

# A UTILIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DE YARNELL PARA A CONCESSÃO DE OUTORGAS DE TRAVESSIAS DE CURSOS DE ÁGUA

*Alice Silva de Castilho<sup>1</sup>; Rossana Cristina Vasconcellos<sup>1</sup> & Márcio Figueiredo de Resende<sup>1</sup> & Marcelo José Fiorino de Castro<sup>2</sup>*

**RESUMO** - Este artigo avalia a aplicabilidade da utilização da equação de Yarnell para o cálculo da elevação do nível d'água decorrente da implantação de pontes. A avaliação da equação de Yarnell foi feita através da variação dos parâmetros de entrada: número de Froude e redução da largura do canal, de acordo com as condições normalmente encontradas em rios brasileiros. Foram também comparados os resultados da equação de Yarnell e da equação da energia obtidos em cinco pontes localizadas no Estado de Minas Gerais.

**ABSTRACT** – This paper evaluates the application of Yarnell's equation used to predict the change in water surface from just downstream of the bridge to just upstream of the bridge. The study was made by varied the Froude number and reduction of width channel, according Brazilian channel characteristics. Also were compared the results between Yarnell's and energy equation in five bridges located in Minas Gerais State.

**Palavras-chave:** Outorga, Ponte, Yarnell.

---

<sup>1</sup> Engenheiros Civis. Golder Associates Ltda. Avenida Barão Homem de Melo, 4484 – Estoril. CEP.: 30450-250 – Belo Horizonte – MG.  
E-mail's: [acastilho@golder.com.br](mailto:acastilho@golder.com.br), [rvasconcellos@golder.com.br](mailto:rvasconcellos@golder.com.br), [mresende@golder.com.br](mailto:mresende@golder.com.br).

<sup>2</sup> Engenheiro Civil. Engevix Engenharia S.A. QMSW 5, Lote 8. Sala 381 – Sudoeste. CEP.: 70680-500 – Brasília - DF.  
E-mail: [marcelo.castro@engevix.com.br](mailto:marcelo.castro@engevix.com.br)

## 1 - INTRODUÇÃO

Segundo a Lei 9.433 em seu artigo 12, “Estão sujeitos à outorga pelo Poder Público os direitos aos seguintes usos de recursos hídricos: ... *V – outros usos que alterem o regime, a quantidade ou qualidade da água existente de um curso d’água.*”

Os órgãos gestores estaduais têm solicitado a elaboração de estudos hidráulicos mostrando o perfil da linha d’água para a vazão de projeto no trecho de implantação da travessia, com ou sem intervenção, considerando o efeito de pilares e demais obstáculos e o efeito de remanso a montante da travessia, para a concessão da outorga.

Para tanto em geral é necessário o levantamento topobatimétrico de pelo menos quatro seções do curso d’água, duas a montante e duas a jusante da ponte, dependendo das características hidráulicas no trecho, as mais distantes se possível a 500 metros da ponte. Com estes dados é definido o perfil da linha d’água através do modelo hidráulico. O regime de escoamento a ser analisado pode ser permanente ou variado e a vazão analisada é a de projeto, normalmente associada a um período de retorno de 100 anos conforme normas do DNIT.

Quando os pilares da ponte são muito esbeltos e o tabuleiro muito alto, verifica-se que a interferência da ponte no escoamento é pequena, da ordem de alguns centímetros em profundidade da ordem de metros.

Yarnell em 1934 definiu uma equação que simplifica muito os cálculos para a elevação da linha d’água decorrente da construção de uma ponte, entretanto, a equação de Yarnell tem restrições quanto à sua aplicação. Portanto este artigo tem como objetivo apresentar a faixa de aplicação da equação de Yarnell, levando em conta os cursos d’água brasileiros, propondo assim a aplicação prévia de uma metodologia mais simplificada para a definição dos estudos a serem solicitados para a análise de outorgas de travessia.

## 2 - METODOLOGIA

### 2.1 - Equação de Yarnell

Yarnell em 1934 elaborou um estudo intenso com diferentes formas de pilares normalmente utilizados nos EUA. Foram pesquisadas as seguintes fórmulas de pilares de pontes por Yarnell: d’Aubuisson, Nagler, Weisbach e Rehbock.

A fórmula de Weisbach foi descartada a princípio por Yarnell, pois em algumas simplificações adotadas não havia base teórica.

A fórmula de Rehbock dividia o escoamento em pouco, moderadamente e completamente turbulento e Yarnell dividiu em subcrítico e supercrítico respectivamente, o pouco e completamente turbulento, já o moderadamente turbulento foi classificado como próximo ao crítico.

A fórmula de Nagler reproduziu melhor os experimentos de Yarnell para pouco e moderadamente turbulento se comparada com a fórmula d'Aubuisson. Mas nenhuma das duas fórmulas pode ser aplicada para velocidades altas.

Os resultados de Yarnell podem ser resumidos em:

- a elevação do nível d'água devido aos pilares das pontes varia diretamente com a profundidade do canal não obstruído;

- as fórmulas de Nagler, d'Aubuisson, e Rehbock dão bons resultados para velocidades ordinárias, quando os coeficientes usados são adequadamente escolhidos, porém não apresentam bons resultados para velocidades altas. Assim Yarnell redefiniu os coeficientes das fórmulas a partir dos dados experimentais;

- para velocidades baixas e pouca turbulência algumas formas de pilares são mais eficientes, porém quando a contração é grande não é perceptível a diferenciação entre os pilares;

- os pilares em forma de lentes são mais eficientes, ou seja, causam menos interferência no escoamento, do que os circulares e triangulares, que por sua vez são mais eficientes do que os retangulares;

- o aumento do comprimento do pilar de quatro a treze vezes a largura do mesmo tem pouco efeito na eficiência hidráulica. Em alguns casos esta aumenta, em outros diminui. A razão ótima do comprimento/largura está compreendida na faixa de quatro a sete;

- ângulo menor do que 10° entre os pilares e a corrente tem efeito insignificante na sobre elevação e ângulo maior do que 20° reflete um aumento significativo que depende da vazão, profundidade e grau de contração do canal.

Para representar os resultados obtidos Yarnell desenvolveu equação empírica e soluções gráficas para solução de problemas de pilares de pontes.

A equação de Yarnell é baseada em aproximadamente 2.600 experimentos de laboratório nos quais foram variados: forma dos pilares, largura, comprimento ângulo e vazão.

A equação é a seguinte:

$$\frac{\Delta y}{y_3} = K \cdot F_3^2 \cdot (K + 5 \cdot F_3^2 - 0,6) \cdot (\alpha + 15 \cdot \alpha^4) \quad (1)$$

$$\alpha = \frac{b_1 - b_2}{b_1} \quad (2)$$

$$F_3 = \frac{v_3}{\sqrt{gy_3}} \quad (3)$$

$$y_1 = y_3 + \Delta y \quad (4)$$

Onde:

$\Delta y$  – perda de carga em metros

$y_1$  – profundidade de escoamento a montante da ponte em metros

$y_3$  – profundidade de escoamento a jusante da ponte em metros

$v_3$  – velocidade do escoamento a jusante da ponte em m/s

$F_3$  – número de Froude a jusante da ponte

$b_1$  – largura da seção a montante da ponte em metros

$b_2$  – largura da seção na ponte descontando a largura dos pilares em metros

$K$  – coeficiente que depende da geometria do pilar

Para a utilização da equação só são necessárias informações das seções a montante e a jusante da ponte. A equação é sensível à forma do pilar, à área de obstrução e à velocidade do escoamento.

Por causa de suas limitações a fórmula de Yarnell só pode ser usada em pontes em que a maior parte da perda de energia é decorrente dos pilares. Quando a equação de Yarnell é usada para computar a elevação da superfície da água na altura do tabuleiro da ponte, deve-se aumentar o coeficiente do pilar.

A tabela 1 apresenta o coeficiente do pilar de Yarnell para várias formas de pilares.

Tabela 1 – Coeficientes de Yarnell

Forma do pilar	Coeficiente de Yarnell
Semicircular	0,90
Dois cilindros conectados	0,95
Dois cilindros não conectados	1,05
Triangular	1,05
Quadrado	1,25

## 2.2 - Equação da energia

A equação da energia permite o cálculo do perfil da linha d'água e é representada pela equação:

$$y_1 + z_1 + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = y_2 + z_2 + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \Delta h \quad (5)$$

Onde:

$\Delta h$  – perda de carga em metros

$y_1$  – profundidade de escoamento a montante da ponte em metros

$y_2$  – profundidade de escoamento a jusante da ponte em metros

$z_1$  – cota do fundo do canal a montante da ponte em metros

$z_2$  - cota do fundo do canal a jusante da ponte em metros

$v_1$  – velocidade do escoamento a montante da ponte em m/s

$v_2$  - velocidade do escoamento a jusante da ponte em m/s

$\alpha_1$  – coeficiente de Coriolis a montante da ponte

$\alpha_2$  – coeficiente de Coriolis a jusante da ponte

O método baseado na equação da energia trata a ponte da mesma forma de uma seção de um rio, exceto quanto à área abaixo da ponte, e ao perímetro molhado que é aumentado com o contato com a estrutura da ponte.

Para a aplicação do método é necessária a estimativa do coeficiente de rugosidade de Manning,  $n$ , para cálculo da perda de carga por atrito e dos coeficientes de contração e expansão para cálculo da perda de carga na transição.

A estimativa do coeficiente de Manning é feita por diversas metodologias e a perda de carga é bastante sensível a este coeficiente.

Além disso o método baseado na energia necessita do levantamento topobatimétrico de seções a montante e jusante das pontes.

### 3 - ESTUDO DE CASO

A avaliação da equação de Yarnell foi feita através da variação dos parâmetros de entrada: número de Froude e obstrução da largura do canal em %. Para a determinação da faixa de variação do número de Froude levou-se em consideração as variações normalmente encontradas para a velocidade e profundidade dos cursos d'água brasileiros, conforme apresentado no Gráfico 1.

Portanto foi avaliada a equação de Yarnell para número de Froude menor do que 0,7, ou seja, em regime subcrítico. A variação da obstrução da largura do canal decorrente da implantação da ponte utilizada para a avaliação da equação de Yarnell foi de 5 a 30%.

Foram avaliados três tipos de pilares: semicircular, triangular e retangular. Os resultados encontrados para a sobre elevação do nível d'água se encontram apresentados nas tabelas 2 a 4 e nos gráficos 2 a 4.

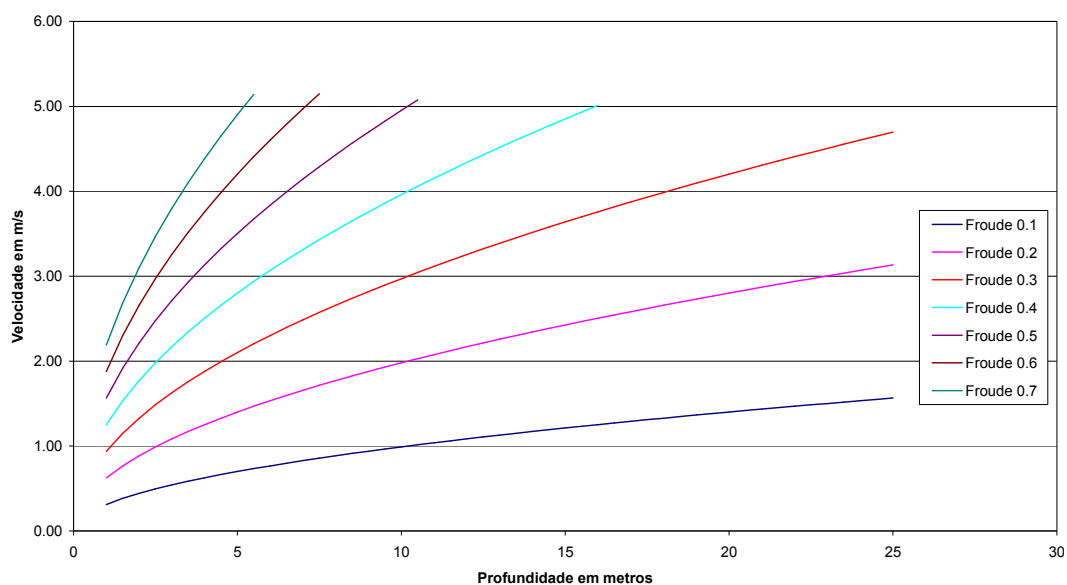


Gráfico 1– Variação do número de Froude com velocidade e profundidade

Tabela 2 – Sobre elevação do nível d’água em m/m decorrente da implantação de uma ponte com pilar semicircular

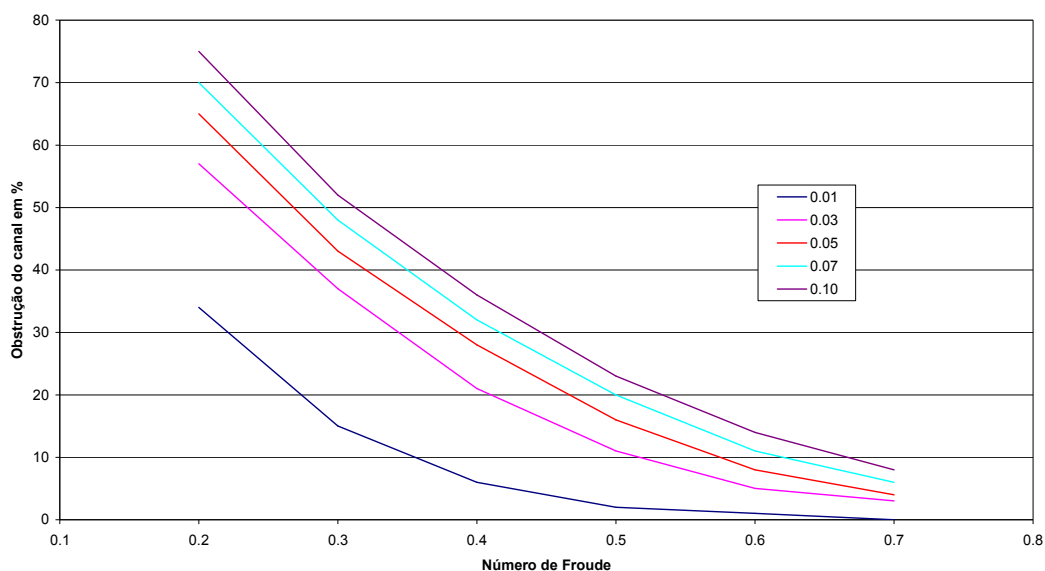
Froude	Obstrução da largura do canal em %					
	5	10	15	20	25	30
0,25	0,00	0,00	0,01	0,01	0,01	0,01
0,30	0,00	0,01	0,01	0,01	0,02	0,03
0,35	0,01	0,01	0,02	0,02	0,03	0,04
0,40	0,01	0,02	0,02	0,04	0,05	0,07
0,45	0,01	0,02	0,04	0,05	0,07	0,10
0,50	0,02	0,04	0,05	0,08	0,11	0,15
0,55	0,02	0,05	0,08	0,11	0,15	0,21
0,60	0,03	0,07	0,11	0,15	0,21	0,29
0,65	0,05	0,09	0,14	0,21	0,28	0,39
0,70	0,06	0,12	0,19	0,27	0,37	0,51

Tabela 3 – Sobre elevação do nível d’água em m/m decorrente da implantação de uma ponte com pilar triangular

Froude	Obstrução da largura do canal em %					
	5	10	15	20	25	30
0,25	0,00	0,01	0,01	0,01	0,02	0,02
0,30	0,00	0,01	0,01	0,02	0,03	0,04
0,35	0,01	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06
0,40	0,01	0,02	0,03	0,05	0,06	0,09
0,45	0,02	0,03	0,05	0,07	0,10	0,13
0,50	0,02	0,05	0,07	0,10	0,14	0,19
0,55	0,03	0,06	0,10	0,14	0,19	0,26
0,60	0,04	0,09	0,13	0,19	0,26	0,36
0,65	0,06	0,12	0,18	0,25	0,35	0,48
0,70	0,07	0,15	0,24	0,33	0,46	0,63

Tabela 4 – Sobre elevação do nível d'água em m/m decorrente da  
implantação de uma ponte com pilar retangular

Froude	Obstrução da largura do canal em %					
	5	10	15	20	25	30
0,25	0,00	0,01	0,01	0,02	0,02	0,03
0,30	0,01	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,35	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06	0,08
0,40	0,01	0,03	0,05	0,06	0,09	0,12
0,45	0,02	0,04	0,07	0,09	0,13	0,18
0,50	0,03	0,06	0,09	0,13	0,18	0,25
0,55	0,04	0,08	0,13	0,18	0,25	0,34
0,60	0,06	0,11	0,17	0,25	0,34	0,46
0,65	0,07	0,15	0,23	0,33	0,45	0,61
0,70	0,10	0,19	0,30	0,43	0,59	0,80



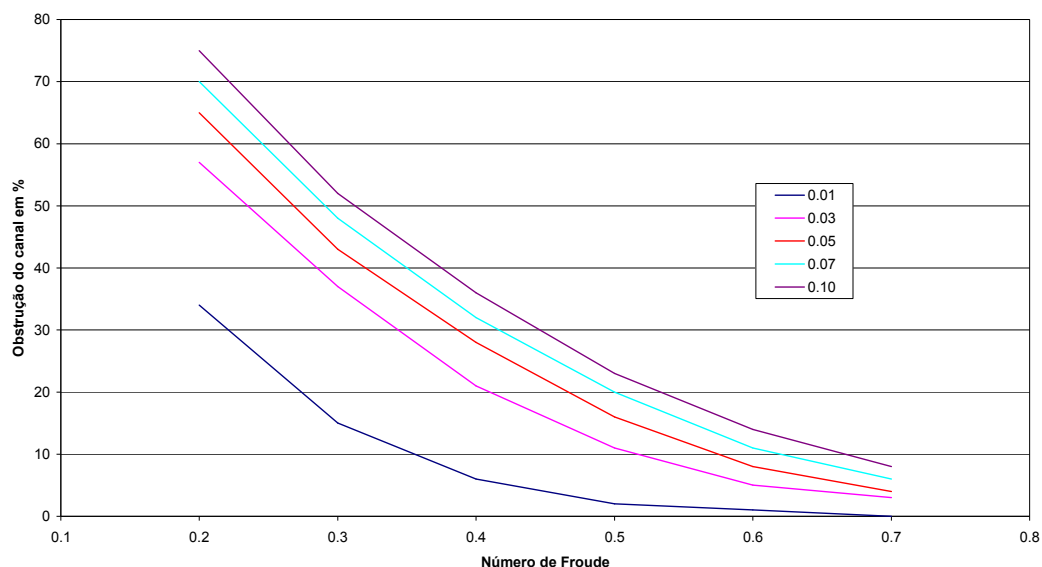


Gráfico 3 – Variação da sobre elevação do nível d'água em m/m decorrente da implantação de uma ponte com pilares triangulares

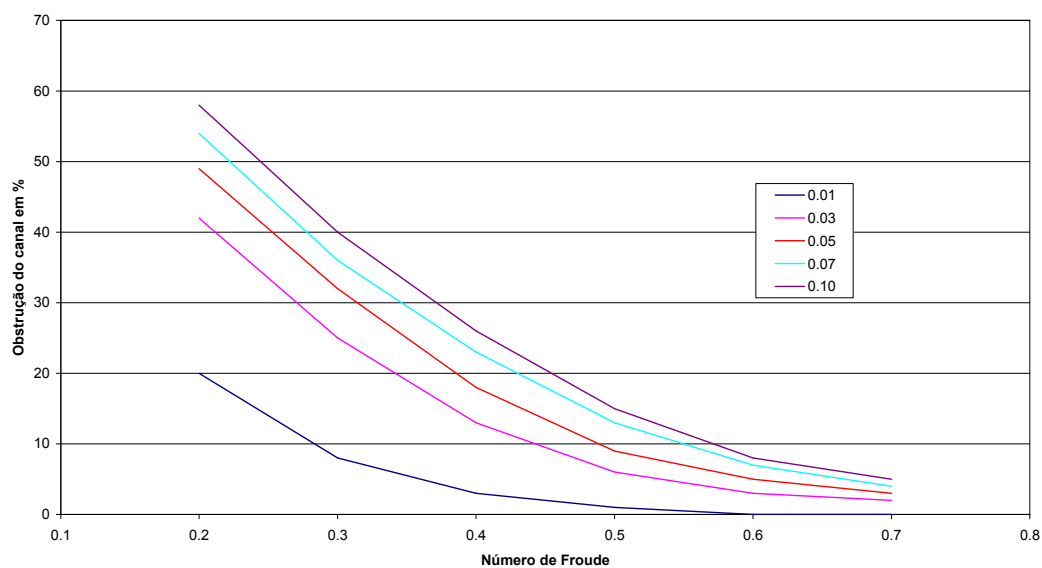


Gráfico 4 – Variação da sobre elevação do nível d'água em m/m decorrente da implantação de uma ponte com pilares retangulares

Através dos resultados verifica-se que a elevação do nível d'água varia diretamente com o número de Froude e com a obstrução do canal.

Como já havia sido verificado por Yarnell o pilar semicircular interfere menos no escoamento do que o triangular, que por sua vez interfere menos do que o retangular, vide gráficos 2 a 4. Elevação da ordem de 0,01 (1 cm em 1 metro) é verificada para diversos tipos de pilares, para números de Froude menores do que 0,7 e obstrução do canal menor do que 30%.



Foram também avaliadas as interferências de cinco pontes localizadas no Estado de Minas Gerais em cursos d'água com vazões de projeto variando de 150 a 1500 m<sup>3</sup>/s. A elevação foi calculada através da equação de Yarnell e da equação de energia, conforme apresentado na Tabela 5.

Comparando as metodologias de cálculo verificam-se variações dos resultados, porém as elevações encontradas são menores do que 1%, ou seja, insignificantes.

Tabela 5 – Elevações do nível d'água em 5 pontes localizadas no Estado de Minas Gerais

Rio	Vazão (m <sup>3</sup> /s)	Velocidade (m/s)	Froude	Largura (m)	Área (m <sup>2</sup> )	Alfa (%)	Forma do Pilar	Elevação (cm)	
								Yarnell	Energia
Itapecerica	422	1,48	0,20	52,0	286,1	4,0	Circular	1,5	0
Velhas	890	3,00	0,36	40,8	296,7	4,5	Quadrado	6,6	3
Paraopeba	1420	1,70	0,16	70,0	835,3	7,7	Semicircular	0,9	2
Pará	602	1,40	0,23	109,0	430,0	3,3	Semicircular	0,3	1
Maquiné	150	1,75	0,22	13,9	86,0	7,0	Retangular	3	0

#### 4 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Os métodos de obtenção das variáveis utilizadas nas equações: coeficiente de rugosidade, velocidade de escoamento, profundidade, levantamentos topobatimétricos apresentam erros associados mais significativos do que a ordem de grandeza das elevações encontradas nas pontes localizadas no Estado de Minas Gerais. Portanto, recomenda-se a utilização da equação de Yarnell na definição dos estudos a serem solicitados para análise de pedidos de outorgas de pontes.

Entretanto, deve-se observar a faixa de aplicação da equação de Yarnell especialmente quando:

- a perda de carga for decorrente principalmente dos pilares e o tabuleiro não for atingido pela vazão em análise,
- a obstrução do canal for pequena,
- o regime de escoamento for subcrítico.

## **BIBLIOGRAFIA**

BAPTISTA, M.B et al. Hidráulica Aplicada. ABRH, 2001.

BRASIL. Lei nº 9.433, de 8 de janeiro de 1997. Institui a Política Nacional de Recursos Hídricos, cria o Sistema Nacional de Gerenciamento de Recursos Hídricos, regulamenta o inciso XIX do art. 21 da Constituição Federal, e altera o art. 1º da Lei nº 8.001, de 13 de março de 1990, que modificou a Lei nº 7.990, de 28 de dezembro de 1989. Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil, Poder Executivo, Brasília, DF, 9 jan. 1997.

CHOW, V. T. Open-Channel Hydraulics. MacGraw-Hill. Neva York, 1959.

US ARMY CORPS OF ENGINEERS. HEC-RAS – River Analysis System – Hydraulic Reference Manual. Version 2.2. Abril, 1997.