

AVALIAÇÃO DE ESQUEMAS NUMÉRICOS EXPLÍCITOS PARA O CÁLCULO DE ONDAS DE CHOQUE EM CANAIS

José G. Vasconcelos¹

RESUMO - A propagação de ondas de choque em canais é um fenômeno de grande interesse e relevância em hidráulica. Tais eventos são frequentemente associados a ondas de cheias em rios, rupturas catastróficas de barragens e outros eventos onde há um aumento súbito de vazão. O cálculo preciso da propagação dessas ondas de choque é essencial para que alertas possam ser dados, permitindo assim a evacuação de populações, predições de impactos e de prejuízos, entre outros. O cálculo dessas é feito frequentemente por meio da modelagem computacional das equações de Saint-Venant, que constituem um sistema de duas equações diferenciais parciais que descrevem o escoamento transiente unidimensional em canais e rios. Diferentes modelos computacionais foram propostos para a solução dessas equações, e muitos foram construídos com esquemas numéricos lineares. Embora tais esquemas lineares sejam suficientemente precisos para a modelagem de escoamento transiente em canais, Godunov (1959) demonstrou tais esquemas lineares são inadequados para predições de ondas de choque. Esse estudo apresenta uma comparação entre três esquemas numéricos lineares e dois esquemas não lineares. Essa comparação é promovida para três valores de números de Courant, e demonstra a superioridade dos esquemas não lineares.

ABSTRACT- Shockwave propagation in channels is a phenomenon of great interest and relevance in hydraulics. Such events are frequently associated with river floods, catastrophic dam failures, and other events in which a sudden flow increase is observed. The accurate calculation of the shockwave propagation is essential in order to provide alert, allowing for the evacuation of populations, impacts assessment, damage evaluation, among others tasks. Shockwave calculation is performed with numerical modeling of the equations of Saint-Venant, which constitutes a system of two partial differential equations that describes the one-dimensional transient flow in canals and rivers. Different computational models have been proposed for the solution of these equations, and many have been constructed upon linear numerical schemes. Even though these linear schemes may be sufficiently accurate to simulate transient channel flow, Godunov (1959) demonstrated that they yield poor shockwave predictions. This study presents a comparison between three linear numerical schemes and two non-linear schemes. This comparison is performed for three values of numbers of Courant, and demonstrates the superiority of the non-linear schemes.

Palavras-chave: Modelagem computacional, Ondas de choque, Transientes em canais.

¹ Professor do Departamento de Engenharia Civil e Ambiental Universidade de Brasília. DF, SHIS QL 02 conjunto 04 casa 04, Brasília, DF, CEP 71610-045. e-mail: jvasconcelos@unb.br

1 - INTRODUÇÃO

A propagação de ondas de choque em canais está ligada a alguns dos problemas mais sérios em Hidráulica. Essas ondas de choque, denominadas de ressaltos hidráulicos, podem ocorrer em eventos de propagação de cheias em rios, escoamento em condutos de drenagem durante chuvas intensas, rupturas de barragens, e outros eventos de enchimento rápido de canais, rios ou mesmo condutos fechados. A precisão na previsão do avanço dessas ondas de choque é essencial para ser possível alertar populações à jusante na trajetória de propagação dessas ondas, permitindo a evacuação de pessoas, avaliação de prejuízos e danos a propriedade, entre outros.

O problema da propagação dessas ondas de choque é classificado como um tipo de escoamento transiente em regime livre. O fundamento teórico comumente aplicado para esse tipo de problema é representado pelas equações de Saint-Venant, que é um sistema de duas equações diferenciais parciais que representam a conservação de massa e momento linear em escoamento a superfície livre em canais.

As equações de Saint-Venant, em forma conservativa para um canal prismático e sem contribuições laterais, podem ser escritas como:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial F(\vec{U})}{\partial x} = S(\vec{U}) \quad (1)$$

onde

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix} \quad F(\vec{U}) = \begin{bmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{A} + gI \end{bmatrix} \quad S(\vec{U}) = \begin{bmatrix} 0 \\ gA(S_o - S_f) \end{bmatrix} \quad (2)$$

Nas equações acima, $\mathbf{U}=(A, Q)^T$ é o vetor das variáveis conservadas, sendo que A é a área do escoamento, Q a vazão do canal, $F(\mathbf{U})$ os fluxos das variáveis, g a aceleração da gravidade, I é o primeiro momento de inércia da seção transversal do escoamento, $S(\mathbf{U})$ os termos fonte, S_o a declividade do fundo do canal e S_f a declividade da linha de energia.

As equações de Saint-Venant não têm solução analítica, o que resultou no desenvolvimento de diferentes soluções numéricas para as mesmas. Uma alternativa para a solução desse problema numericamente é baseada na resolução do escoamento por meio do método das características. Após se promover a análise característica dessas equações, transformam-se as mesmas em equações diferenciais ordinárias, que são válidas em famílias de trajetórias dx/dt no domínio de solução espaço-tempo ($X-T$), denominadas linhas características. Conforme apresentado por Sturm (2001), a forma característica das equações de Saint-Venant é:

$$\text{Nas linhas C1: } \left(\frac{D(V + 2c)}{Dt} \right)_1 = g(S_o - S_f), \quad \text{válido para } \frac{dx}{dt} = (V + c) \quad (3)$$

$$\text{Nas linhas C2: } \left(\frac{D(V - 2c)}{Dt} \right)_2 = g(S_o - S_f), \quad \text{válido para } \frac{dx}{dt} = (V - c) \quad (4)$$

$$\text{onde } \frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad \text{e } c = \sqrt{g \frac{A}{B}} \quad (5)$$

Onde c é a celeridade de propagação de ondas no escoamento e B a largura da superfície livre do escoamento.

O problema decorrente desse método é que as linhas características, que transmitem as informações do escoamento, não atravessam nem são criadas na região de ondas de choque. Dessa forma algum procedimento adicional é necessário para a solução do escoamento com ressaltos hidráulicos, que é denominado procedimento de ajuste de choque. Esse procedimento consiste na solução de um sistema de equações que incluem três equações características que chegam à onda de choque, bem como as equações de conservação de massa e momento através do choque. Esse procedimento é descrito em Cunge *et al.* (1982), e nas duas regiões separadas pelo choque aplica-se o método das características para a solução do escoamento.

Modelos que usam a técnica do ajuste de choque para o cálculo de escoamentos em canais com ressaltos não são tão amplamente utilizados dada a complexidade da solução do sistema de equações não lineares do ajuste de choque. Outros fatores que aumentam a complexidade da aplicação desse tipo de modelo é a possibilidade de interações entre diferentes ondas de choque e a necessidade de verificar a existência de alguma intersecção de características de uma mesma família.

Os métodos de captura de interface para o cálculo de ondas de choque em canais são mais amplamente utilizados e baseiam-se na teoria da dinâmica dos fluidos computacionais aplicada às leis de conservação, nesse caso as equações de Saint-Venant. Tais métodos numéricos para soluções de equações de conservação apresentam alguns requerimentos para serem aplicados com sucesso, que incluem:

- Consistência, ou seja, o sistema de Equações Diferenciais Parciais pode ser recuperado das equações algébricas discretizadas;
- Estabilidade: perturbações na solução, tais como erros de truncagem, devem decair com o tempo;
- Convergência: Conforme no Teorema da Equivalência (LeVeque, 1992), demonstrado por Lax, para um problema linear de valor inicial bem posto associado a um método de solução consistente e estável, a estabilidade do método implica em convergência.

Tal convergência, contudo, não necessariamente implica que o resultado obtido com o método corresponde à solução exata, ou mesmo aproximada, do sistema de EDP's sendo solucionado. Contudo, outro teorema demonstrado por Lax e Wendroff estipula que se um esquema conservativo é aplicado a um sistema de equações que representam leis de conservação, a solução numérica corresponde a uma das soluções fracas do sistema de equações diferenciais parciais (Toro, 2001). A garantia que a solução fraca escolhida é a solução correta das EDP's decorre da observância da condição entrópica pela qual o escoamento perde energia na direção da onda de choque. Otto (2003) propõe um diagrama que relaciona os conceitos de consistência, estabilidade e convergência na solução numérica de EDP's.

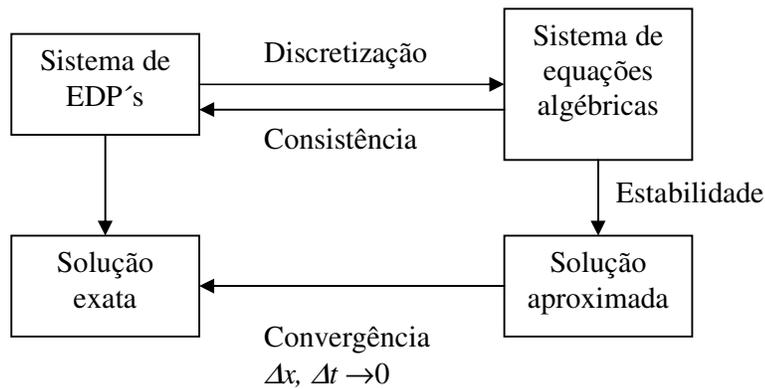


Figura 1 – Relação entre Consistência, Estabilidade e Convergência na solução numérica de equações diferenciais parciais – adaptado de Otto (2003).

É necessário destacar nesse ponto que métodos numéricos para a solução de EDP's devem ser apropriados ao tipo de EDP que caracteriza o problema. Conforme apontado por Farlow (1993), classificam-se EDP's em três tipos: hiperbólicas, parabólicas e elípticas. Dado que as equações de Saint-Venant têm caráter hiperbólico, a discussão aqui é focada nessa classe de equações. Esse tipo de equação tem a propriedade de dar origem a descontinuidades na solução, mesmo nos casos onde os valores iniciais e os valores de contorno variam continuamente. Esse tipo de comportamento é confirmado pela presença de ressaltos hidráulicos, que representam as descontinuidades da solução do escoamento em canais.

As descontinuidades que decorrem do caráter hiperbólico das equações de Saint-Venant colocam outros obstáculos para a utilização de esquemas numéricos. Embora haja esquemas numéricos que atendam os requerimentos acima apontados (estabilidade, consistência e convergência), é possível que alguns sejam inadequados para serem aplicados em problemas ondas de choque. Esse é o caso de esquemas numéricos lineares, que são caracterizados por um procedimento de atualização no tempo das variáveis conservadas por meio de coeficientes constantes, que podem ser reescritos como sendo uma combinação linear dos valores obtidos no

passo de tempo anterior. Exemplo desses esquemas são aqueles implementados em modelos numéricos para escoamento transiente em canais construídos com o método das diferenças finitas. Como explicado por Crossley (1999), esquemas numéricos lineares para a solução das equações de conservação de escoamentos, comuns até a década de 1980, sofrem das conseqüências previstas pelo teorema derivado por Godunov (1959). De acordo com o teorema de Godunov, esquemas numéricos lineares de ordem de acurácia superior a 1 irão gerar oscilações espúrias nas proximidades de ondas de choque. Por outro lado, esquemas lineares de ordem de acurácia 1 geram ondas de choque com excessiva difusão numérica.

Tais características de esquemas numéricos lineares são pioradas em regiões do domínio de solução onde o número de Courant é baixo, podendo inviabilizar o uso desses esquemas a depender das condições do problema a ser resolvido. O número de Courant expressa a relação da velocidade de propagação de ondas no escoamento (numericamente a soma do módulo da velocidade e da celeridade da onda superficial) e a máxima velocidade possível a uma onda propagando-se no domínio de solução espaço-tempo (numericamente $\Delta x/\Delta t$). Em esquemas explícitos (*time-marching*), esse número deve ser igual ou menor a um em todo o domínio sob pena de haver instabilidades numéricas e divergência nos cálculos. Já em esquemas implícitos, o número de Courant pode ser superior a um sem que haja divergência nos cálculos, muito embora tal prática possa comprometer a precisão da propagação de ondas de choque.

Em problemas reais de propagação de ondas solucionados por esquemas explícitos, relativamente poucos pontos no sistema podem ter valores do número de Courant próximos a um, dada a diferenças locais de velocidade e celeridade de ondas e a uniformidade dos valores de $\Delta x/\Delta t$ no domínio de solução. Assim, é bastante importante que esquemas numéricos possam apresentar bons resultados com valores mais baixos do número de Courant, característica que não é possível a esquemas lineares.

Nesse contexto que esquemas não-lineares para a solução de sistemas de equações que representam leis de conservação surgiram para escapar das conseqüências previstas pelo teorema de Godunov. Esquemas não lineares aplicados a leis de conservação e EDP's hiperbólicas foram primeiro aplicados a problemas em astrofísica e meteorologia, depois passando pela engenharia aeroespacial, finalmente chegando à hidráulica em fins da década de 1980. Glaister (1988) apresentou uma solução para o problema da propagação de uma onda de choque em uma dimensão decorrente da ruptura catastrófica de uma barragem usando o esquema numérico proposto por Roe (1981). Garcia-Navarro e Saviron (1992) e Trajkovic (1999) apresentam uma metodologia para solução de problemas descontínuos usando o esquema de McCormack. Diversos outros esquemas,

usados em problema de dinâmica de gases, podem ser adaptados para a solução de problemas de ondas de choque em canais, e muitos desses esquemas são apresentados por Toro (2001).

2 - OBJETIVO

Tem-se a intenção nesse trabalho de apresentar de uma comparação entre os esquemas lineares e não lineares explícitos para a descrição de um simples problema de propagação de ondas em canais. Nessa comparação pretende-se explorar as conseqüências do teorema de Godunov com o uso de um esquema numérico linear de primeira ordem (Lax-Friedrichs), um esquema numérico linear de segunda ordem (Lax-Wendroff) e um esquemas não linear de primeira ordem (Roe) e um esquema linear de segunda ordem (Roe com MUSCL-Hancock) para diferentes valores de número de Courant. Com isso deseja-se demonstrar a superioridade de esquemas numéricos não lineares como uma forma de incentivar o uso desses tipos de esquemas na modelagem de problemas de escoamentos mais extremos em canais.

Esse trabalho também objetiva enfatizar a importância do uso apropriado de esquemas numéricos para a solução de ondas de choque em canais. Apresenta-se assim um exemplo de falha na aplicação de método numérico para cálculo de ondas de cheia em canais. Nesse exemplo, é utilizado um modelo construído com o método das características a um caso onde uma onda de choque é gerada, mas propositalmente o procedimento de ajuste de choque não é feito. Nessas condições os resultados desse cálculo são comparados a um resultado obtido por um esquema não-linear.

3 - APRESENTAÇÃO DOS ESQUEMAS NUMÉRICOS UTILIZADOS

Inicialmente, apresenta-se a versão características das equações de Saint-Venant, escritas em variáveis primitivas de profundidade e velocidade de escoamento (y, V), usando o método das características para escoamento em canais proposto por Hartree. Esse método utiliza um *grid* computacional retangular com passos de tempo constantes, e promove interpolações lineares para determinar valores de V e c no ponto de partida das linhas características C1 e C2. As equações podem ser escritas como:

$$V_P - V_R + \frac{g}{c_R} \cdot (y_P - y_R) = g(S_o - S_{fR})\Delta t \quad (6)$$

$$x_P - x_R = (V_R - c_R)\Delta t \quad (7)$$

$$V_P - V_S - \frac{g}{c_R} \cdot (y_P - y_S) = g(S_o - S_{fS})\Delta t \quad (8)$$

$$x_P - x_S = (V_S - c_S)\Delta t \quad (9)$$

Onde: $V_P, y_P, V_S, y_S, V_R, y_R$ são as velocidades e profundidades nos pontos P, S e R respectivamente, $\Delta t, \Delta x$ correspondem ao tamanho do passo computacional e o tamanho da discretização, S_{fR}, c_R, S_{fS}, c_S são as declividades das linhas de energia e celeridades das ondas nos pontos R e S, e x_R e x_S são as coordenadas dos pontos R e S no eixo x . Os valores nos pontos R e S são obtidos por meio de interpolação entre os valores conhecidos nos pontos A, B e C.

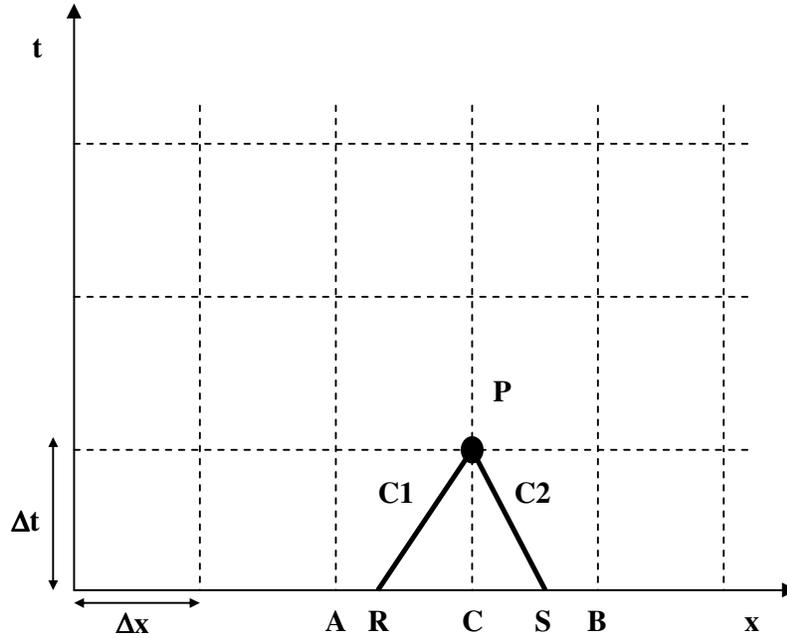


Figura 2 – Solução numérica do método das características para canais proposto por Hartree em um domínio de solução retangular (adaptado de Sturm, 2001).

Agora, apresentam-se os esquemas lineares não derivados diretamente de análise característica que serão estudados. Num domínio de solução discretizado, a solução no novo passo computacional para as equações de Saint-Venant pelo esquema Lax-Friedrichs pode ser dada por:

$$A_i^{n+1} = \frac{1}{2}(A_{i-1}^n + A_{i+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n) \quad (10)$$

$$Q_i^{n+1} = \frac{1}{2}(Q_{i-1}^n + Q_{i+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[\left(\frac{Q^2}{A} + gI \right)_{i+1}^n - \left(\frac{Q^2}{A} + gI \right)_{i-1}^n \right] + \Delta t \left(\frac{S_{i+1}^n + S_{i-1}^n}{2} \right) \quad (11)$$

Onde i corresponde ao índice do nó computacional no espaço enquanto que n corresponde ao mesmo índice do passo computacional.

Já o esquema Lax-Wendroff, do tipo preditor-corretor, pode ser expresso pelas seguintes equações no passo de tempo preditor $(n+1/2)\Delta t$:

$$A_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(A_{i+1}^n + A_i^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(Q_{i+1}^n - Q_i^n) \quad (12)$$

$$Q_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(Q_{i+1}^n + Q_i^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[\left(\frac{Q^2}{A} + gI \right)_{i+1}^n - \left(\frac{Q^2}{A} + gI \right)_i^n \right] + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{S_{i+1}^n + S_i^n}{2} \right) \quad (13)$$

No passo de tempo corretor $(n+1)\Delta t$ essas equações tornam-se:

$$A_i^{n+1} = A_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(Q_{i+1/2}^{n+1/2} - Q_{i-1/2}^{n+1/2}) \quad (14)$$

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\left(\frac{Q^2}{A} + gI \right)_{i+1/2}^{n+1/2} - \left(\frac{Q^2}{A} + gI \right)_{i-1/2}^{n+1/2} \right] + \Delta t \left(\frac{S_{i+1/2}^{n+1/2} + S_{i-1/2}^{n+1/2}}{2} \right) \quad (15)$$

O esquema numérico não-linear de primeira ordem adotado, proposto por Roe (1981) e apresentado por Macchione e Morelli (2003) consiste num solucionador do problema do valor inicial de Riemann. Na formulação do esquema as variáveis conservadas da equação 1 são solucionadas no domínio X-T pela expressão:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[(F_{i+1}^n + F_i^n) - \sum_j |\lambda^{(j)}| (\delta w^{(j)})_{i+1/2} \bar{r}_{i+1/2}^{(j)} \right] + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[(F_{i-1}^n + F_i^n) - \sum_j |\lambda^{(j)}| (\delta w^{(j)})_{i-1/2} \bar{r}_{i-1/2}^{(j)} \right] + \Delta t S_i^n \quad (16)$$

Os valores dos auto-valores aproximados $\lambda^{(j)}$ que correspondem à velocidade da propagação das ondas nas interfaces das células e dos correspondentes auto-vetores $r^{(j)}$ para as variáveis A e Q requerem que seja feito primeiramente os cálculos das médias de Roe para cada interface entre as células computacionais $(i, i+1)$.

$$\begin{aligned} \bar{A}_{i+1/2} &= \sqrt{A_i A_{i+1/2}} & \bar{Q}_{i+1/2} &= \frac{\sqrt{A_i} Q_{i+1} + \sqrt{A_{i+1}} Q_i}{\sqrt{A_i} + \sqrt{A_{i+1}}} \\ \bar{c}_{i+1/2} &= \sqrt{g \frac{I_{i+1} - I_i}{A_{i+1} - A_i}} \quad \text{se } A_i \neq A_{i+1} & \bar{c}_{i+1/2} &= \sqrt{\frac{\frac{1}{2} g (A_{i+1} + A_i)}{\frac{1}{2} (B_{i+1} + B_i)}} \quad \text{se } A_i = A_{i+1} \end{aligned} \quad (17)$$

Assim, são obtidos os valores dos auto-valores e auto-vetores usados pela formulação de Roe nas interfaces $(i, i+1)$:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_1 &= \frac{\bar{Q}}{A} + \bar{c} & \bar{\lambda}_2 &= \frac{\bar{Q}}{A} - \bar{c} \\ \bar{r}^{(1)} &= \frac{1}{2c} \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{\lambda}_1 \end{bmatrix} & \bar{r}^{(2)} &= \frac{1}{2c} \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{\lambda}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

Finalmente, a intensidade da onda atravessando a interface entre células $(i, i+1)$:

$$\delta w^{(1)(2)} = \pm \left[(Q_{i+1} - Q_i) + \left(-\frac{\bar{Q}_{i+1/2}}{A_{i+1/2}} \pm \bar{c}_{i+1/2} \right) (A_{i+1} - A_i) \right] \quad (19)$$

O esquema não linear de segunda ordem adotado parte de uma modificação denominada Roe com MUSCL-Hancock (Toro, 2001). Os valores das variáveis conservadas obtidos pelo esquema de Roe de primeira ordem são constantes dentro de uma determinada célula computacional. A idéia por trás dos esquemas não-lineares de segunda ordem é a de reconstruir os valores das variáveis conservadas nos pontos extremos da célula computacional de forma a tornar a transição entre os valores descontínuos menos abrupta com o uso de trapézios, conforme ilustrado na Figura 2. Os detalhes dessa derivação são muito extensos e podem ser encontrados no livro de Toro (2001).

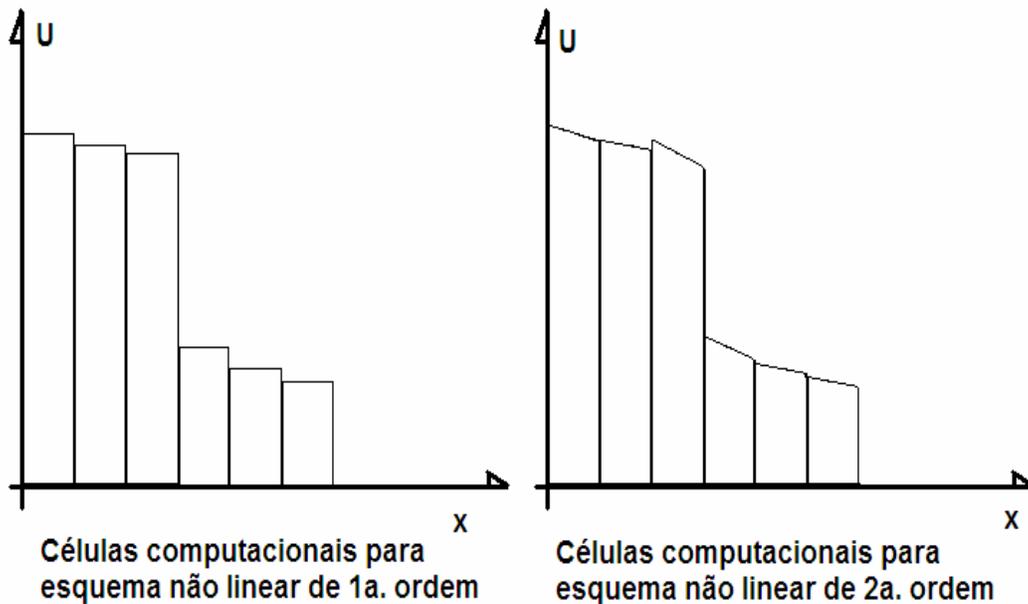


Figura 3 – Representação da reconstrução da distribuição dos valores no eixo x das variáveis conservadas próximas a uma onda de choque em esquemas não lineares de 1ª e 2ª ordem.

4 - RESULTADOS

4.1 - Problema-exemplo

O problema que se propõe resolver é o da propagação de uma onda de choque em um canal de seção transversal circular, com diâmetro de 1 metro, comprimento de 200 metros e sem perdas por fricção. A motivação de estudar um problema sem atrito é pela possibilidade de calcular a velocidade de propagação da onda de choque analiticamente (sem perda de generalidade) mas permitindo uma avaliação dos resultados dos esquemas numéricos testados. O canal contém água a uma profundidade de 0,30 m, e não há escoamento inicialmente no canal. A onda de choque é gerada por meio de um aumento súbito da profundidade a montante do canal para 0,50 m.

Usando a Figura 4 como referência, sendo A_1 , A_2 , V_1 e V_2 as áreas e velocidades de escoamento a montante e a jusante da onda de choque, a equação de conservação de massa através de uma onda de choque (ressalto) movendo-se a uma velocidade w pode ser escrita como:

$$A_1(V_1 - w) = A_2(V_2 - w) \quad (20)$$

E a conservação do momento linear resulta em:

$$g(I_2 - I_1) = A_1(V_2 - w)(V_1 - V_2) \quad (21)$$

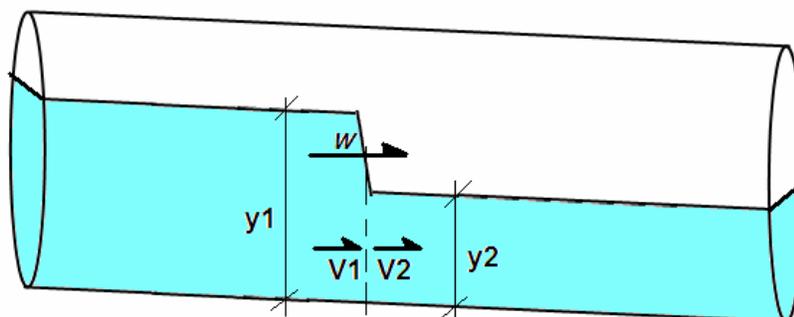


Figura 4 – Esquema da propagação de uma onda de choque em canais (adaptado de Wiggert, 1972). No problema exemplo, a declividade do conduto é zero.

Nesse problema, os valores de profundidade e velocidade a jusante da onda de choque são constantes ($y_2=0,30$ m, $V_2=0,0$ m/s). Uma vez que se desconsideraram as perdas de energia por fricção e que o canal tem declividade horizontal, o valor de profundidade de escoamento atribuído na condição de contorno de montante no canal de 0,50 m deve ser mantido à medida que a onda de choque propaga-se no canal.

Com isso, têm-se duas incógnitas no problema (w e V_1), e duas equações (20 e 21) para serem resolvidas. Desse cálculo resulta que $V_1=1,19$ m/s e $w=2,41$ m/s. Dessa forma, esse cálculo analítico permite antecipar que 50 segundos após o início da propagação da onda de choque o local da interface da onda de choque deve estar a aproximadamente 121,5 metros a jusante no canal, considerando que no primeiro metro de extensão do conduto a profundidade é mantida em 0,50 metro.

As comparações entre os resultados dos diferentes esquemas numéricos são promovidas através da comparação dos perfis de pressão piezométrica no canal para um mesmo instante, 50 segundos após o aumento súbito da profundidade de montante. As simulações matemáticas são feitas para diferentes valores de número de Courant, especificamente 1,00, 0,25 e 0,15, de forma a avaliar o impacto desse parâmetro nos resultados. Os domínios foram discretizados em segmentos ou células de 1 metro de comprimento.

4.2 - Esquema de Lax-Friedrichs

Os resultados da propagação das ondas de choque no canal utilizando-se o esquema linear de primeira ordem de Lax-Friedrichs (LxF) são apresentados na Figura 5.

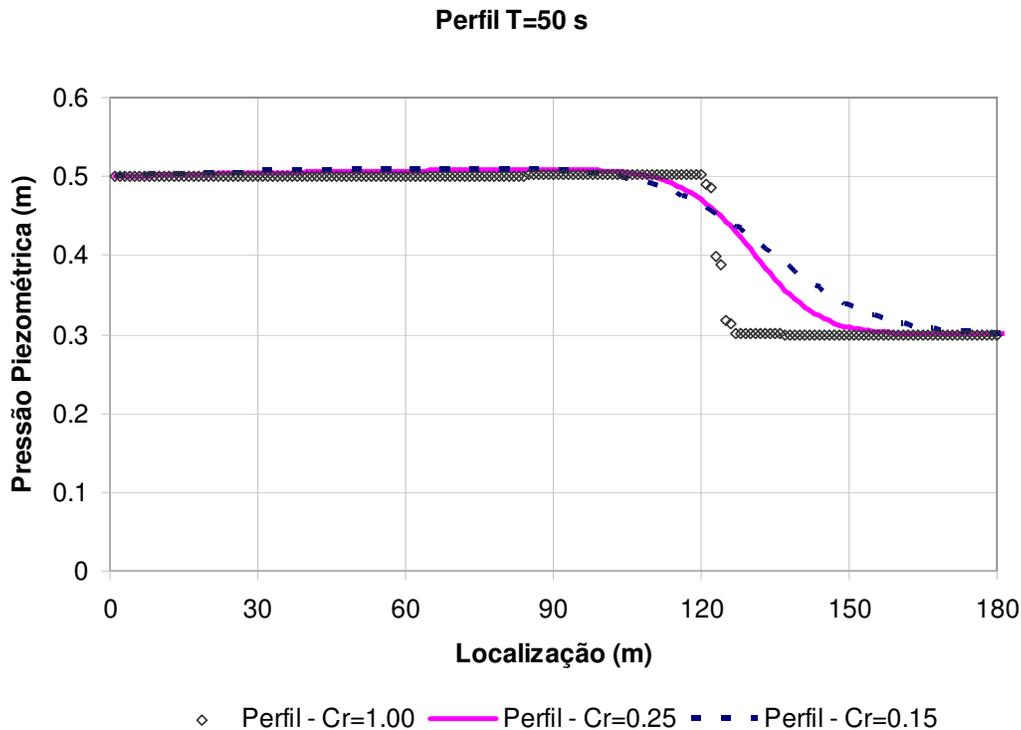


Figura 5: Comparação dos perfis piezométricos obtidos na propagação da onda de choque usando o esquema LxF para diferentes valores do número de Courant

Como pode ser percebido na Figura 5, os resultados para o número de Courant igual a 1,0 indicam que a crista da onda de choque propagou-se até aproximadamente 120 metros no canal e a base da onda está a 126 metros, o que é considerado um resultado suficientemente preciso, apenas 1.2% de desvio do resultado analítico no centro do choque, e como uma difusão numérica baixa. Contudo, confirmando-se o que é previsto pelo teorema de Godunov, para valores mais baixos do número de Courant há uma severa difusão numérica da onda de choque. Para o valor mais baixo do número de Courant (0,15) a crista do choque está a cerca de 105 metros, enquanto a base está na coordenada 165 metros. Essa onda de choque teria então cerca de 60 metros de extensão, o que é um resultado muito impreciso. Isso ilustra claramente as limitações de um esquema como o LxF para condições onde há um baixo valor de número de Courant.

4.3 - Esquema de Lax-Wendroff

Os resultados da propagação das ondas de choque no canal utilizando-se o esquema linear de primeira ordem de Lax-Wendroff (LxW) são apresentados nas Figuras 6 e 7.

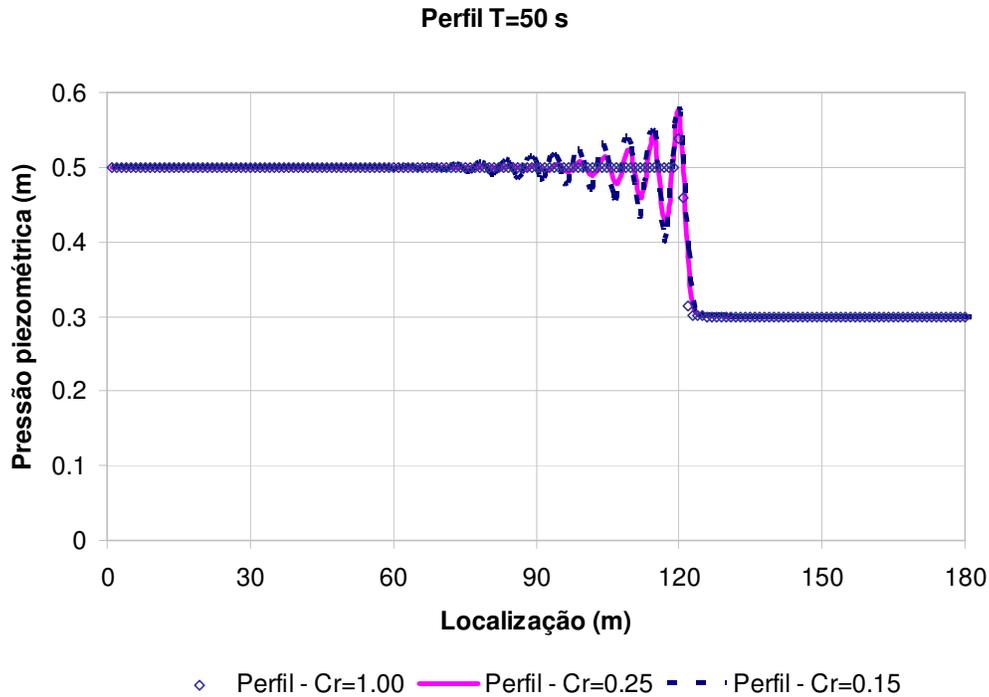


Figura 6: Comparação dos perfis piezométricos obtidos na propagação da onda de choque usando o esquema LxW para diferentes valores do número de Courant

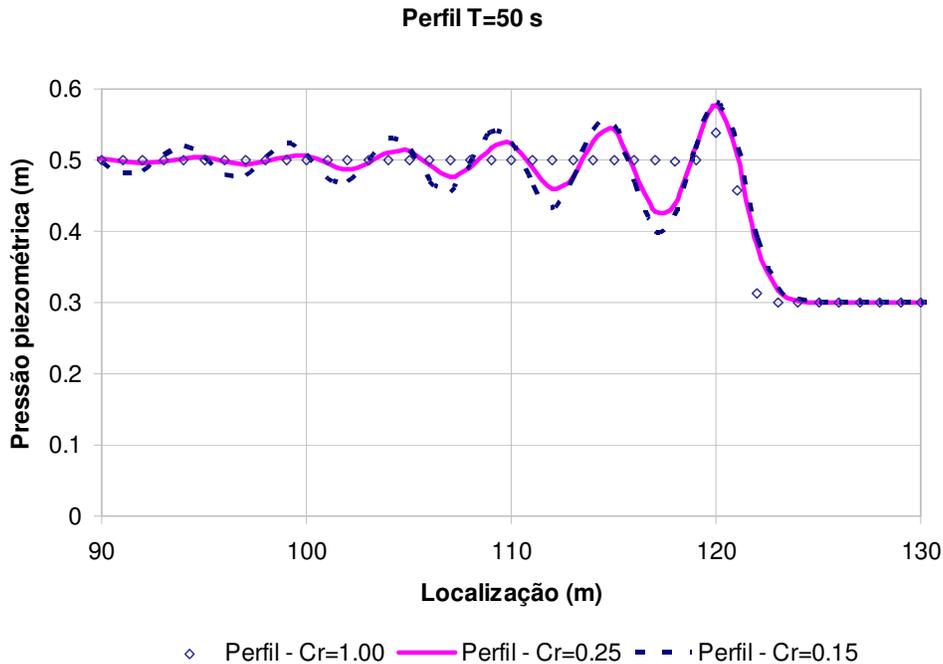


Figura 7: Detalhe dos perfis piezométricos das frentes de escoamento obtidos na propagação da onda de choque usando o esquema LxW para diferentes valores do número de Courant

Novamente de acordo com o previsto pelo teorema de Godunov, o esquema Lax-Wendroff apresenta uma ondas de choque caracterizadas por oscilações espúrias na região da crista do choque, cuja extensão afetada depende do valor do número de Courant. Como as Figuras 6 e 7 ilustram, para o valor de Courant de 1,0 apenas um ponto a montante do choque tem um valor de pressão piezométrica superior a 0,50 m com os outros valores à montante corretamente previstos. Mas à medida que o número de Courant decresce, tanto a amplitude das oscilações quanto a região onde elas existem aumentam. Apesar do problema das oscilações, a previsão da localização da onda de choque é mais acurada que aquela apresentada pelo método LxF, com a crista localizada a 120 metros e a base localizada a 123 metros, para qualquer um dos valores de número de Courant considerados. O centro dessa onda de choque numérica encontra-se num local que corresponde exatamente aos valores obtidos analiticamente acerca da posição da onda de choque.

4.4 - Esquema de Roe e Roe / MUSCL-Hancock

Os resultados da propagação das ondas de choque no canal utilizando-se o esquema não linear de primeira ordem de Roe são apresentados nas Figuras 8 e 9.

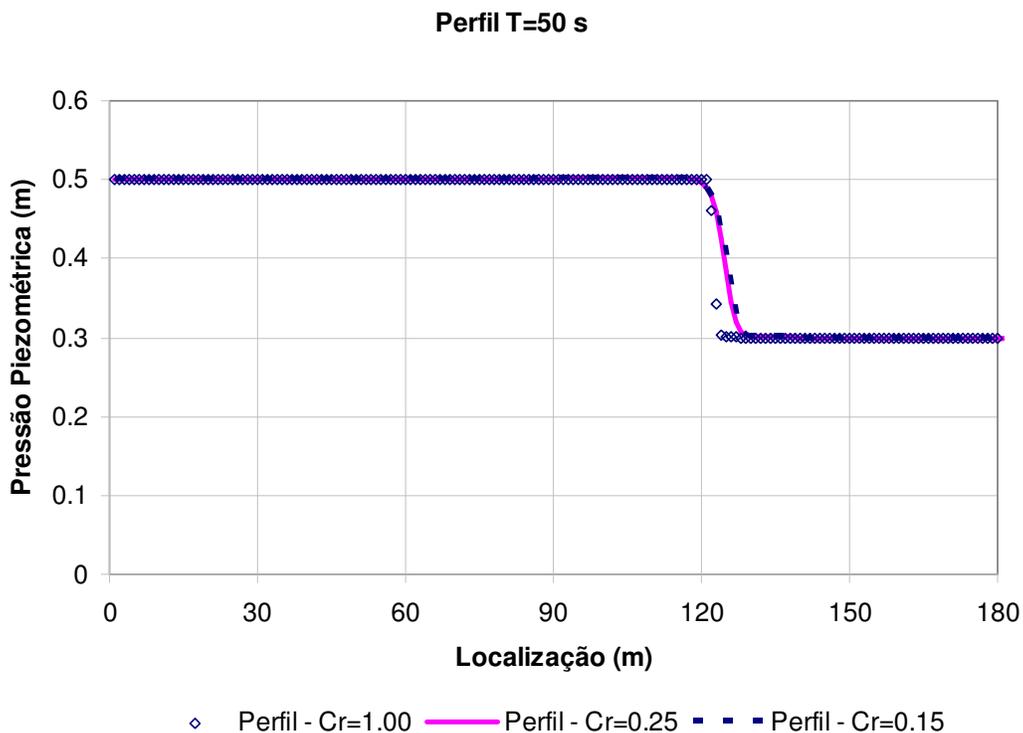


Figura 8: Comparação dos perfis piezométricos obtidos na propagação da onda de choque usando o esquema de Roe para diferentes valores do número de Courant

Percebe-se que os resultados obtidos com o esquema de Roe não apresentam nenhuma oscilação a montante do choque em nenhum dos valores de número de Courant considerados. Para os resultados com o número de Courant de 1,00, a localização da crista da onda de choque é a 121

metros da entrada do canal, enquanto que a base da onda encontra-se a 124 metros. A difusão numérica é maior que aquela obtida com o esquema LxW, mas menor que aquela obtida com o esquema LxF. Contudo, conforme mostrado na Figura 9, quando valores menores do número de Courant são usados, a difusão numérica permanece baixa, com a crista da onda localizada a 120 metros e a base localizada a 128 metros. A não existência de oscilações numéricas e o pequeno efeito do número de Courant nos resultados fazem esse esquema atrativo para fins de simulação numérica de ondas de choque.

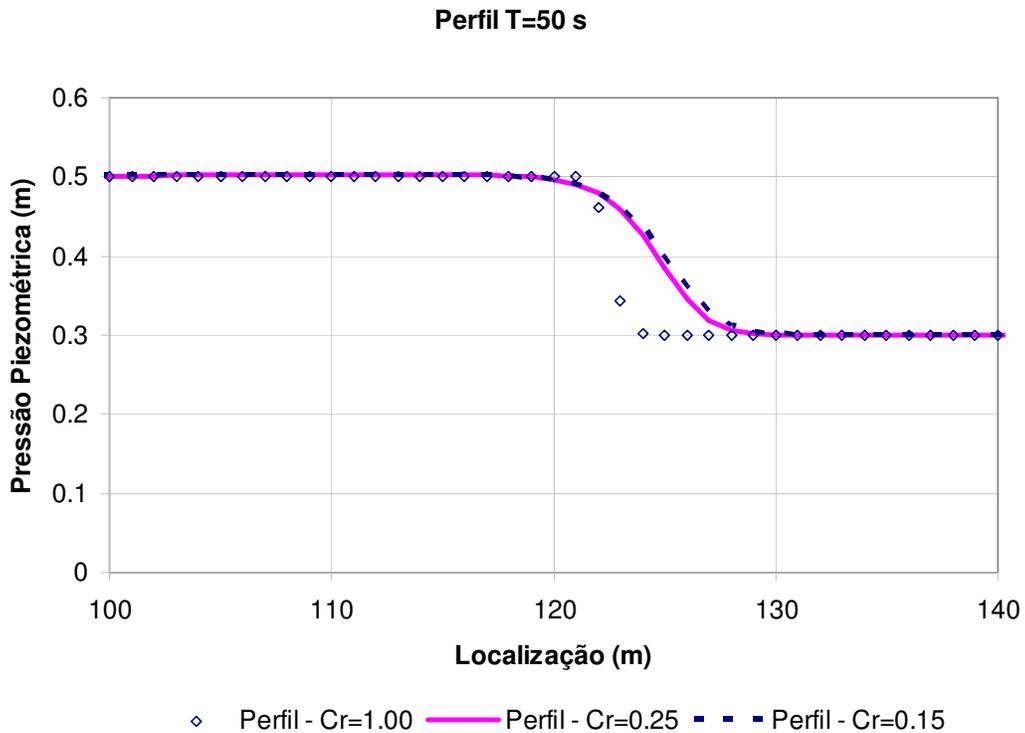


Figura 9: Detalhe dos perfis piezométricos das frentes de escoamento obtidos na propagação da onda de choque usando o esquema Roe para diferentes valores do número de Courant

Quando o esquema de Roe / MUSCL-Hancock é utilizado, o efeito da difusão numérica é reduzido ainda mais. A Figura 10 mostra que, para os valores de número de Courant estudados a crista da onda ficou a 121 metros, e a base ficou a 124 metros para o caso com o Courant de 1,00 e 126 metros para as demais condições. Não houve oscilações numéricas nos resultados.

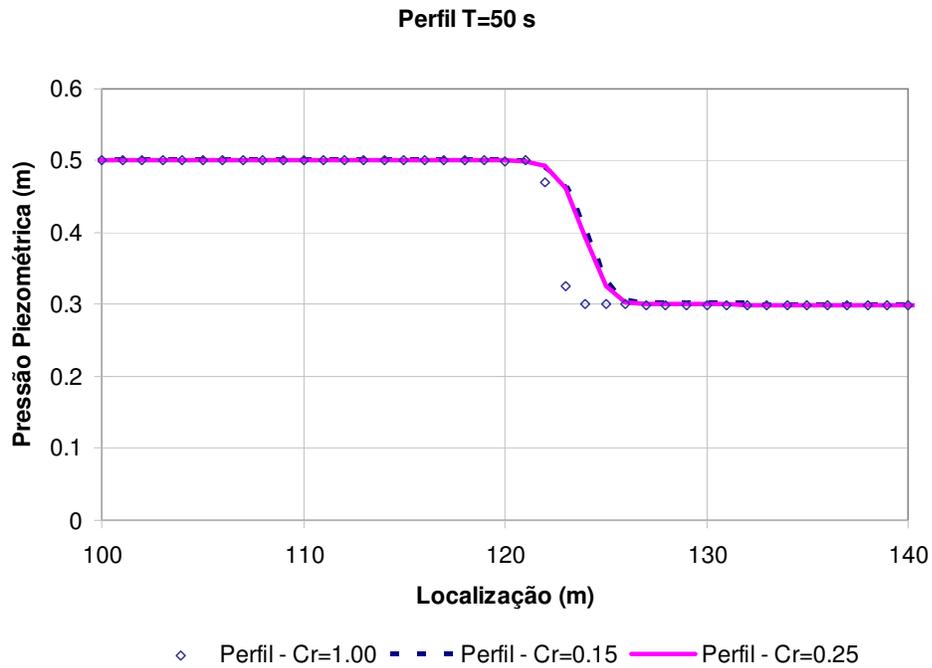


Figura 10: Detalhe dos perfis piezométricos das frentes de escoamento na propagação da onda de choque usando o esquema Roe/ MUSCL-Hancock para diferentes valores do Nr. de Courant

4.5 – Aplicação do método das características sem procedimento de ajuste de choque

Os resultados da propagação das ondas de choque no canal utilizando-se o método das características sem o procedimento de ajuste de choque são apresentados nas Figuras 11.

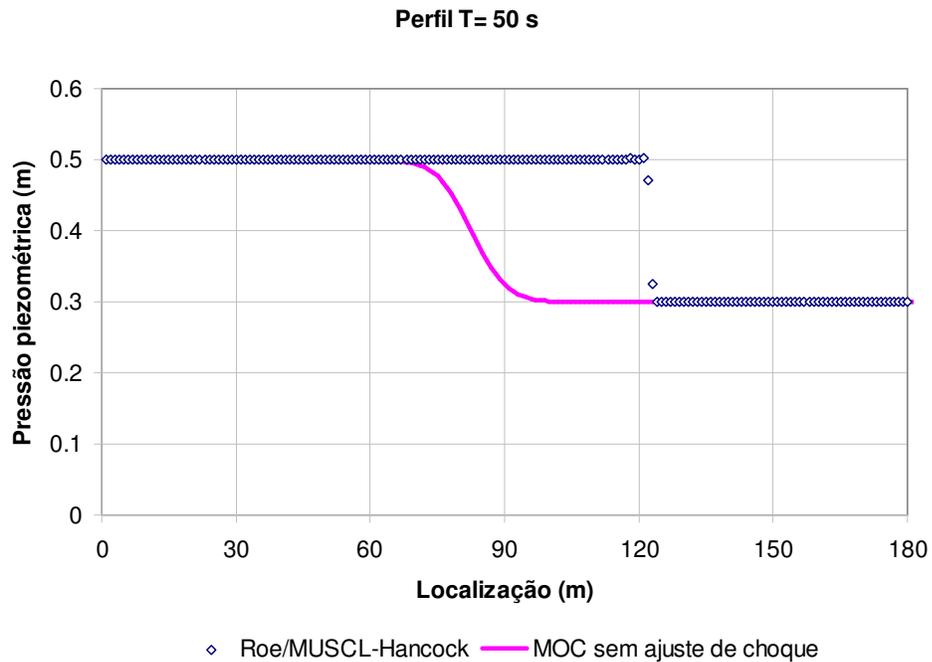


Figura 11: Comparação dos perfis das ondas de choque obtidos com o esquema Roe/ MUSCL-Hancock (Cr=1,0) e o Método das Características sem o ajuste de choque

Os resultados indicam claramente a limitação da aplicação do método das características sem o ajuste de choque para a descrição de um problema de propagação de ondas de choque. A difusão numérica é significativa, com a interface da onda de choque estendendo-se por 30 metros. Contudo, o problema mais grave nos resultados é a localização da onda de choque, cerca de 40% defasada do que seria o valor calculado analiticamente. Tal indica claramente um erro de continuidade no problema, que só poderia ser remediado com o tratamento apropriado do escoamento na região do choque.

5 – CONCLUSÕES

O problema da simulação numérica de ondas de choque é de grande relevância, contudo a complexidade das equações de Saint-Venant não permite a solução do problema de forma analítica, restando como alternativa as soluções numéricas. A grande variedade dos modelos computacionais hoje disponíveis para a solução dessas equações pode colocar o analista e engenheiro em dúvidas sobre qual o esquema numérico é mais apropriado para a solução do problema. Esse trabalho teve como objetivo comparar diferentes esquemas numéricos a um simples problema de propagação de ondas de choque de forma que seja possível avaliar o desempenho dos mesmos.

Pode-se perceber no trabalho a superioridade dos esquemas não lineares sobre os esquemas lineares. Embora conceitualmente mais simples de entender e implantar, tais esquemas mostram-se inadequados para o problema de simulação de ondas de choque em canais, tanto no caso do esquema de primeira ou segunda ordem. Tal resultado, previsto pelo teorema de Godunov, é uma das razões que motivam várias investigações e estudos vem sendo feitos no sentido de adaptar esquemas não lineares para o uso de problemas de escoamentos em Hidráulica.

De todos os esquemas testados, o que apresentou resultados mais adequados foi o esquema não linear de segunda ordem de Roe / MUSCL-Hancock, ficando o esquema não linear de Roe não muito atrás. Levando em consideração que o esquema de segunda ordem demanda um esforço computacional adicional ao esquema de Roe, cabe ao analista avaliar qual esquema atenderia as necessidades de precisão de cálculo com a necessária agilidade.

Finalmente esse trabalho demonstrou o risco de aplicar um modelo numérico de forma inapropriada para o cálculo de ondas de choque. O método das características, tão amplamente usado em uma variedade de escoamentos transientes, requer o uso do procedimento de ajuste de choque para poder simular um escoamento com descontinuidades de forma adequada. Sem esse procedimento, os erros na localização da onda de choque, a difusão numérica e erros de continuidade comprometem inteiramente os resultados da simulação.

BIBLIOGRAFIA

- CROSSLEY, A. J. (1999) “*Accurate and Efficient Numerical Solutions for the Saint-Venant Equations of Open Channel Flow*” – Ph.D. Thesis, University of Nottingham
- CUNGE, J. A., JR., F. M. H., E VERWEY, A. (1980). “*Practical Aspects of Computational River Hydraulics*”. Pitman Publishing Ltd., London, UK. ISBN: 0273084429
- FARLOW, S. J., (1993). “*Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*”. Dover, New York.
- GARCIA-NAVARRO, P. e SAVIRON, J. M. (1992). “*McCormack's method for the numerical solution of one-dimensional discontinuous unsteady open-channel flow*”. J. Hydr. Res. Vol. 30 No. 1, pp 95-105.
- GLAISTER, P. (1988). “*Approximate Riemann solutions of the shallow water equations*”. J. Hydr. Res., Vol 26 No 3, pp 293-306.
- GODUNOV, S. K., (1959). “*Finite difference method for numerical computation of discontinuous solution of the equations of fluid dynamics*”. Matematicheskii Sbornik Vol 47 No 3 , pp 271-306
- LAX, P. D. E WENDROFF B. (1960) “*Systems of Conservation Laws*”, Comm. Pure Appl. Math, Vol 13, pp 217-237
- LEVEQUE, R. J. (1992) “*Numerical Methods for Conservation Laws*”, Birkhauser, ETH Zurich
- MACCHIONE, F. E MORELLI, M. A. (2003). “*Practical aspects in comparing the shock-capturing schemes for dam break problems*” J. Hydr. Engrg., Vol 129, No 3 , pp 187–195.
- OTTO, A (2003) “*Methods of Numerical Simulation in Fluids and Plasmas*” – Acesso online em <http://what.gi.alaska.edu/ao>
- ROE, P. L. (1981). “*Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes*” J. Comp. Physics, Vol 43, pp 357-372.
- STURM T. W. (2001) “*Open Channel Hydraulics*” McGraw-Hill, ISBN: 0070624453, 512 pp.
- TORO, E. F. (2001). “*Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows*”. John Wiley and Sons, ISBN: 0471987662, 326 pp.
- TRAJKOVIC, B., IVETIC, M., CALOMINO, F., E DIPPOLITO, A. (1999). “*Investigation of transition from free surface to pressurized flow in a circular pipe*” Water Sci. and Tech., Vol 39, No 9 , pp 105-112.
- WIGGERT, D. C. (1972). “*Transient flow in free-surface, pressurized systems*”. J. Hydr. Div., Vol 98 No HY1 , pp 11-27.

Quadro 1 – Símbolos utilizados.

Símbolo	Significado	Dimensão
A	Área do escoamento	$[L^2]$
B	Largura da superfície livre de escoamento	$[L]$
c	Celeridade de propagação das ondas no escoamento	$[L]$
Cr	Número de Courant	$[1]$
Dx	Dimensão da discretização espacial adotada	$[L]$
Dt	Dimensão da discretização temporal adotada	$[T]$
$F(U)$	Vetor de Fluxos das Variáveis Conservadas (A, Q)	$[L^3 T^{-1}]$ e $[L^4 T^{-2}]$
G	Aceleração da gravidade	$[L T^{-2}]$
I	1º. momento de inércia da seção transversal de escoamento	$[L^3]$
$r^{(j)}$	Auto-vetores das variáveis conservadas (A, Q)	$[L^{-1}T]$ e $[1]$
S_o	Declividade do fundo do canal	$[1]$
S_f	Declividade da linha de energia do escoamento	$[1]$
$S(U)$	Vetor de termos fonte variáveis conservadas (A e Q)	$[1]$ e $[L^4 T^{-2}]$
U	Vetor de variáveis conservadas (A e Q)	$[L^2]$ e $[L^3 T^{-1}]$
V	Velocidade do escoamento	$[L T^{-1}]$
W	Velocidade de propagação da onda de choque	$[L T^{-1}]$
Y	Profundidade de escoamento	$[L]$
\bar{y}	Profundidade do centróide da seção de escoamento	$[L]$
$\lambda^{(j)}$	Auto-valores aproximados – Velocidade de propagação das ondas nas interfaces entre células computacionais	$[L T^{-1}]$