional Del Agua. Santa Fe, Argentina.

MACIEL, G.F; FERREIRA, F.O. e VIEIRA, A.S. (2006) “*On Roll Waves in Herschel-Bulkley Fluids*”, III – Brazillian Conference on Rheology, Brasil, RJ, pp.71.

NOBLE P. (2004), “*Existence et Stabilité de Roll-Waves pour les Équations de Saint Venant*”, *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. 1338*, pp.819-824.

NG. C. O. e MEI, C. C. (1994), “*Roll Waves on Layer of Mud Modeled as a Power-Law Fluid*”. *J. Fluid Mech.*, 263, pp. 152-183.

PASCAL, J.P. (2006). “*Instability of Power-Law Fluid Down a Porous Incline*”. *J. Non-Newtonian Fluid Mech*, 133, pp. 109-120.

PIAU, J.M. (1996), “*Flow of a Yield Stress Fluid in a Long Domain, application to Flow on a inclined plane*”. *J. Rheology*, 40, pp. 711-723.