

MODELAGEM ESTOCÁSTICA DE VAZÕES SAZONAIS PARA SUB-BACIA DO RIO SÃO FRANCISCO

Antônio Sergio F. Mendonça¹ Adriana Padua Lovatte²; & Karina Luna Moura³

RESUMO

Geração de séries sintéticas pode ser importante para reprodução de períodos de secas e enchentes, quando séries históricas não são suficientemente longas para apresentarem períodos críticos. Modelos com parâmetros periódicos são largamente aceitos para modelagem de séries hidrológicas periódicas. O principal objetivo deste estudo foi aprimorar o conhecimento a respeito da utilização dos modelos estocásticos com parâmetros periódicos com a finalidade de gerar séries sintéticas hidrológicas. Foram estudados e aplicados vários modelos estocásticos periódicos das famílias PAR(p), PARMA (p,q) e PARMA Multiplicativo (p,q). Estes modelos foram ajustados à série histórica de dados fluviométricos obtidas na estação de Manga, localizada no Rio São Francisco, para o período entre 1936 a 1996. A partir do ajuste dos modelos às séries históricas, escolheram-se os mais adequados e foram gerados vários grupos de séries para verificação dos modelos, sendo desenvolvidos diversos testes estatísticos. A partir dos resultados obtidos pode-se concluir que para a série histórica estudada os modelos da família PARMA multiplicativos mantiveram a estrutura de autocorrelação anual e periódica enquanto os modelos periódicos não multiplicativos não preservaram a autocorrelação anual.

ABSTRACT

Synthetic time series modeling and generation are utilized mainly because historical series rarely present critical maximum and minimum flow periods. These models are largely accepted as good choices for reproducing floods and drought discharges. The main objective of the research was related with a better knowledge about the application of stochastic models presenting periodic parameters to seasonal hydrologic time series modeling. PAR(p), PARMA(p,q) and multiplicative PARMA families of models were studied and utilized to fit Manga (São Francisco river – 1936 through 1996), gauging station river section monthly flows. Fitted models were tested and compared. The best models were utilized for generation of synthetic time series. It was concluded that for studied historical series the models of family multiplicative PARMA preserved the structure of annual and periodic autocorrelation while not multiplicative periodic models did not reproduce the annual autocorrelation.

PALAVRAS-CHAVE: Modelagem estocástica, Vazões mensais.

INTRODUÇÃO

A análise das séries temporais tem sido muito utilizada para a geração de seqüências sintéticas. Como os registros históricos hidrológicos são quase sempre inferiores a 50 anos, recorre-se normalmente à técnica de geração de vazões sintéticas, pois esta emprega normalmente séries de vazões de grande extensões para permitir a estimativa confiável das características dos sistemas hídricos. Esta técnica não cria nenhuma informação além da já contida na série histórica, mas torna o emprego desta informação mais sistemático e eficiente.

As vazões são analisadas como variáveis aleatórias de um processo estocástico, pois a ocorrência de um determinado valor para a vazão em um determinado instante ou intervalo de tempo é função de valores de variáveis determinísticas e de variáveis aleatórias que influem no processo de geração de vazões, como armazenamento da água em lençóis subterrâneos, ocorrência de precipitações, teor de umidade da água no solo de superfície da bacia hidrográfica etc. Nos processos estocásticos, admite-se que a natureza gere vazões sujeitas a distribuição de probabilidades.

É bastante improvável a repetição da seqüência de vazões históricas e, conseqüentemente, de um período crítico, pois existe pouca informação sobre as possibilidades do comportamento futuro do sistema. Contudo, o período crítico é uma variável aleatória que possui características importantes, tais como, duração e forma como as vazões se sucedem. Por este motivo, nos estudos de simulação da operação de sistemas recorre-se ao seu valor histórico, colocando-o em um contexto probabilístico, ou seja, estimando a sua representatividade a partir das características estruturais das séries históricas.

Estudos anteriores desenvolvidos por Salas (1980), Vecchia (1983), Mendonça (1987), Anderson e Meerschaert (1998), indicam a grande importância da modelagem estocástica para estudos de previsão de disponibilidade hídrica futura. Este estudo teve como objetivo aprimorar o conhecimento a respeito da utilização dos modelos estocásticos com parâmetros periódicos com a finalidade de gerar séries sintéticas hidrológicas.

MODELOS ESTOCÁSTICOS

Diversos modelos estocásticos lineares são usados para séries temporais hidrológicas. Alguns destes modelos são usados para gerar seqüências sintéticas de dados, enquanto que outros são usados para previsões de dados um ou mais intervalos de tempo adiante. Ambas as aplicações são de considerável importância para o projeto e operação de sistemas de recursos hídricos. A série histórica representa uma realização do processo estocástico das vazões que pode não incluir todos

os períodos críticos de enchente e secas. É portanto, necessário gerar seqüências sintéticas que sejam suficientemente longas e que possam produzir estas condições críticas (Maidment, 1993).

Hidrologistas desenvolveram modelos estocásticos que preservam a média, a variância e a estrutura de autocorrelação da série histórica.

Uma justificativa para a preservação da média e da variância é o fato de que o projeto da capacidade de reservatórios pode ser estimado em função destas duas estatísticas. A justificativa para preservação da estrutura de autocorrelação é a reprodução das características de baixas e altas vazões (Salas, 1980).

Modelos Autorregressivos Periódicos – PAR(p)

Modelos autoregressivos com p parâmetros periódicos, PAR(p), são aqueles nos quais alguns ou todos os seus parâmetros variam dentro do ano.

Um modelo PAR(p) com média e variância periódicas e com coeficientes autoregressivos periódicos é representado por (Salas, 1980; Maidment, 1993; Righetto, 1998):

$$Y_{v,\gamma} = \mu_\gamma + \sigma_\gamma \cdot Z_{v,\gamma} \quad (1)$$

onde:

$$Z_{v,\gamma} = \sum_{j=1}^p \phi_{j,\gamma} \cdot Z_{v,\gamma-j} + \sigma_{\varepsilon\gamma} \xi_{v,\gamma} \quad (2)$$

e

$Y_{v,\gamma}$ é a variável dependente para o ano v e o período γ com $\gamma = 1, \dots, w$ e w é o número de períodos dentro do ano.

A variável $Y_{v,\gamma}$ é assumida com distribuição normal com média μ e variância σ_γ^2

$\phi_{j,\gamma}$ é o j -ésimo coeficiente periódico autoregressivo no período γ

$\sigma_{\varepsilon\gamma}$ é um coeficiente periódico

$\xi_{v,\gamma}$ é a variável normal padronizada

O conjunto de parâmetros do modelo é $\{\mu_\gamma, \sigma_\gamma^2, \phi_{1,\gamma}, \dots, \phi_{p,\gamma}, \sigma_{\varepsilon\gamma}^2; \gamma = 1, \dots, w\}$ que deve ser estimado a partir dos dados observados.

Os valores esperados e a variância das variáveis dependentes e independentes são dados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} E(y_{v,\gamma}) &= \mu_\gamma & , \gamma &= 1, \dots, w \\ E(z_{v,\gamma}) &= E(\xi_{v,\gamma}) = 0 & , \gamma &= 1, \dots, w \\ Var(y_{v,\gamma}) &= \sigma_\gamma^2 & , \gamma &= 1, \dots, w \\ Var(z_{v,\gamma}) &= Var(\xi_{v,\gamma}) = 1 & , \gamma &= 1, \dots, w \end{aligned}$$

A variância periódica $\sigma_{\varepsilon\gamma}^2$ pode ser escrita como uma função dos coeficientes de autorregressão periódicos $\phi_{j,\gamma}$ e dos coeficientes de autocorrelação periódicos $\rho_{j,\gamma}$ (Salas,1980), como:

$$\sigma_{\varepsilon\gamma}^2 = \sigma_{\gamma}^2 \left(1 - \sum_{j=1}^p \phi_{j,\gamma} \rho_{j,\gamma} \right) \quad (3)$$

onde:

$\phi_{j,\gamma}$ é o j-ésimo coeficiente de autorregressão do lag-j da variável Y_t do período γ .

Para o modelo PAR(1) a equação 3 pode ser simplificada para:

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = 1 - \phi_{1,\gamma} \rho_{1,\gamma} \quad (4)$$

Para o modelo PAR (2) a equação 3 torna-se:

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = 1 - \phi_{1,\gamma} \rho_{1,\gamma} - \phi_{2,\gamma} \rho_{2,\gamma} \quad (5)$$

Modelos Autorregressivos de Médias Móveis Periódicos – PARMA(p,q)

Os modelos autoregressivos de média móvel periódicos com parâmetros p e q, denominados PARMA(p,q), são mistos, compostos por termos de modelos autoregressivos e de termos de modelos de médias móveis. Possui grande flexibilidade para se ajustarem às séries hidrológicas de vazões (Salas et al., 1980; Murteira, 1993; Righetto, 1998), podendo ser representado por:

$$Y_{v,\gamma} = \mu_{\gamma} + \sigma_{\gamma} \cdot Z_{v,\gamma} \quad (6)$$

onde:

μ_{γ} e σ_{γ} são a média e o desvio padrão periódico.

$$Z_{v,\gamma} = \sum_{j=1}^p \phi_{j,\gamma} \cdot Z_{v,\gamma-j} - \sum_{i=1}^q \theta_{i,\gamma} \cdot \varepsilon_{v,\gamma-i} + \varepsilon_{v,\gamma} \quad (7)$$

onde:

$\phi_{j,\gamma}$: coeficientes periódicos autoregressivos

$\theta_{i,\gamma}$: coeficientes periódicos média móvel

$\varepsilon_{v,\gamma}$: variável aleatória normal e independente

Modelo Autorregressivo e de Média Móvel Multiplicativo – Multiplicativo PARMA (p,q)x(PQ)w

Modelos PARMA de ordem baixa preservam as características anuais periódicas para séries apresentando baixa dependência anual, mas, geralmente, não reproduzem autocorrelação anual para séries com alta dependência (Mendonça, 1987).

Mendonça(1987) desenvolveu um modelo PARMA multiplicativo, denominado PMIX, que, além de preservar as características sazonais, melhora a preservação de dependência anual.

A denominação PARMA multiplicativo vem do fato de que membros dessa nova classe apresentam parâmetros periódicos relacionando consecutivas estações em um mesmo ano, como os modelos PARMA fazem, e parâmetros periódicos relacionando estações para consecutivos anos, como uma generalização dos modelos multiplicativos Box-Jenkins, que apresentam parâmetros constantes relacionando as mesmas estações.

A justificativa está no fato de que para dados mensais há dois intervalos de grande importância que são o mês e o ano (Box-Jenkins,1976). Espera-se daí que haja duas importantes relações: uma entre dados para sucessivos meses de um ano e outra entre dados de um mês de consecutivos anos.

O modelo foi derivado de um modelo multiplicativo ARIMA(p,d,q)x(P,D,Q)_w

$$\left[1 - \phi_{1,\gamma} B - \phi_{2,\gamma} B^2 - \dots - \phi_{p,\gamma} B^p\right] \left[1 - \Phi_{1,\gamma} B^w - \Phi_{2,\gamma} B^{2w} - \dots - \Phi_{p,\gamma} B^{Pw}\right] Y_{v,\gamma} = \left[1 - \theta_{1,\gamma} B - \theta_{2,\gamma} B^2 - \dots - \theta_{q,\gamma} B^q\right] \left[1 - \Theta_{1,\gamma} B^w - \Theta_{2,\gamma} B^{2w} - \dots - \Theta_{Q,\gamma} B^{Qw}\right] \varepsilon_{v,\gamma} \quad (8)$$

onde: $Y_{v,\gamma} = Z_{v,\gamma} - \mu_\gamma$

$Z_{v,\gamma}$ representa a série histórica e μ_γ representa a média sazonal de $Z_{v,\gamma}$.

$$B(Y_{v,\gamma}) = Y_{v,\gamma-1},$$

$$B(\varepsilon_{v,\gamma}) = \varepsilon_{v,\gamma-1},$$

$$B^w(Y_{v,\gamma}) = Y_{v-1,\gamma},$$

$$B^w(\varepsilon_{v,\gamma}) = \varepsilon_{v-1,\gamma},$$

$$B^p(Y_{v,\gamma}) = Y_{v,\gamma-p},$$

$$B^q(\varepsilon_{v,\gamma}) = \varepsilon_{v,\gamma-q},$$

$$B^{Pw}(Y_{v,\gamma}) = Y_{v-P,\gamma} \quad e$$

$$B^{Qw}(\varepsilon_{v,\gamma}) = \varepsilon_{v-Q,\gamma}$$

A expressão 8 representa o modelo geral PARMA multiplicativo (p,q)x(P,Q)_w ou PMIX(p,q,P,Q), onde:

$\varepsilon_{v,\gamma}$ são resíduos com valor esperado zero e w é o número de estações.

O modelo médias móveis autorregressivo periódico multiplicativo, denominado PARMA multiplicativo, de ordem (p,q)x(P,Q)_w, pode ser explicitado como segue:

$$\begin{aligned}
Y_{v,\gamma} = & \phi_{1,\gamma} Y_{v,\gamma-1} + \phi_{2,\gamma} Y_{v,\gamma-2} + \dots + \phi_p Y_{v,\gamma-p} \\
& + \Phi_{1,\gamma} Y_{v-1,\gamma} + \Phi_{2,\gamma} Y_{v-2,\gamma} + \dots + \Phi_{P,\gamma} Y_{v-P,\gamma} \\
& - \phi_{1,\gamma} \Phi_{1,\gamma} Y_{v-1,\gamma-1} - \phi_{1,\gamma} \Phi_{2,\gamma} Y_{v-2,\gamma-1} - \dots \\
& - \phi_{1,\gamma} \Phi_{P,\gamma} Y_{v-P,\gamma-1} - \dots - \phi_{P,\gamma} \Phi_{1,\gamma} Y_{v-1,\gamma-P} \\
& - \phi_{P,\gamma} \Phi_{2,\gamma} Y_{v-2,\gamma-P} - \dots - \phi_{P,\gamma} \Phi_{P,\gamma} Y_{v-P,\gamma-P} \\
& + \varepsilon_{v,\gamma} \\
& - \theta_{1,\gamma} \varepsilon_{v,\gamma-1} - \theta_{2,\gamma} \varepsilon_{v,\gamma-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{v,\gamma-q} \\
& - \Theta_{1,\gamma} \varepsilon_{v-1,\gamma} - \Theta_{2,\gamma} \varepsilon_{v-2,\gamma} - \dots - \Theta_{P,\gamma} \varepsilon_{v-P,\gamma} \\
& + \theta_{1,\gamma} \Theta_{1,\gamma} \varepsilon_{v-1,\gamma-1} + \theta_{1,\gamma} \Theta_{2,\gamma} \varepsilon_{v-2,\gamma-1} + \dots \\
& + \theta_{1,\gamma} \Theta_{Q,\gamma} \varepsilon_{v-Q,\gamma-1} + \dots + \theta_{q,\gamma} \Theta_{1,\gamma} \beta \varepsilon_{v-1,\gamma-q} \\
& - \theta_{q,\gamma} \Theta_{2,\gamma} \varepsilon_{v-2,\gamma-q} - \dots - \theta_{q,\gamma} \Theta_{Q,\gamma} \varepsilon_{v-Q,\gamma-q}
\end{aligned} \tag{9}$$

Onde os parâmetros $\phi_{1,\gamma}'S$, $\phi_{2,\gamma}'S$ e $\phi_{p,\gamma}'S$ são os coeficientes autoregressivos periódicos de lag 1, lag 2, ...,lag p, respectivamente, e $\Phi_{1,\gamma}'S$, $\Phi_{2,\gamma}'S$ e $\Phi_{P,\gamma}'S$ são os coeficientes autoregressivos periódicos de lag w, lag 2w, ...,lag Pw.

Os parâmetros $\theta_{1,\gamma}'S$, $\theta_{2,\gamma}'S$ e $\theta_{q,\gamma}'S$ são os coeficientes médias móveis para os lag 1, lag 2, ...,lag q, respectivamente, enquanto $\Theta_{1,\gamma}'S$, $\Theta_{2,\gamma}'S$ e $\Theta_{Q,\gamma}'S$ são os coeficientes médias móveis de lag w, lag 2w, ...,lag Qw.

$Y_{v,\gamma}$ e $\varepsilon_{v,\gamma}$ apresentam média zero e variâncias $\sigma_\gamma^2(Y)$ e $\sigma_\gamma^2(\varepsilon)$.

Um modelo simples, PMIX(1,1,1,1) é um PARMA multiplicativo (p,q)x(P,Q)_w, assumindo p = q = P = Q = 1, escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
Y_{v,\gamma} = & \phi_{1,\gamma} Y_{v,\gamma-1} + \Phi_{1,\gamma} Y_{v-1,\gamma} - \phi_{1,\gamma} \Phi_{1,\gamma} Y_{v-1,\gamma-1} + \varepsilon_{v,\gamma} \\
& - \theta_{1,\gamma} \varepsilon_{v,\gamma-1} - \Theta_{1,\gamma} \varepsilon_{v-1,\gamma} + \theta_{1,\gamma} \Theta_{1,\gamma} \varepsilon_{v-1,\gamma-1}
\end{aligned} \tag{10}$$

A variável $Y_{v,\gamma}$ apresenta média sazonal zero. O PMIX(1,1,1,1) apresenta um conjunto de parâmetros $\{\phi_{1,\gamma}, \Phi_{1,\gamma}, \theta_{1,\gamma}, \Theta_{1,\gamma}, \sigma_\gamma^2(\varepsilon), \gamma=1, \dots, w\}$ que podem ser estimados dos dados.

A expressão para a variância sazonal de $Y_{v,\gamma}$ para o modelo PARMA multiplicativo (1,1)x(1,1)_w, que é o mais simples modelo apresentando todos os parâmetros $\phi's, \Phi's, \theta's, \Theta's$ pode ser obtida multiplicando todos os termos da expressão 2.47 por $Y_{v,\gamma}$:

$$\begin{aligned}
Y_{v,\gamma} Y_{v,\gamma} = & \phi_{1,\gamma} Y_{v,\gamma-1} Y_{v,\gamma} + \Phi_{1,\gamma} Y_{v-1,\gamma} Y_{v,\gamma} - \phi_{1,\gamma} \Phi_{1,\gamma} Y_{v-1,\gamma-1} Y_{v,\gamma} + \varepsilon_{v,\gamma} Y_{v,\gamma} \\
& - \theta_{1,\gamma} \varepsilon_{v,\gamma-1} Y_{v,\gamma} - \Theta_{1,\gamma} \varepsilon_{v-1,\gamma} Y_{v,\gamma} + \theta_{1,\gamma} \Theta_{1,\gamma} \varepsilon_{v-1,\gamma-1} Y_{v,\gamma}
\end{aligned} \tag{11}$$

Substituindo a equação 10 na equação 11 e tomando os valores esperados resulta a seguinte expressão para a variância do modelo PARMA multiplicativo (1,1)x(1,1)_w:

$$\begin{aligned}
& \sigma_{\gamma}^2(Y) [1 - \Phi_{1,\gamma}^2 - \Theta_{1,\gamma}^2] \\
& - \sigma_{\gamma-1}^2(Y) [\phi_{1,\gamma}^2 + \phi_{1,\gamma}^2 \Phi_{1,\gamma}^2 + \theta_{1,\gamma}^2 + \theta_{1,\gamma}^2 \Theta_{1,\gamma}^2] = \\
& \sigma_{\gamma}^2(\varepsilon) [1 - 2\phi_{1,\gamma} \Theta_{1,\gamma}] \\
& - 2\sigma_{\gamma-1}^2(\varepsilon) [\phi_{1,\gamma} \theta_{1,\gamma} + \phi_{1,\gamma} \Phi_{1,\gamma} \theta_{1,\gamma} \Theta_{1,\gamma}] \\
& + \sigma_{\gamma-1}^2(\varepsilon) [\phi_{1,\gamma} \theta_{1,\gamma} \Theta_{1,\gamma} [\phi_{1,\gamma} + \Phi_{1,\gamma}]] \\
& + 2\phi_{1,\gamma} \Phi_{1,\gamma} r_{w-1,\gamma-1} - 2\phi_{1,\gamma}^2 \Phi_{1,\gamma} r_{w,\gamma-1} - 2\phi_{1,\gamma} \Phi_{1,\gamma}^2 r_{1,\gamma} \\
& - 2\phi_{1,\gamma} \Theta_{1,\gamma} E(\varepsilon_{v-1,\gamma} Y_{v,\gamma-1}) + 2\phi_{1,\gamma} \theta_{1,\gamma} \Theta_{1,\gamma} E(\varepsilon_{v-1,\gamma-1} Y_{v,\gamma-1}).
\end{aligned} \tag{12}$$

$r_{v,\gamma}$ representa as estimativas de autocorrelações sazonais e E representa o valor esperado.

Casos particulares

O modelo geral PARMA multiplicativo apresenta grande número de parâmetros se as ordem dos parâmetros p, q, P e Q forem maior que 1.

O número total de parâmetros pode ser calculado por:

$$NP = (p + q + P + Q + 1) w$$

Para aplicações práticas é necessário fazer suposições que reduzam o número de parâmetros do modelo, conservando as mais importantes relações incorporadas no modelo. Razoáveis suposições para relações com seqüências hidrológicas são:

1. Os parâmetros mais importantes são aqueles relacionando valores para duas estações consecutivas em um mesmo ano (lag 1) e aqueles relacionando valores para a mesma estação em anos consecutivos (lag w) (Box e Jenkins, 1976)

2. Se, junto com os parâmetros anteriores, outros são levados em consideração, esses devem ser inicialmente os parâmetros relacionados com autoregressão entre dados para diferentes lags (em ordem crescente), das estações no mesmo ano.

3. Outro fator que influencia a escolha do caso particular é que o grande número de parâmetros dificulta o procedimento de estimação.

METODOLOGIA

Dentre os modelos pertencentes às famílias PAR(p), PARMA(p, q) e PMIX(p, q) escolheu-se aqueles que apresentassem menor números de parâmetros.

Foram ajustados os modelos PAR(1), PAR(2), PARMA(1,1), PMIX(1,0,0,0), PMIX(1,1,0,0), PMIX(1,0,1,0), PMIX(1,1,1,0), PMIX(1,1,1,1), PMIX(2,0,0,0), PMIX(2,0,1,0), PMIX(2,1,0,0), PMIX(2,1,1,0) e PMIX(2,1,1,1).

Na modelagem foi utilizada a série temporal de descargas líquidas médias mensais do Rio São Francisco, estação Manga, 44500000, para os períodos de janeiro de 1936 a dezembro de 1996.

Através dos gráficos das vazões médias mensais e desvios padrões mensais para o posto do Rio São Francisco para os períodos de janeiro de 1936 a dezembro de 1996 (Figuras 1 e 2) observa-se que esta não é estacionária, existindo periodicidade.

mês	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
média	4085,0	3887,7	3364,4	2524,1	1487,7	1159,8	990,3	848,3	790,4	1003,9	1857,5	3233,6

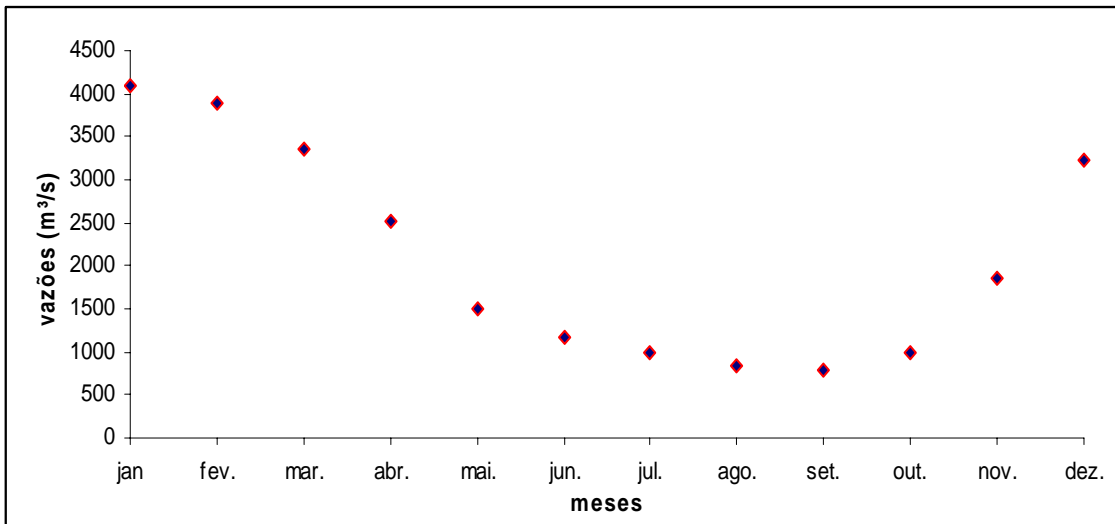


Figura 1 – Vazões médias mensais do Rio São Francisco, na estação Manga, considerando a série histórica de 1936 a 1996.

mês	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
desvio	1698,0	2159,9	1559,2	1308,1	598,86	412,4	357,3	313,1	299,2	362,7	811,2	1338,8

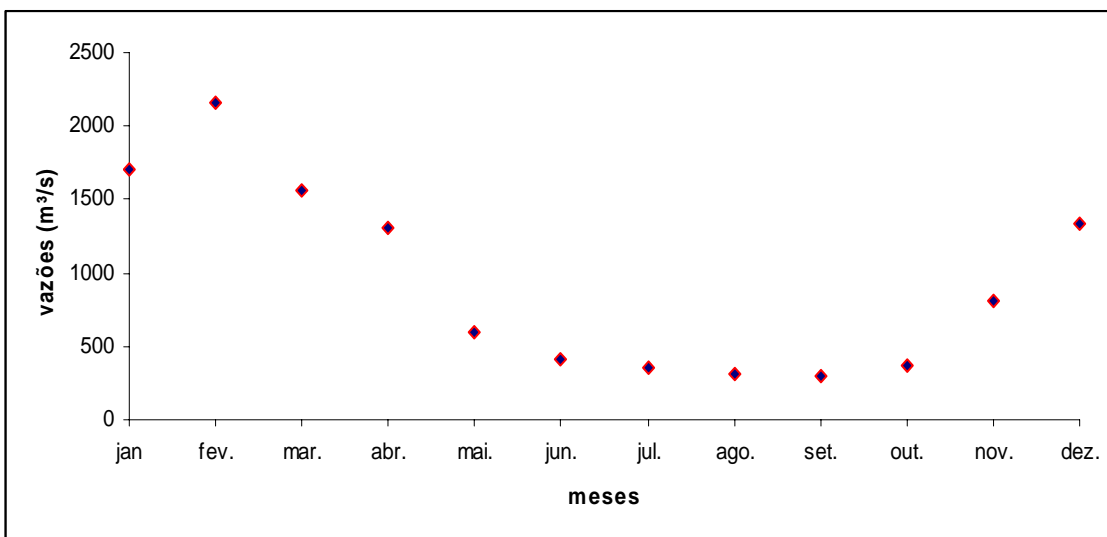


Figura 2 – Desvios padrões mensais do Rio São Francisco, na estação Manga, considerando a série histórica de 1936 a 1996.

Para aplicação dos modelos com parâmetros periódicos à série procurou-se verificar se a série apresentava distribuição normal conforme Salas et al., (1980), Maidment et al. (1993) e Anderson et al.(1999).

Utilizou-se também testes de verificação de normalidade de séries, que utilizam o coeficiente de assimetria. Verificou-se que o coeficiente de assimetria da série histórica estava dentro de

intervalo definido a partir do tamanho da série e do nível de confiança, conforme sugerido por Salas et al. (1980).

Através do programa adaptado estimou-se para os modelos ajustados as suas variâncias, as médias, os desvios padrões, os coeficientes de assimetria, os coeficientes de autocorrelação periódicos. Os parâmetros foram estimados utilizando o algoritmo de Powell que usa um método de otimização não linear e trabalha com interações, isto é, entra-se inicialmente com um vetor cujos valores são interagidos e recebem novos valores. O algoritmo é aplicado até que sejam obtidos resultados mais precisos. Estes valores do vetor são então repassados para os parâmetros sazonais.

A validade do modelo escolhido envolve o exame da independência dos seus resíduos. Para checar a validade do modelo utilizou-se o teste de Anderson e os testes de Portmanteau.

Dentre os modelos válidos usou-se os critérios de seleção AIC e BIC para selecionar o modelo mais adequado.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Pelo teste da normalidade verificou-se que a série histórica de vazões mensais do Rio São Francisco assume a distribuição normal após sofrer uma transformação logarítmica.

Para obtenção dos valores ótimos para o vetor inicial utilizado nos cálculos dos parâmetros dos modelos PMIX, o algoritmo de Powell foi aplicado iterativamente para a série histórica em estudo. A cada aplicação do algoritmo de Powell eram feitas 400 iterações e analisou-se a média dos resíduos, os coeficientes de assimetria e os testes de Portmanteau apresentados na Tabela 1. Nota-se que a média dos resíduos está entre 0,06 e 0,07, os coeficientes de assimetria são bem próximos de $-0,320$ e as estatísticas Q_1 e Q_2 do teste de Portmanteau estão abaixo da estatística do qui-quadrado tabulado para o teste correspondente. Com base nas informações anteriores decidiu-se tomar como valores do vetor inicial para os modelos PMIX(1,Q,p,q) os dados da quarta aplicação do algoritmo de Powell.

Para os modelos ajustados foram estimados os parâmetros sazonais, suas variâncias, as médias, os desvios padrões dos resíduos, os coeficientes de assimetria e os coeficientes de autocorrelação periódicos.

A verificação da validade do modelo escolhido envolve o exame da independência dos seus resíduos. Para teste da validade do modelo foi considerada a modelagem de séries temporais como um procedimento para transformar os dados observados dentro de séries de resíduos puramente independentes.

Tabela 1 - Estatísticas para os valores do vetor inicial do algoritmo de Powell.

1ª Aplicação									
Teste de Portmanteau									
Média dos resíduos	Coeficiente de assimetria.	Graus de Liberdade Q ₁	Qui-quadrado Q ₁	Q ₁	Graus de Liberdade Q ₂ , Q ₃ e Q ₄	Qui-quadrado Q ₂ , Q ₃ e Q ₄	Q ₂	Q ₃	Q ₄
0,06	-0,324	159	189,141	195,326	156	185,863	195,161	234,735	218,768
2ª Aplicação									
Teste de Portmanteau									
Média dos resíduos	Coeficiente de assimetria.	Graus de Liberdade Q ₁	Qui-quadrado Q ₁	Q ₁	Graus de Liberdade Q ₂ , Q ₃ e Q ₄	Qui-quadrado Q ₂ , Q ₃ e Q ₄	Q ₂	Q ₃	Q ₄
0,06	-0,305	159	189,141	192,950	156	185,863	179,501	216,411	203,107
3ª Aplicação									
Teste de Portmanteau									
Média dos resíduos	Coeficiente de assimetria.	Graus de Liberdade Q ₁	Qui-quadrado Q ₁	Q ₁	Graus de Liberdade Q ₂ , Q ₃ e Q ₄	Qui-quadrado Q ₂ , Q ₃ e Q ₄	Q ₂	Q ₃	Q ₄
0,07	-0,320	159	189,141	185,409	156	185,863	177,399	213,975	201,006
4ª Aplicação									
Teste de Portmanteau									
Média dos resíduos	Coeficiente de assimetria.	Graus de Liberdade Q ₁	Qui-quadrado Q ₁	Q ₁	Graus de Liberdade Q ₂ , Q ₃ e Q ₄	Qui-quadrado Q ₂ , Q ₃ e Q ₄	Q ₂	Q ₃	Q ₄
0,07	-0,321	159	189,141	185,922	156	185,863	177,152	213,711	200,759

Na Tabela 2 são apresentados os coeficientes de correlação periódicos correspondentes ao “lag 1” estimados para a série histórica.

Tabela 2 – Coeficientes de autocorrelação periódicos “Lag 1”.

MODELOS							
PAR (1)				PAR (2)			
Meses	L.inf..	Corr.l.	L.sup. sup.	Meses	L.inf..	Corr.l.	L.sup. sup.
Jan	-0,253	0,060	0,253	Jan	-0,253	0,031	0,253
Fev	-0,251	0,103	0,251	Fev	-0,251	-0,009	0,251
Mar	-0,251	-0,141	0,251	Mar	-0,251	-0,021	0,251
Abr	-0,251	-0,079	0,251	Abr	-0,251	-0,018	0,251
Mai	-0,251	-0,255	0,251	Mai	-0,251	-0,055	0,251
Jun	-0,251	0,265	0,251	Jun	-0,251	0,009	0,251
Jul	-0,251	0,266	0,251	Jul	-0,251	0,005	0,251
Ago	-0,251	0,211	0,251	Ago	-0,251	-0,103	0,251
Set	-0,251	0,184	0,251	Set	-0,251	-0,096	0,251
Out	-0,251	0,104	0,251	Out	-0,251	-0,008	0,251
Nov	-0,251	0,172	0,251	Nov	-0,251	0,007	0,251
Dez	-0,251	0,118	0,251	Dez	-0,251	0,002	0,251

MODELOS							
PARMA (1,1)				PMIX (1,0,0,0)			
Meses	L.inf..	Corr.	L.sup. sup.	Meses	L.inf..	Corr.	L.sup. sup.
Jan	-0,253	0,020	0,253	Jan	-0,253	0,056	0,253
Fev	-0,251	-0,009	0,251	Fev	-0,251	0,078	0,251
Mar	-0,251	-0,006	0,251	Mar	-0,251	-0,157	0,251
Abr	-0,251	-0,004	0,251	Abr	-0,251	-0,096	0,251
Mai	-0,251	-0,050	0,251	Mai	-0,251	-0,298	0,251
Jun	-0,251	-0,022	0,251	Jun	-0,251	0,264	0,251
Jul	-0,251	-0,063	0,251	Jul	-0,251	0,249	0,251
Ago	-0,251	-0,131	0,251	Ago	-0,251	0,194	0,251
Set	-0,251	-0,098	0,251	Set	-0,251	0,180	0,251
Out	-0,251	-0,016	0,251	Out	-0,251	0,143	0,251
Nov	-0,251	0,006	0,251	Nov	-0,251	0,169	0,251
Dez	-0,251	-0,024	0,251	Dez	-0,251	0,134	0,251

MODELOS							
PMIX (1,0,1,0)				PMIX (1,1,0,0)			
Meses	L.inf..	Corr.	L.sup. sup.	Meses	L.inf..	Corr.	L.sup. sup.
Jan	-0,253	0,154	0,253	Jan	-0,253	0,142	0,253
Fev	-0,251	-0,027	0,251	Fev	-0,251	-0,018	0,251
Mar	-0,251	-0,237	0,251	Mar	-0,251	-0,011	0,251
Abr	-0,251	-0,017	0,251	Abr	-0,251	0,230	0,251
Mai	-0,251	-0,328	0,251	Mai	-0,251	-0,013	0,251
Jun	-0,251	0,288	0,251	Jun	-0,251	0,075	0,251
Jul	-0,251	0,165	0,251	Jul	-0,251	-0,127	0,251
Ago	-0,251	0,140	0,251	Ago	-0,251	0,147	0,251
Set	-0,251	0,077	0,251	Set	-0,251	-0,003	0,251
Out	-0,251	0,109	0,251	Out	-0,251	-0,063	0,251
Nov	-0,251	0,240	0,251	Nov	-0,251	0,008	0,251
Dez	-0,251	0,238	0,251	Dez	-0,251	-0,010	0,251

MODELOS

PMIX (1,1,1,0)				PMIX (1,1,1,1)			
Meses	L.inf..	Corr.l.	L.sup. sup.	Meses	L.inf..	Corr.l.	L.sup. sup.
Jan	-0,253	0,112	0,253	Jan	-0,253	-0,007	0,253
Fev	-0,251	-0,069	0,251	Fev	-0,251	-0,001	0,251
Mar	-0,251	-0,053	0,251	Mar	-0,251	-0,012	0,251
Abr	-0,251	0,230	0,251	Abr	-0,251	0,049	0,251
Mai	-0,251	-0,240	0,251	Mai	-0,251	-0,047	0,251
Jun	-0,251	0,279	0,251	Jun	-0,251	0,007	0,251
Jul	-0,251	-0,012	0,251	Jul	-0,251	-0,010	0,251
Ago	-0,251	0,156	0,251	Ago	-0,251	-0,008	0,251
Set	-0,251	0,146	0,251	Set	-0,251	-0,204	0,251
Out	-0,251	-0,058	0,251	Out	-0,251	-0,099	0,251
Nov	-0,251	0,104	0,251	Nov	-0,251	0,022	0,251
Dez	-0,251	0,101	0,251	Dez	-0,251	0,007	0,251

MODELOS

PMIX (2,0,0,0)				PMIX (2,0,1,0)			
Meses	L.inf..	Corr.	L.sup. sup.	Meses	L.inf..	Corr.	L.sup. sup.
Jan	-0,253	0,022	0,253	Jan	-0,253	0,111	0,253
Fev	-0,251	-0,134	0,251	Fev	-0,251	-0,204	0,251
Mar	-0,251	-0,173	0,251	Mar	-0,251	-0,247	0,251
Abr	-0,251	-0,067	0,251	Abr	-0,251	0,031	0,251
Mai	-0,251	-0,619	0,251	Mai	-0,251	-0,663	0,251
Jun	-0,251	0,080	0,251	Jun	-0,251	0,090	0,251
Jul	-0,251	0,245	0,251	Jul	-0,251	0,194	0,251
Ago	-0,251	-0,093	0,251	Ago	-0,251	-0,146	0,251
Set	-0,251	-0,314	0,251	Set	-0,251	-0,299	0,251
Out	-0,251	0,139	0,251	Out	-0,251	0,097	0,251
Nov	-0,251	0,106	0,251	Nov	-0,251	0,170	0,251
Dez	-0,251	0,100	0,251	Dez	-0,251	0,203	0,251

MODELOS

PMIX (2,1,0,0)				PMIX (2,1,1,0)			
Meses	L.inf..	Corr.	L.sup. sup.	Meses	L.inf..	Corr.	L.sup. sup.
Jan	-0,253	0,016	0,253	Jan	-0,253	-0,028	0,253
Fev	-0,251	-0,007	0,251	Fev	-0,251	-0,109	0,251
Mar	-0,251	-0,011	0,251	Mar	-0,251	-0,122	0,251
Abr	-0,251	0,060	0,251	Abr	-0,251	0,150	0,251
Mai	-0,251	-0,001	0,251	Mai	-0,251	-0,534	0,251
Jun	-0,251	0,021	0,251	Jun	-0,251	0,198	0,251
Jul	-0,251	-0,085	0,251	Jul	-0,251	-0,079	0,251
Ago	-0,251	-0,024	0,251	Ago	-0,251	0,058	0,251
Set	-0,251	-0,110	0,251	Set	-0,251	-0,176	0,251
Out	-0,251	-0,062	0,251	Out	-0,251	-0,027	0,251
Nov	-0,251	0,015	0,251	Nov	-0,251	0,082	0,251
Dez	-0,251	0,004	0,251	Dez	-0,251	0,092	0,251

MODELOS			
PMIX(2,1,1,1)			
Meses	L.inf..	Corr.l.	L.sup. sup.
Jan	-0,253	0,009	0,253
Fev	-0,251	-0,012	0,251
Mar	-0,251	0,000	0,251
Abr	-0,251	0,065	0,251
Mai	-0,251	-0,001	0,251
Jun	-0,251	0,008	0,251
Jul	-0,251	-0,084	0,251
Ago	-0,251	-0,040	0,251
Set	-0,251	-0,161	0,251
Out	-0,251	-0,060	0,251
Nov	-0,251	0,006	0,251
Dez	-0,251	0,012	0,251

Na Tabela 3 são apresentados os valores limites das estatísticas qui-quadrado, das estatísticas Q_1 , Q_2 , Q_3 , Q_4 , correspondentes ao teste de Portmanteau, e das estatísticas AIC e BIC calculadas a partir dos resíduos dos modelos ajustados referentes à série histórica.

Tabela 3 – Testes de Portmanteau.

PARÂMETROS COMPARADOS	MODELOS			
	PAR(1)	PAR(2)	PARMA(1,1)	PMIX(1,0,0,0)
Graus de liberdade - Q_1	171	159	159	171
Qui-quadrado limite - Q_1	202,230	189,141	189,141	202,230
Q_1	325,198	179,258	259,209	310,214
Graus de liberdade - Q_2, Q_3 e Q_4	171	159	159	171
Qui-quadrado limite - Q_2, Q_3 e Q_4	202,230	189,141	189,141	202,230
Q_2 (MCLEOD)	368,353	277,664	286,829	366,885
Q_3 (DELLEUR)	308,207	229,451	237,571	307,887
Q_4 (THOMPSTONE)	331,814	253,058	261,177	331,493
CRITÉRIO DE INFORMAÇÃO				
Akaike	-811,304	9999,000	9999,000	-748,773
Bayesian	-645,856	31,799	-143,193	-417,876
PARÂMETROS COMPARADOS	MODELOS			
	PMIX(1,0,1,0)	PMIX(1,1,0,0)	PMIX(1,1,1,0)	PMIX(1,1,1,1)
Graus de liberdade - Q_1	159	159	147	135
Qui-quadrado limite - Q_1	189,141	189,141	176,001	162,838
Q_1	234,245	253,675	218,687	185,854
Graus de liberdade - Q_2, Q_3 e Q_4	159	159	147	135
Qui-quadrado limite - Q_2, Q_3 e Q_4	189,141	189,141	176,001	162,838
Q_2 (MCLEOD)	314,465	346,360	271,043	210,797
Q_3 (DELLEUR)	266,221	289,134	225,527	172,125
Q_4 (THOMPSTONE)	289,827	312,741	249,134	195,732
CRITÉRIO DE INFORMAÇÃO				
Akaike	-771,405	-737,874	-774,489	-861,385
Bayesian	-440,509	-406,978	-443,593	-530,489

PARÂMETROS COMPARADOS	MODELOS				
	PMIX(2,0,0,0)	PMIX(2,0,1,0)	PMIX(2,1,0,0)	PMIX(2,1,1,0)	PMIX(2,1,1,1)
Graus de liberdade - Q_1	159	147	147	135	123
Qui-quadrado limite - Q_1	189,141	176,001	176,001	162,838	149,656
Q_1	260,362	219,780	256,261	213,420	187,312
Graus de liberdade - Q_2, Q_3 e Q_4	159	147	147	135	123
Qui-quadrado limite - Q_2, Q_3 e Q_4	189,141	176,001	176,001	162,838	149,656
Q_2 (MCLEOD)	303,328	300,710	246,768	239,816	184,355
Q_3 (DELLEUR)	255,703	255,287	199,052	194,166	148,250
Q_4 (THOMPSTONE)	279,310	278,893	222,658	217,772	173,857
CRITÉRIO DE INFORMAÇÃO					
Akaike	-751,511	-768,939	-803,872	-795,9703	-892,6924
Bayesian	-420,615	-438,043	-472,976	-465,0741	-561,7963

O modelo que apresentou melhor desempenho nos testes para a série histórica do Rio São Francisco foi o PAR(2). Este modelo foi usado para gerar as séries sintéticas. Foram gerados grupos de 10 séries de 50 anos, 100 anos e 1.000 anos, cada. Os parâmetros destas séries foram comparados com o da séries histórica. Pode-se verificar através dos gráficos que quanto maior for a série gerada mais os parâmetros estatísticos se aproximam daqueles da série histórica.

Para comparação entre as classes dos modelos periódicos multiplicativos e não multiplicativos, tomou-se, o melhor modelo em outra classe diferente do modelo selecionado, mesmo que este não tenha satisfeito aos testes de Portmanteau, gerando-se para este modelo grupos de séries semelhantes às geradas para o modelo selecionado. O modelo periódico de melhor ajuste da classe diferente ao modelo selecionado foi o PMIX(2,1,1,1).

Nas Figuras 3 e 4 são comparadas as vazões médias da série histórica com as correspondentes às séries geradas com o uso dos modelos PAR(2) e PMIX(2,1,1,1). O modelo PAR(2) reproduziu melhor as vazões médias para o Rio São Francisco em Manga.

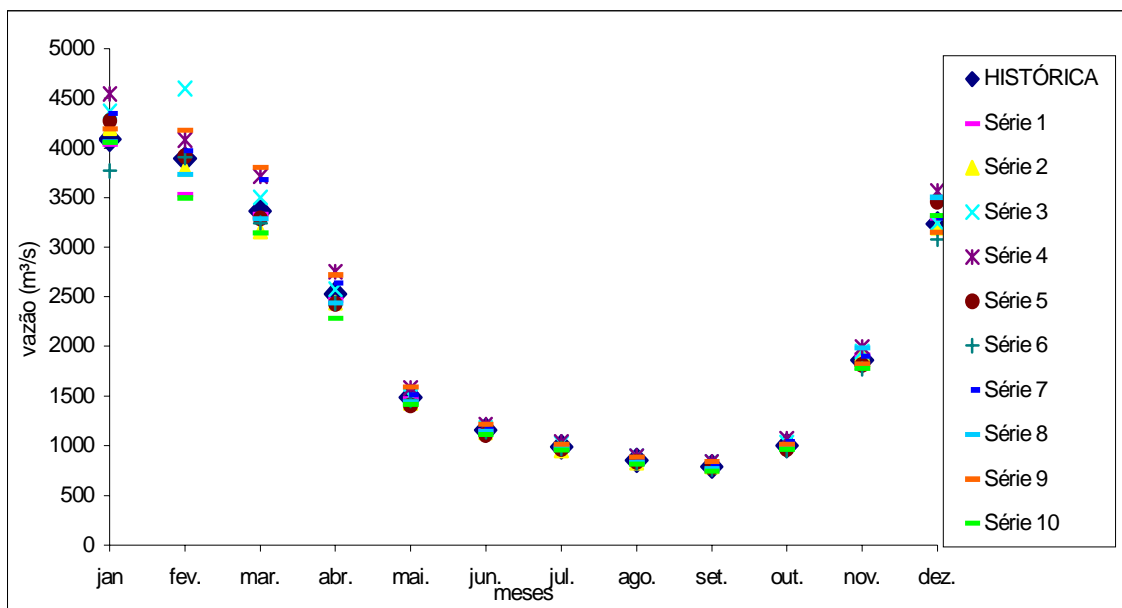


Figura 3 – Vazões médias mensais do grupo de séries com 100 anos – Modelo PAR (2).

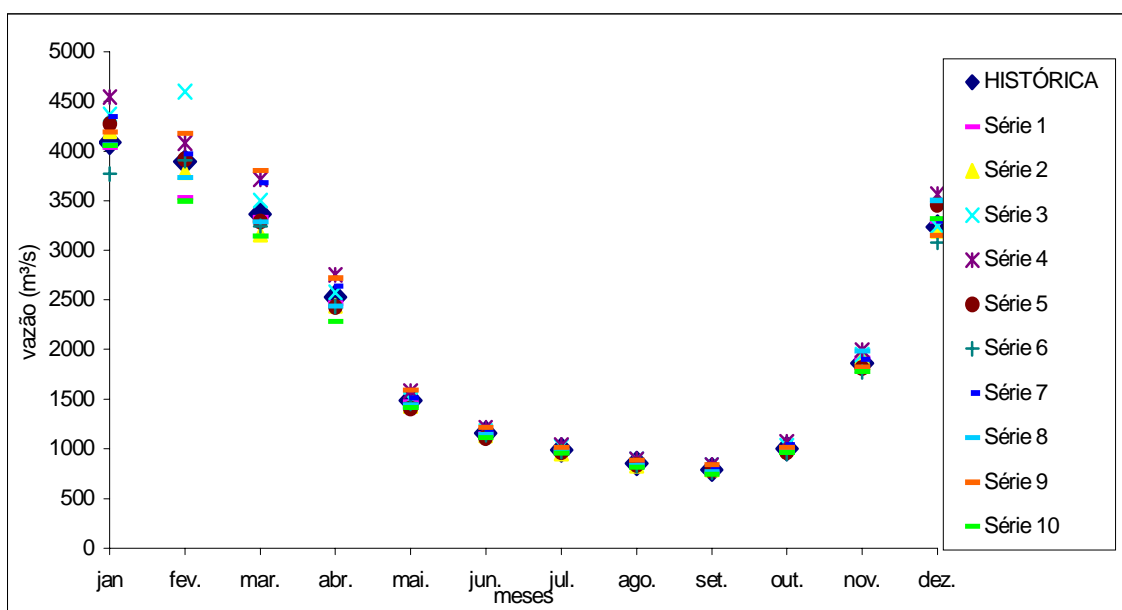


Figura 4 – Vazões médias mensais do grupo de séries com 100 anos – Modelo PAR (2,1,1,1).

Nas Figuras 5 e 6 são apresentados os desvios padrões mensais obtidos para as séries geradas através dos modelos PAR (2) e PMIX(2,1,1,1).

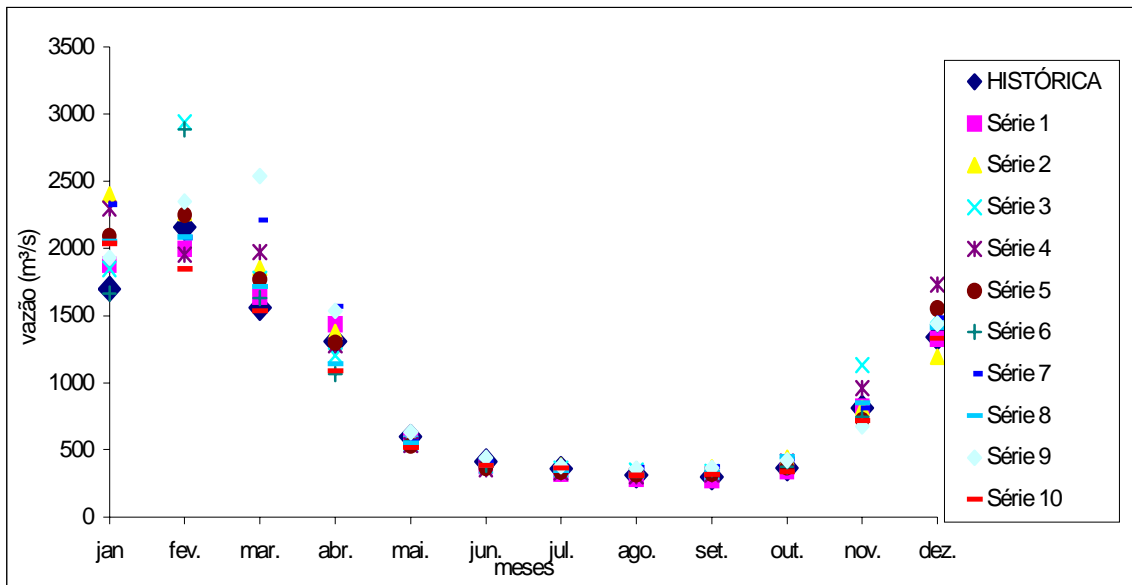


Figura 5 – Vazões médias mensais do grupo de séries com 100 anos – Modelo PAR (2).

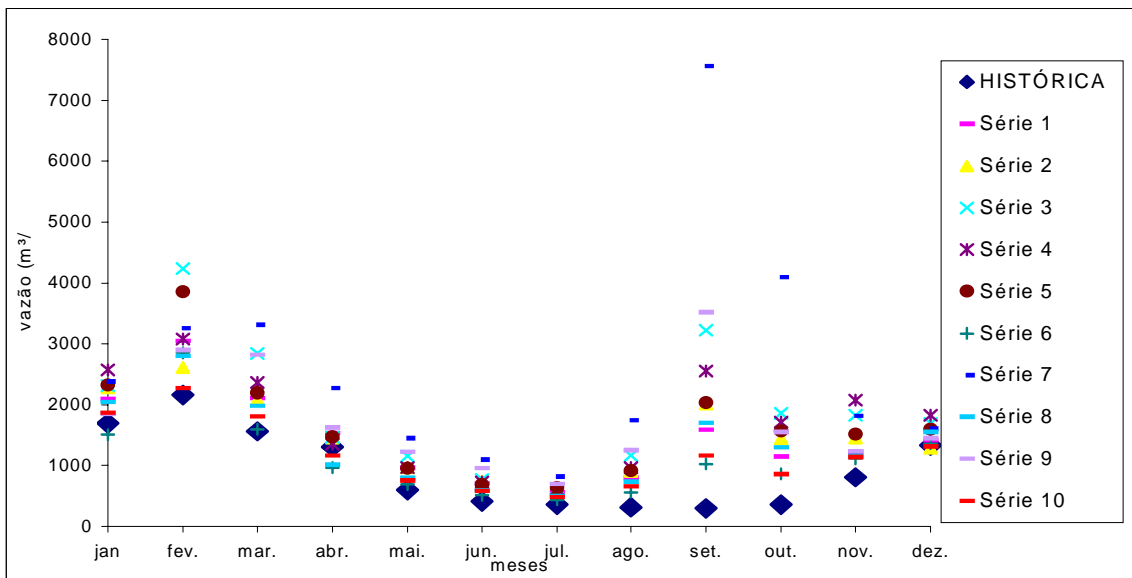


Figura 6 – Vazões médias mensais do grupo de séries com 100 anos – Modelo PAR (2).

Nas Figuras 7 e 8 são apresentados os coeficientes de autocorrelação do “Lag 1”.

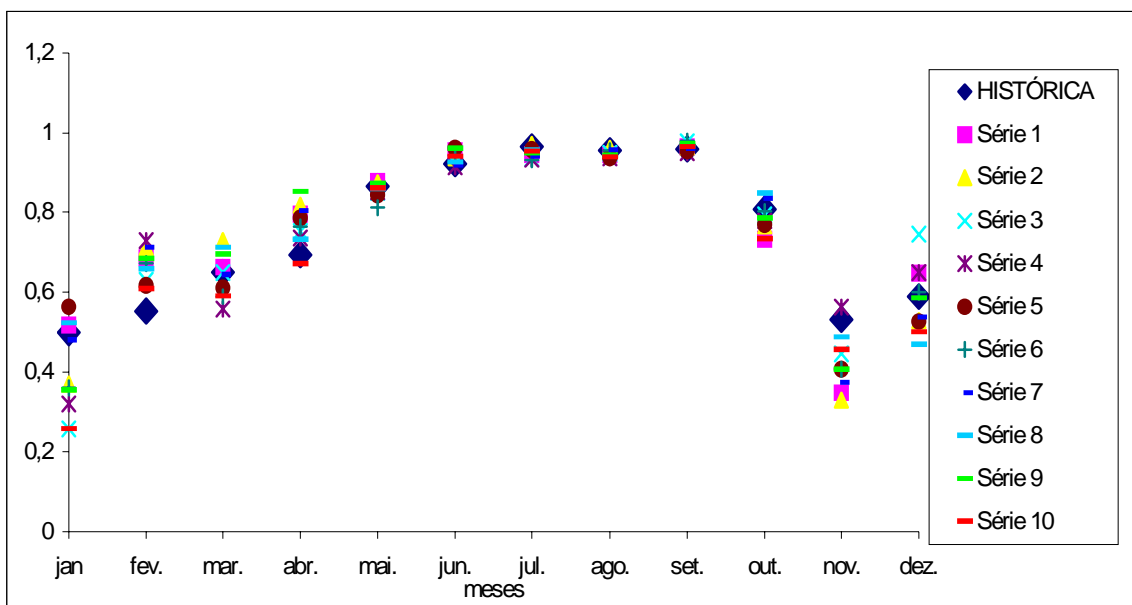


Figura 7 – Autocorrelações mensais “Lag 1” do grupo de série com 100 anos – Modelo PAR (2).

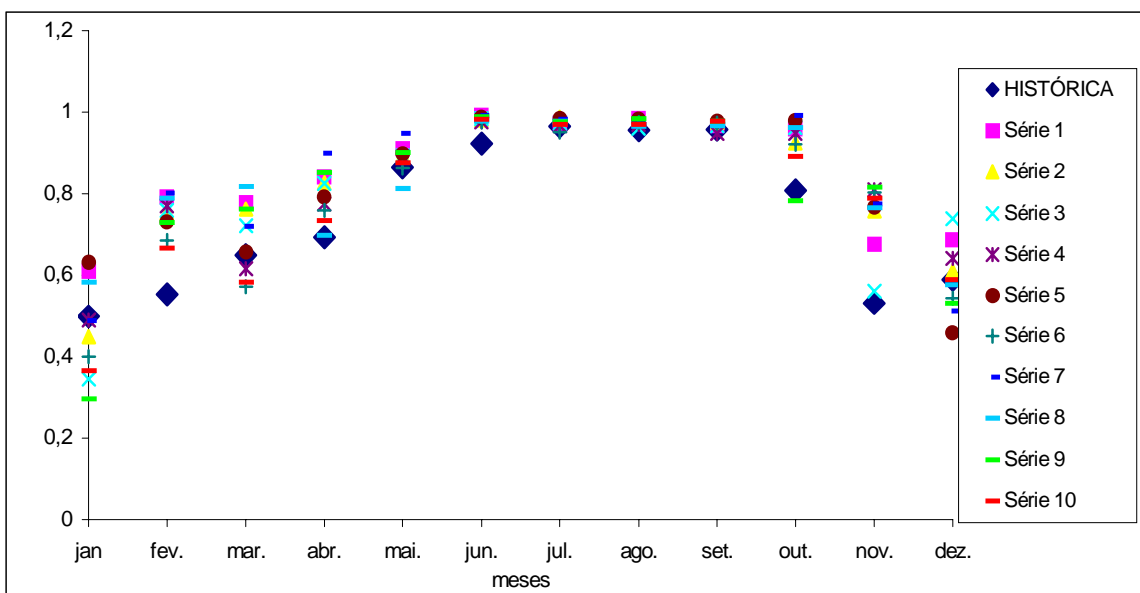


Figura 8 – Autocorrelações mensais “Lag 1” do grupo de série com 100 anos – Modelo PAR (2,1,1,1).

As Figuras 5 a 8 mostram que o modelo PAR(2) descreve melhor os desvios padrões e os coeficientes de autocorrelação “Lag 1” da série histórica do que o modelo PMIX(2,1,1,1).

Os coeficientes de autocorrelação mensal “Lag 1” reproduziram bem a periodicidade e ficaram bem próximos dos valores da série histórica.

Segue-se desta análise que o modelo PAR (2) descreve melhor a série histórica do Rio São Francisco em Manga se não for levada em consideração a autocorrelação anual. Considerando a necessidade da preservação das autocorrelações anuais, o modelo que descreve melhor a série histórica é o modelo PMIX (2,1,1,1).

CONCLUSÕES

O modelo PAR(2) foi o que melhor se ajustou à série do Rio São Francisco, estação Manga, após transformação logarítmica, sem levar em consideração a necessidade de preservação da autocorrelação anual. Quando esta preservação foi considerada, o modelo com melhor ajuste foi o PMIX (2,1,1,1).

A existência e a operação de reservatórios a montante, ao longo do Rio São Francisco, causa alterações no regime hídrico em Manga e na estrutura da série histórica. Estas alterações podem ter causado algumas alterações nos ajustes dos modelos utilizados nos períodos de baixas vazões em períodos posteriores à entrada em operação dos reservatórios.

Modelos multiplicativos preservaram melhor correlações mensais de longo termo e anuais. Isto indica que estes modelos são melhores para a geração de séries que possam reproduzir secas e cheias com mais de um mês de intervalo. Para preservação de altas correlações anuais e periódicas nas séries geradas os modelos periódicos multiplicativos apresentaram melhor desempenho.

Os modelos de melhor ajuste conseguiram preservar as médias, os desvios padrões e as mais importantes autocorrelações, permitindo assim a geração de séries sintéticas apresentando seqüências de vazões de secas e enchentes mais críticas do que aquelas presentes nas séries históricas. Conseqüentemente, poderão permitir projetos de reservatórios e de outras estruturas de controle de recursos hídricos mais seguros do que aqueles obtidos a partir de séries históricas.

REFERÊNCIAS

- [1] - LOVATTE, A. P. **Modelagem estocástica de vazões sazonais**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2003.
- [2] - SALAS, J.D. et.al. **Applied modeling of hydrologic time series**. Water Resources Publications, Littleton, Colorado, 1980.
- [3] - VECCHIA, A.V. **Periodic autoregressive moving average (PARMA) modeling with applications to water resources**. Water Res. Bull. 21, 1985.
- [4] - MENDONÇA, A.S.F. **Stochastic model for seasonal and monthly streamflow**. Ph.d. Thesys, Colorado State University, Ft. Collins, Colorado, 1987.
- [5] - ANDERSON, P.; MEERSCHAERT, M. **Modeling river flows with heavy tails**. Water Resources Res. 34, 1998.
- [6] - MAIDMENT, D.R.. **Handbook of hydrology: Analysis and Modeling of Hydrologic Time Series**. :McGraw-Hill, United States of America, 1993.

- [7] - RIGHETTO, A.; MAROZZI, **Hidrologia e recursos hídricos**. EESC-USP, São Carlos, 1998.
- [8] - MURTEIRA, B. J. F. e outros. **Análise de sucessões cronológicas**. McGraw-Hill, Portugal, 1993.
- [9] - DELLEUR, J.W. et. al. **An evaluation of the practicability and complexity of some rainfall and runoff time series models**. Jour. Water Resour., 1976.
- [10] - BOX, G.E.P.; JEKINS, G. **Time Series analysis, forecasting and control**. Holden Day, São Francisco, 1976.
- [11] - CLARKE, R.T. **Matemactical models in hidrology, Irrigation and Drainage**. Paper 19, FAO, United Nations, Rome, 1973.
- [12] - ANDERSON, P.; MEERSCHAERT, M.; VECCHIA A. **Innovations algorithm for periodically stationary time series**. University of Nevada, Stoch Proc. Appl. 83, 1999.