

MODELAGEM E SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS EXTERNOS EM DUAS DIMENSÕES COM O MÉTODO DE FRONTEIRA IMERSA

Francisco Alves dos Santos Neto¹; Bruno Batista Gonçalves¹ & José Eduardo Alamy Filho²

RESUMO --- Os escoamentos que ocorrem no entorno de objetos imersos apresentam ocorrência comum na natureza. Em termos ambientais, essa classe de escoamentos exerce importante influência. Para isto basta dizer que, por exemplo, previsões do transporte de plumas poluentes em torno de ilhas, ou de fumaça em zonas edificadas, carece da determinação dos campos de velocidade, sem os quais seria impossível estimar a distribuição das concentrações desses compostos. A modelagem matemática e a simulação desses escoamentos, contudo, apresentam aspectos não triviais, como a discretização do domínio com malhas não estruturadas, ou com malhas estruturadas, mas não ortogonais. Diante desse aspecto, o Método de Fronteira Imersa introduz uma forma relativamente mais simples de modelagem, uma vez que realiza uma discretização cartesiana, representando a interface do objeto imerso por um campo de força. Esse campo de força altera o vetor velocidade do fluido, tendendo a impor a condição de não deslizamento na interface fluido/sólido. As simulações aqui realizadas utilizaram o Método de Diferenças Finitas, na discretização das equações governantes, além dos procedimentos da Simulação de Grandes Escalas, para o tratamento da turbulência. Os resultados demonstram que os padrões de escoamentos externos foram devidamente reproduzidos com o uso do Método de Fronteira Imersa.

ABSTRACT --- Flows around immersed bodies are very common in nature. Considering environmental aspects, for example, predictions of pollutant plumes around islands, or smoke transport among buildings, need the estimative of flow velocity fields. This evaluation is essential to determine concentrations of these substances. Nevertheless the mathematical modeling of these flows reveals some complex aspects. The classical use of unstructured or non-orthogonal meshes introduces some numerical difficulties. In this sense, the Immersed Boundary Method represents a promising tool, using Cartesian meshes and a force field spread from the solid/fluid interface. This force field imposes virtually the no-slip condition over the immersed interface. In this paper, the numeric solution of the equations used an explicit scheme of Finite Differences. The Large Eddy Simulation procedures were used in the mathematic treatment of turbulence. The results of simulations reveal that features of flow past objects are reproduced with the use of Immersed Boundary Method.

Palavras-chave: escoamentos externos, Método de Fronteira Imersa, simulação numérica.

1) Bolsistas do programa PET/ Eng. Civil - Universidade Federal de Uberlândia. Avenida João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1Y, Campus Santa Mônica, Uberlândia, MG, CEP: 38400-902, tel: (34) 3239-4159; e-mail: francisconeto12@hotmail.com, brunoufu@yahoo.com.br.

2) Professor Doutor da Faculdade de Engenharia Civil – Universidade Federal de Uberlândia. Avenida João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1Y, Campus Santa Mônica, Uberlândia, MG, CEP: 38400-902, tel: (34) 3239-4159; e-mail: zeedu@feciv.ufu.br.

1 – INTRODUÇÃO

De uma maneira sucinta, os escoamentos externos podem ser entendidos como aqueles que ocorrem no entorno de objetos imersos. Essa classificação permite englobar uma vasta gama de escoamentos encontrados na natureza, uma vez que, na superfície do planeta (ou ainda distante dela) todos os objetos podem ser considerados imersos em meios fluidos, sejam esses meios água ou ar. O movimento de água em torno de pilares de ponte, ou o escoamento de ar ao redor de edifícios, no entorno de asas de aeronaves, são apenas alguns dos casos mais comuns dos escoamentos externos. Os escoamentos externos também exercem importante influência em termos ambientais. Para isto basta dizer que, por exemplo, previsões do transporte de plumas poluentes em torno de ilhas, ou de fumaça em zonas edificadas, carece da determinação dos campos de velocidade, sem os quais seria impossível estimar a distribuição das concentrações desses compostos. Estudos de sedimentação de partículas ou de movimentação de bolhas também podem ser inseridos nesse assunto. Nesse sentido, parece natural que a ocorrência comum do fenômeno contribua para uma falsa impressão de que a análise de escoamentos externos seja relativamente simples e direta. Todavia, a modelagem e simulação desses escoamentos não constituem tarefas triviais.

Essa classe de escoamentos, em geral, caracteriza-se pelo surgimento de estruturas complexas de movimento. Com o aumento do grau de turbulência do escoamento, pode-se verificar a formação de instabilidades a jusante do objeto imerso (ver figura 1), o qual atua como uma fonte perturbadora do escoamento. Essas zonas de instabilidades variam no tempo e no espaço, denotando um aspecto relativamente complexo do escoamento. Diante desse fato, os campos hidrodinâmicos na interface fluido/sólido somente podem ser matematicamente estimados a partir de uma solução numérica das equações diferenciais parciais que governam o movimento dos fluidos.

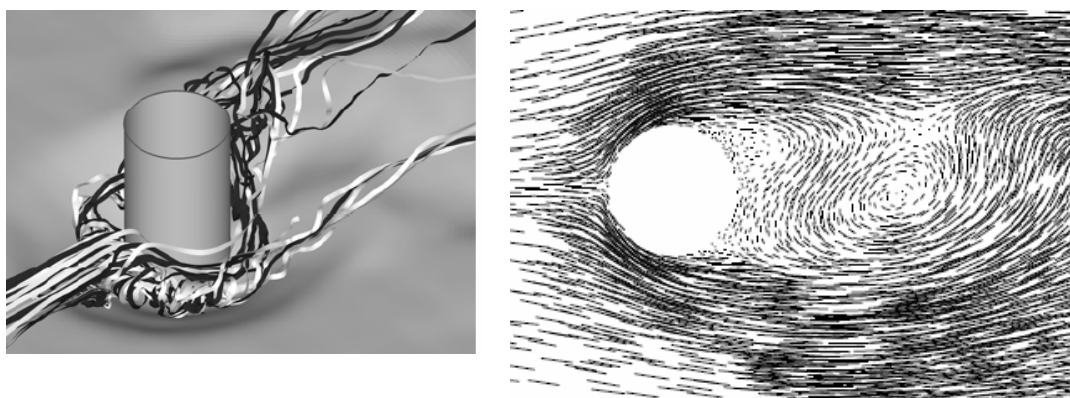


Figura 1 – Escoamento externo em torno de um cilindro imerso. Note-se que, a jusante do objeto, o escoamento assume um comportamento relativamente complexo com a formação de zonas de instabilidade (figuras retiradas de Huang et al., 2006 e de Matthews et al., 2006).

As formas de se estudar os escoamentos externos não são triviais e podem ser divididas em estudos experimentais (túneis de água ou de vento) e em estudos matemáticos (simulação numérico-computacional) que possibilitam a simulação dos mais diversos cenários. Nessa última modalidade está inserido este trabalho.

A solução numérica das equações diferenciais parciais não lineares, que governam os movimentos dos fluidos, foi estruturada numa linguagem computacional, propiciando a estimativa dos campos de velocidade e de pressão a montante, no entorno e a jusante desses objetos. Na construção e implementação dos algoritmos foram utilizadas metodologias modernas, como por exemplo, o tratamento da turbulência nos fluidos pela Simulação de Grandes Escalas (SGE) e a discretização ortogonal do domínio de escoamento pelo Método de Fronteira Imersa (MFI).

2 – MATERIAIS E MÉTODOS

2.1 - Equações governantes

A modelação matemática dos movimentos dos fluidos baseia-se na aplicação de dois princípios básicos: a Conservação de Massa e a II Lei de Newton. A aplicação do primeiro princípio resulta na chamada equação da continuidade, enquanto que a aplicação do segundo princípio resulta nas chamadas equações de Quantidade de Movimento.

A Dinâmica dos Fluidos dispõe de formas diferentes de abordagem dos escoamentos. Dessa forma, quando se quer um conhecimento mais global acerca dos movimentos dos fluidos, via de regra, são utilizadas equações unidimensionais na chamada forma Integral. Todavia, quando o objetivo está focado na estimativa de detalhes dos escoamentos, não se pode prescindir do uso da chamada forma Diferencial das equações, as quais podem ser escritas em duas ou três dimensões.

Diante do exposto é a solução numérica das equações governantes na forma Diferencial que permite a estimativa dos campos hidrodinâmicos nos escoamentos externos. Essas equações, para casos bi-dimensionais e para fluidos incompressíveis e viscosos, são escritas como:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial(u \cdot u)}{\partial x} + \rho \cdot \frac{\partial(v \cdot u)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) + F_x \quad (2)$$

$$\rho \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial(u \cdot v)}{\partial x} + \rho \cdot \frac{\partial(v \cdot v)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + F_y \quad (3)$$

A equação da *Continuidade* é descrita pela equação (1), ao passo que as equações de Quantidade de Movimento, mais comumente chamadas de equações de *Navier-Stokes* quando escritas na forma Diferencial, são representadas pelas equações (2) e (3). Nas referidas equações, os termos u , v e p representam, respectivamente, as componentes de velocidade longitudinal, transversal e a pressão. A massa específica e a viscosidade do fluido são designadas por ρ e μ , respectivamente. As parcelas F_x e F_y representam termos fonte de força, os quais serão explicados adiante, por conveniência.

Por uma breve análise das equações (1) a (3) é possível perceber o grau de complexidade matemática a elas inerente. De fato, trata-se da solução de um problema com equações diferenciais parciais multidimensionais (duas dimensões, no caso), sendo que, as equações de Navier-Stokes apresentam, ainda, o agravante da não linearidade. Soluções analíticas para essas equações são raras e restritas a casos muito simplificados, os quais fogem à realidade da maioria dos escoamentos práticos. Assim, a única forma de obter respostas dessas equações passa pelo viés numérico/computacional. Diante disso, convém citar que, neste trabalho, todas as equações governantes foram discretizadas pelo método de Diferenças Finitas, aplicado sobre um arranjo deslocado de variáveis (velocidades armazenadas nas faces das células e escalares armazenados no centro). Para melhor compreensão desse tipo de arranjo, sugere-se a leitura de Fortuna (2000).

2.2 - Tratamento matemático da turbulência

De uma maneira global, os escoamentos turbulentos podem ser caracterizados por possuírem estruturas turbilhonares com várias escalas de comprimento, por serem naturalmente instáveis e pela dominância dos efeitos de advecção (propagadores de instabilidades), entre outros. Características como estas estão presentes na maioria dos escoamentos ambientais.

Diante da atual matriz de conhecimentos, a turbulência nos fluidos é tratada matematicamente através dos chamados modelos de turbulência, os quais normalmente são embutidos nas equações de Navier-Stokes na forma de uma viscosidade adicional, denominada de viscosidade turbulenta. Dentre as várias classificações de modelos existentes e, também dentro dos vários modelos existentes em cada classificação, este trabalho utilizou os procedimentos da Simulação de Grandes Escalas (SGE), com modelagem sub-malha de Smagorinsky. Pode-se afirmar categoricamente que a SGE é, atualmente, uma das formas mais modernas de se estudar numericamente a dinâmica da turbulência nos fluidos. A idéia que orienta a Simulação de Grandes Escalas (SGE) está baseada na discretização do domínio de escoamento para resolver as maiores escalas de turbulência (escalas filtradas) e no uso de um modelo para aproximar as escalas menores (escalas sub-malha).

Assim, conforme destaca Alamy Filho (2006), a divisão entre grandes escalas e escalas sub-malha não impõe que cada setor seja resolvido por equações separadas, uma vez que a viscosidade turbulenta sub-malha, introduzida nas equações de Navier-Stokes, torna-se o objeto de modelação. Dessa forma, as equações de Navier-Stokes primitivas passam a ser as equações de Navier-Stokes filtradas, cuja resolução numérica fornece os campos filtrados de velocidade e pressão.

De maneira sucinta, com o uso da SGE, as equações governantes dos escoamentos podem ser reescritas, para escoamentos bi-dimensionais, como:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

$$\rho \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial (\bar{u} \cdot \bar{u})}{\partial x} + \rho \cdot \frac{\partial (\bar{v} \cdot \bar{u})}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_{ef} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_{ef} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \bar{F}_x \quad (5)$$

$$\rho \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial (\bar{u} \cdot \bar{v})}{\partial x} + \rho \cdot \frac{\partial (\bar{v} \cdot \bar{v})}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_{ef} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_{ef} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) + \bar{F}_y \quad (6)$$

Nas equações (4) a (6), as barras colocadas sobre as variáveis indicam seus valores filtrados. Além disso, o termo μ_{ef} indica a viscosidade efetiva do escoamento que, no presente contexto, é calculada pela soma entre a viscosidade molecular do fluido e a viscosidade sub-malha turbulenta do escoamento, ou seja, $\mu_{ef} = \mu + \mu_{sm}$. De fato, o objeto de uma SGE está voltado para o cálculo de campos filtrados de velocidade e pressão. Pode-se dizer que essas variáveis filtradas representam a média de todas as velocidades presentes dentro de cada célula de discretização do domínio.

Os chamados modelos sub-malha são utilizados para calcular a viscosidade turbulenta sub-malha. Dentre os procedimentos mais conhecidos destacam-se o modelo de Smagorinsky, o modelo Dinâmico (Germano et al., 1991) e o modelo Função Estrutura de Velocidade de Segunda Ordem (Métais e Lesieur, 1992). De acordo com o modelo de Smagorinsky, a viscosidade sub-malha pode ser calculada como:

$$\mu_{sm} = \rho \cdot (C_s \cdot \Delta)^2 \cdot \sqrt{\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}} \quad (7)$$

Em que:

- C_s = constante de Smagorinsky, a qual varia entre 0,1 e 0,33;
- Δ = espessura do filtro espacial (média geométrica das dimensões da célula de discretização, $\Delta = \sqrt{\Delta x \cdot \Delta y}$);
- $\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij} = 2 \cdot (\bar{S}_{11}^2 + \bar{S}_{22}^2 + 2\bar{S}_{12}^2)$;

- $\bar{S}_{11} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$;
- $\bar{S}_{22} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}$;
- $\bar{S}_{12} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)$.

Convém comentar que a grande vantagem da SGE, sobre as outras formas de tratamento da turbulência nos fluidos, é a de permitir a descrição física dos movimentos. Diante disso, a simulação numérica é capaz de capturar a formação, evolução espacial e temporal, destruição e eventual coalescência de estruturas turbilhonares. Por outro lado, quando o grau de turbulência do escoamento for baixo, ou seja, quando o escoamento puder ser considerado laminar, as viscosidades turbulentas são muito pequenas, de forma que o modelo de turbulência pode ser descartado sem potencial prejuízo da solução numérica.

Finalmente, é importante comentar que, de acordo com Wang e Squires (1996), os resultados da SGE (filtrados) podem ser considerados, na prática, equivalentes aos resultados dos campos hidrodinâmicos instantâneos, obtidos por experimentos. Essa observação faz sentido, uma vez que as escalas filtradas são similares à precisão das medições experimentais. Além disso, o fato de se modelar apenas as pequenas escalas conduz a erros menos significativos, pois o sentido de transferência de energia cinética turbulenta é preferencialmente das maiores para as menores estruturas turbilhonares. Nos itens seguintes, as barras sobrepostas às variáveis serão suprimidas das equações por conveniência. Salienta-se, contudo, que todas as variáveis calculadas constituem valores filtrados.

2.3 - O Método de Fronteira Imersa

A construção da malha de discretização do domínio, não é tarefa trivial para grande parte dos escoamentos estudados no âmbito das engenharias. Em termos de escoamentos externos, essa conclusão pode ser confirmada a partir de uma simples comparação entre o escoamento em torno de um cilindro retangular e em torno de um cilindro de geometria circular, conforme ilustra a figura 2.

Por uma breve análise da figura 2(a), é possível perceber que a região analisada pode ser discretizada por uma malha ortogonal (malha em que os lados das células discretas são perpendiculares). Apesar disso, na figura 2(b) não existe, a priori, possibilidade de discretização ortogonal, uma vez que o objeto imerso possui uma geometria curvilínea.

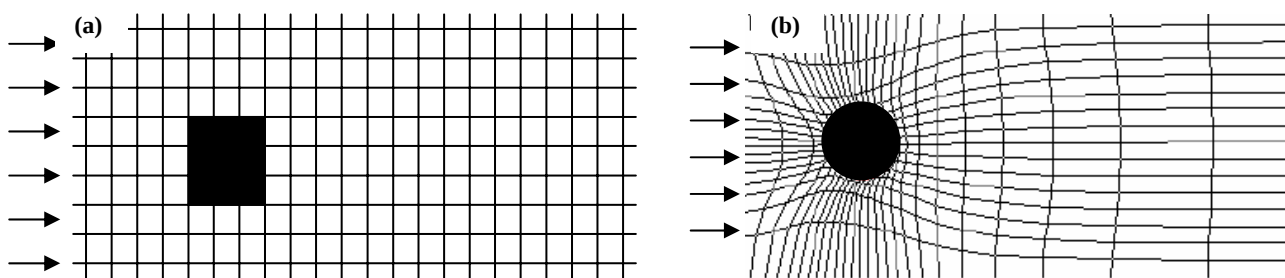


Figura 2 – Diferenças entre formas de discretização do domínio de acordo com a geometria analisada: (a) discretização com malha ortogonal, (b) discretização com malha não ortogonal.

No caso de problemas em que as geometrias são irregulares, ou mesmo em problemas com geometrias simples, como é o caso do escoamento em torno de um cilindro circular, não há possibilidade de se utilizar malhas ortogonais. Este fato atua como um complicador na solução numérica, uma vez que impõe a necessidade de mudança do sistema de coordenadas, além da chamada transformação conforme da malha. Nesse caso, as coordenadas cartesianas (x, y) devem ser substituídas por um sistema curvilíneo de coordenadas generalizadas, procedimento normalmente denominado de “transformação conforme”, o qual exige intenso algebrismo vetorial. Diante disso, pode-se dizer que uma parte considerável do trabalho intelectual de modelagem numérica é atribuída à resolução de problemas relacionados ao tratamento da malha de discretização. Em palavras simples, “dispende-se muito tempo no tratamento de um problema que decorre puramente da configuração geométrica do domínio”, além do que, o tratamento numérico do escoamento já é complicado por si só. Além da dificuldade matemática, o uso de malhas não ortogonais não é uma alternativa das mais viáveis em uma série de problemas como escoamentos em torno de objetos muito irregulares (com geometrias cheias de recortes), objetos móveis e na interação entre fluido e estrutura (fluido/sólido). De fato, trabalhar-se com um sistema de coordenadas cartesianas (ortogonal) é mais simples, mais desejável e recomendado, desde que haja possibilidade de fazê-lo.

Diante do que foi exposto no parágrafo anterior, um dos grandes desafios da Mecânica dos Fluidos Computacional está relacionado com a busca novas idéias para modelar escoamentos em torno de geometrias diversas. Essas novas idéias redundaram na técnica denominada de Método de Fronteira Imersa (MFI) (Peskin, 1977), a qual utiliza malhas ortogonais para qualquer tipo de escoamento, mesmo para aqueles que ocorrem no entorno de objetos irregulares. O MFI parte do princípio de que qualquer domínio de escoamento é passível de ser discretizado por malhas ortogonais, desde que um campo de força seja introduzido para simular virtualmente a presença de uma geometria irregular. Dessa forma, segundo ilustra a figura 3, a discretização espacial passa a

ser feita pela junção de duas malhas: uma malha ortogonal que cobre todo o domínio (malha euleriana) e outra malha linear que representa a interface entre o objeto e o fluido (malha lagrangeana).

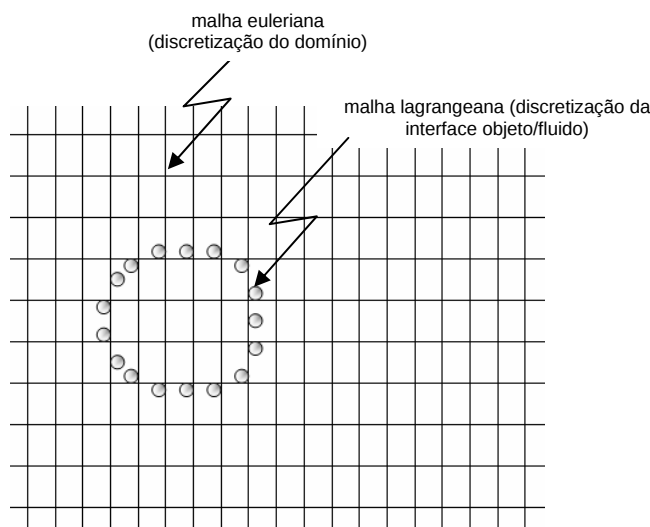


Figura 3 – Discretização alternativa de um domínio relacionado ao escoamento em torno de um objeto de geometria circular. O Método de Fronteira Imersa possibilita a discretização ortogonal de domínios irregulares mediante o acoplamento das malhas euleriana (células que cobrem todo o domínio de escoamento) e lagrangeana (conjunto de pontos que delimitam a interface entre objeto e fluido).

Note-se que, em se utilizando a discretização típica do MFI, regiões dentro do objeto imerso também fazem parte do domínio simulado, uma vez que a malha de discretização (euleriana) realiza a cobertura de uma região retangular. Portanto, a malha de discretização pode ser mantida fixa e ortogonal, independentemente da forma ou posição do objeto imerso.

O foco principal do MFI está direcionado ao cálculo das forças de campo (F_x e F_y), utilizadas para simular virtualmente a presença de um obstáculo imerso no escoamento. Nesse sentido será utilizado o Modelo Físico Virtual (Lima e Silva, 2002; Lima e Silva et al., 2003). Essas forças de campo são disseminadas, a partir de cada ponto da malha lagrangeana, em direção ao interior do escoamento, de forma que, ao se aproximar da interface, o fluido tem o seu vetor velocidade alterado, tanto em módulo, quanto em direção. Em outras palavras, o campo de força gerado tem a função de impor a condição de não deslizamento na interface sólido/fluido.

A aplicação do Método de Fronteira Imersa pode ser dividida nas seguintes etapas:

- lançamento dos pontos que delimitam a interface entre objeto imerso e fluido (construção da malha lagrangeana);
- cálculo da força interfacial ($\vec{f}_k$) sobre cada ponto da malha lagrangeana:
 - ⇒ interpolação de velocidades para o ponto interfacial k ;
 - ⇒ cálculo de $\vec{f}_k$ propriamente dito.

- Disseminação da força interfacial ($\vec{f}_k$) para o interior do domínio: cálculo da força $\vec{F} = (F_x, F_y)$ que efetivamente atua sobre o fluido.

Essas etapas são descritas, com mais detalhes, a seguir.

2.3.1 - Lançamento dos pontos que delimitam a interface entre o fluido e o obstáculo imerso:

Nessa fase da modelagem a chamada malha lagrangeana (pontos interfaciais) é lançada dentro do domínio de escoamento, delineando apenas a interface entre objeto e fluido. Este lançamento foi feito a partir da construção direta de trecho de código para objetos de formas geométricas simples como obstáculos circulares, retangulares, entre outros. Apesar disso, a construção da malha lagrangeana também pode ser feita pela leitura de coordenadas em arquivos-texto, no caso de obstáculos com formas não bem definidas.

2.3.2 – Cálculo da força interfacial (aplicação do Modelo Físico Virtual):

Essa etapa consiste no cálculo de um campo de força que vai impor virtualmente a condição de não deslizamento para uma partícula de fluido situada exatamente sobre a interface sólido/fluido. Com o Modelo Físico Virtual, o cálculo dessas densidades de força é feito a partir das próprias equações de Navier-Stokes, aplicadas sobre cada ponto (k) da malha lagrangeana, de acordo com:

$$f_x = \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \Big|_k + \rho \frac{\partial \bar{u}\bar{u}}{\partial x} \Big|_k + \rho \frac{\partial \bar{v}\bar{u}}{\partial y} \Big|_k + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \Big|_k + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) \Big|_k + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \Big|_k \quad (8)$$

$$f_y = \rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \Big|_k + \rho \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial x} \Big|_k + \rho \frac{\partial \bar{v}\bar{v}}{\partial y} \Big|_k + \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \Big|_k + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \Big|_k + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \Big|_k \quad (9)$$

É conveniente comentar que o cálculo da força lagrangeana é feito separadamente para cada ponto da interface. O primeiro passo para estimar as várias parcelas de força lagrangeana consiste na fixação de pontos auxiliares a partir da fronteira, conforme ilustra a figura 4.

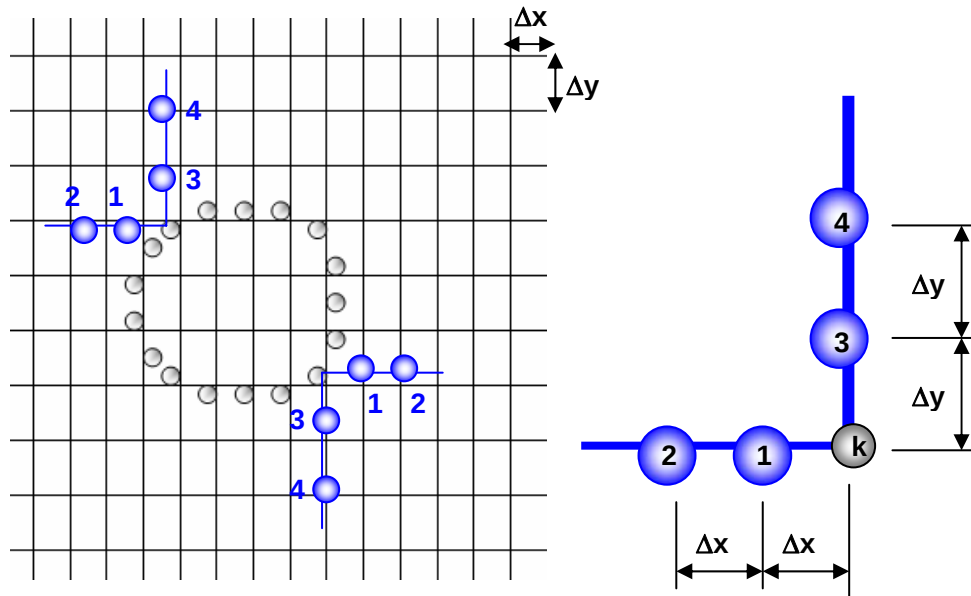


Figura 4 – Lançamento dos quatro pontos auxiliares a partir de cada ponto interfacial (k). Os pontos 1 e 2 estão na direção horizontal, enquanto que os pontos 3 e 4 estão na direção transversal.

Convém citar que os pontos auxiliares estão sempre situados na região de interesse do escoamento, ou seja, são externos ao limite do obstáculo. Esses pontos estão espaçados com as mesmas dimensões da malha ortogonal que discretiza o domínio de escoamento, ou seja Δx (horizontal) e Δy (transversal). Os valores de velocidade e pressão nos pontos auxiliares, em geral, não são conhecidos, mas podem ser obtidos, a partir das células vizinhas, com o auxílio de uma função de distribuição/interpolação, de acordo com:

$$u(\bar{x}_i) = \sum_j D(x_j - x_i) \cdot u(x_j) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \quad (10)$$

$$v(\bar{x}_i) = \sum_j D(y_j - y_i) \cdot v(x_j) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \quad (11)$$

Nas equações (10) e (11), o sub-índice “i” indica os pontos auxiliares ($i = 1, 2, 3, 4$), e o sub-índice “j” indica a célula da malha de discretização (malha euleriana). A função de distribuição/interpolação, segundo a proposta de Peskin (1977), modificada por Juric (1996), é definida como:

$$D = \frac{f\left(\frac{x_i - x_j}{\Delta x}\right) \cdot f\left(\frac{y_i - y_j}{\Delta y}\right)}{\Delta x \cdot \Delta y} \quad (12)$$

$$f(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{3 - 2 \cdot |\varepsilon| + \sqrt{1 + 4 \cdot |\varepsilon| - 4 \cdot |\varepsilon|^2}}{8} & \text{para } |\varepsilon| \leq 1 \\ \frac{5 - 2 \cdot |\varepsilon| - \sqrt{-7 + 12 \cdot |\varepsilon| - 4 \cdot |\varepsilon|^2}}{8} & \text{para } 1 < |\varepsilon| \leq 2 \\ 0 & \text{para } |\varepsilon| > 2 \end{cases} \quad (13)$$

Na equação (12), x_i, y_i representam as coordenadas do ponto auxiliar considerado ($i=1,2,3,4$) ou do ponto interfacial (k), enquanto que x_j, y_j representam as coordenadas do centro da malha de discretização.

Com a aplicação das equações (10) e (11), as velocidades e as pressões, inicialmente apenas conhecidas nas faces das células de discretização, passam a ser conhecidas nos pontos auxiliares (1,2,3 e 4) e também no ponto interfacial (k). O próximo passo consiste no cálculo das derivadas das equações (8) e (9). As derivadas espaciais que constituem as parcelas das referidas equações são calculadas através de polinômios de Lagrange. Assim, representando as variáveis a serem derivadas (velocidades “ u ”, “ v ” e a pressão) por uma grandeza genérica φ , obtém-se para casos bi-dimensionais:

$$\frac{\partial \varphi(\bar{x}_k)}{\partial x} = \frac{(x_k - x_2)}{(x_1 - x_2) \cdot (x_1 - x_k)} \cdot \varphi_1 + \frac{(x_k - x_1)}{(x_2 - x_1) \cdot (x_2 - x_k)} \cdot \varphi_2 + \frac{(x_k - x_1) \cdot (x_k - x_2)}{(x_k - x_1) \cdot (x_k - x_2)} \cdot \varphi_k \quad (14)$$

$$\frac{\partial \varphi(\bar{x}_k)}{\partial y} = \frac{(y_k - y_4)}{(y_3 - y_4) \cdot (y_3 - y_k)} \cdot \varphi_3 + \frac{(y_k - y_3)}{(y_4 - y_3) \cdot (y_4 - y_k)} \cdot \varphi_4 + \frac{(y_k - y_3) \cdot (y_k - y_4)}{(y_k - y_3) \cdot (y_k - y_4)} \cdot \varphi_k \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi(\bar{x}_k)}{\partial x^2} = \frac{2 \cdot \varphi_1}{(x_1 - x_2) \cdot (x_1 - x_k)} + \frac{2 \cdot \varphi_2}{(x_2 - x_1) \cdot (x_2 - x_k)} + \frac{2 \cdot \varphi_k}{(x_k - x_1) \cdot (x_k - x_2)} \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi(\bar{x}_k)}{\partial y^2} = \frac{2 \cdot \varphi_3}{(y_3 - y_4) \cdot (y_3 - y_k)} + \frac{2 \cdot \varphi_4}{(y_4 - y_3) \cdot (y_4 - y_k)} + \frac{2 \cdot \varphi_k}{(y_k - y_3) \cdot (y_k - y_4)} \quad (17)$$

Nas equações (14) a (17), o termo $\bar{x}_k = (x_k, y_k)$ representa as coordenadas dos pontos interfaciais, ao passo que as coordenadas dos pontos auxiliares (1,2,3 e 4) é representada por (x_i, y_i) .

A derivada temporal pode ser diretamente estimada por:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\varphi_k - \varphi_{fk}}{\Delta t} \quad (18)$$

Na equação (18) a variável φ_k representa a componente de velocidade da interface. Se a interface for fixa, por exemplo, seu valor é anulado. Com a aplicação das equações (8) e (9), cujas

etapas foram desmembradas pelas equações (10) a (18), está calculada a densidade de força sobre cada ponto interfacial.

2.3.3 – Disseminação da força interfacial para o interior do escoamento - cálculo do campo de força (F_x, F_y) das equações de Navier-Stokes:

Após ser calculada ao longo da malha lagrangeana, a força interfacial (f_x, f_y) é distribuída no escoamento, originando um campo de força euleriano (F_x, F_y) que atua sobre as partículas de fluido vizinhas da fronteira. Assim, a força atuante nas proximidades da interface pode ser calculada por:

$$F_x = \sum_k D(x_j - x_k) \cdot f_x(\bar{x}_j) \cdot ds^2 \quad (19)$$

$$F_y = \sum_k D(y_j - y_k) \cdot f_y(\bar{x}_j) \cdot ds^2 \quad (20)$$

Nas equações (19) e (20), ds é a distância média entre dois pontos lagrangeanos na direção longitudinal, “ j ” indica a célula vizinha da interface e “ k ” indica o ponto interfacial onde a densidade de força foi previamente calculada. Note-se que aqui é utilizada a mesma função de transferência definida pelas equações (12) e (13).

Ao final deste procedimento, a interface entre sólido imerso e fluido está modelada virtualmente, fato que permite a aplicação de malhas de discretização ortogonais (células retangulares) na simulação de escoamentos externos.

2.4 – Aspectos complementares

Conforme já foi comentado, todas as equações foram discretizadas pelo Método de Diferenças Finitas. As derivadas espaciais utilizaram um esquema centrado de segunda ordem, enquanto que, para as derivadas temporais, foi utilizado o esquema de Adams-Bashforth também de segunda ordem. A solução numérica das equações filtradas da continuidade e de Navier-Stokes utilizou o chamado Método de Passos Fracionados. Com a aplicação desse método, diz-se que a solução caminha em “marcha temporal”, ou seja, que os campos hidrodinâmicos são calculados passo a passo, mediante pequenos incrementos de tempo (Δt). Por isto, diz-se que os passos são fracionados. Na terminologia do cálculo numérico, este procedimento é considerado explícito, uma vez que valores futuros de uma variável, como, por exemplo, da componente longitudinal de velocidade, são calculados a partir de valores previamente conhecidos.

Como na maioria dos esquemas explícitos de acoplamento entre a equação da continuidade e as equações de Navier-Stokes, o Método de Passos Fracionados divide a solução em duas etapas: uma preditora e outra corretora. A etapa preditora soluciona apenas as equações de Navier-Stokes, obtendo campos de velocidade fictícios ou não corrigidos. Para facilitar o entendimento, pode-se dizer que a etapa preditora realiza uma espécie de “ajuste grosso” da solução. Ao final da etapa preditora, os campos de velocidade fictícios não podem ser considerados definitivos, uma vez que eles não respeitam a equação da continuidade. Para solucionar esta questão é aplicada a etapa corretora, que realiza uma espécie de “ajuste fino” da solução.

A descrição de detalhes do Método de Passos Fracionados foge do escopo deste trabalho. Para isto, sugere-se a leitura de Lima e Silva (2002) e Alamy Filho (2006), entre outros.

O código computacional para a simulação foi implementado na linguagem FORTRAN, permitindo o estudo de vários cenários de escoamentos externos, no que tange às diversas formas de obstáculos e ao grau de turbulência do escoamento (maiores ou menores números de Reynolds). Nesse contexto, o algoritmo construído por Alamy Filho (2006), desenvolvido inicialmente para o estudo do transporte de sedimentos sobre dunas, foi convenientemente adaptado (no presente trabalho) para a simulação de escoamentos externos.

3 – EXPERIMENTO NUMÉRICO, RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste item são apresentados alguns resultados, os quais procuram esclarecer melhor como o Método de Fronteira Imersa atua na modelagem virtual de uma série de escoamentos externos. Com este intuito, torna-se especialmente interessante a análise da figura 5, a qual ilustra campos simulados para o escoamento em torno de um cilindro circular simples. Nesse caso, o domínio computacional foi discretizado com 7500 células uniformes (0,01 x 0,01 m) (malha euleriana) e 20 pontos (malha lagrangeana). O número de Reynolds simulado foi de 160, utilizando a velocidade média na seção e o diâmetro do cilindro ($d = 0,08$ m) como dimensão característica. Em todos os casos simulados neste trabalho utilizou-se água a 20°C como o fluido em escoamento. Da mesma forma, em todos os resultados apresentados, o tempo foi adimensionalizado como $t^+ = t \cdot U/d$, em que U representa a velocidade média no perfil transversal e d representa o diâmetro (ou dimensão característica) do objeto imerso. Por fim, também é conveniente citar que todas as fronteiras laterais foram tratadas com condições de simetria, enquanto que campos de velocidade uniformes foram impostos na entrada e derivadas normais nulas foram adotadas como condições de contorno na saída de todos os domínios simulados.

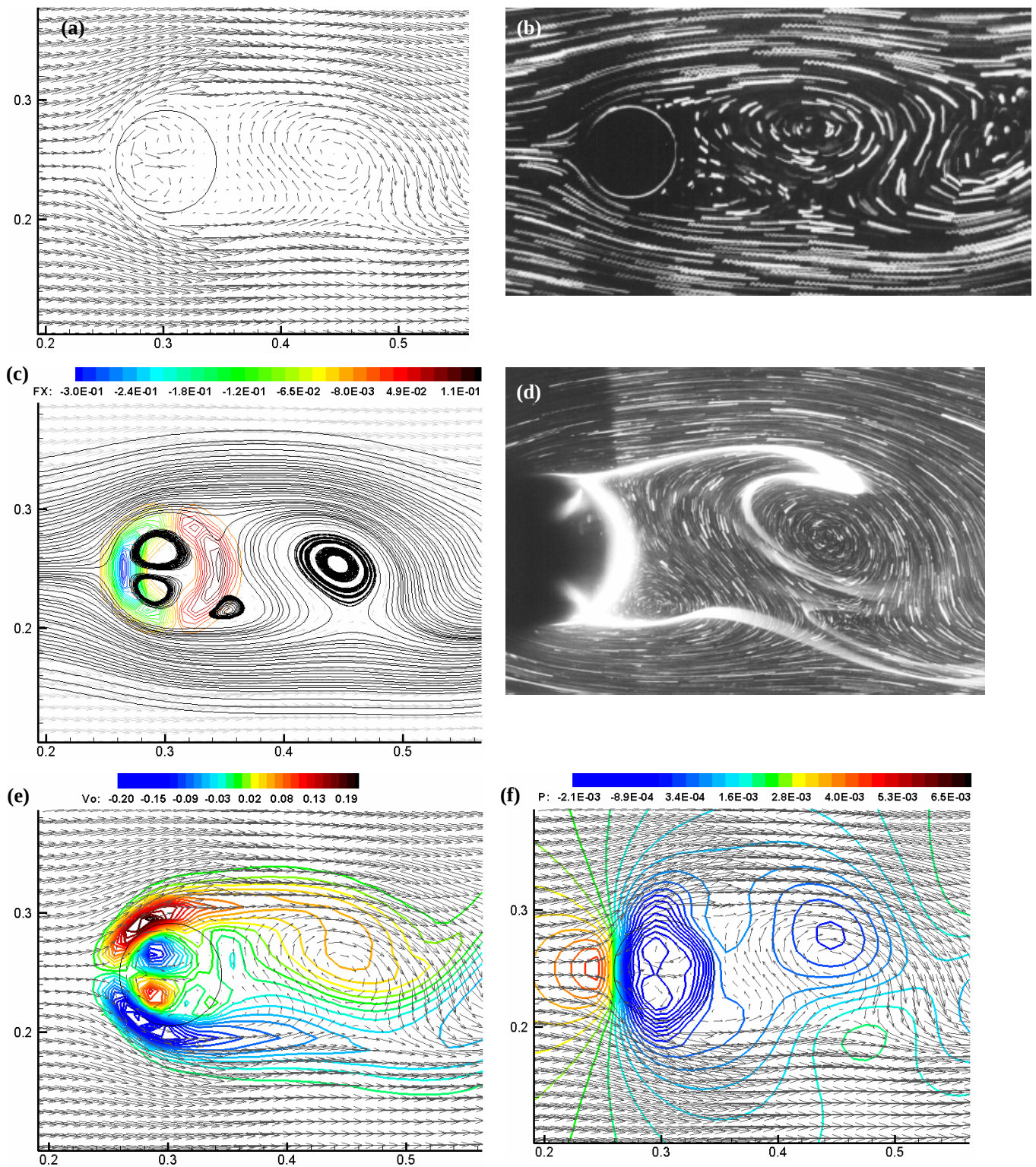


Figura 5 – Campos hidrodinâmicos para escoamento em torno de cilindro estacionário, instante $t^+ = 14,5$: (a) vetores de velocidade, (b) visualização experimental com partículas suspensas de polietileno (Taneda, 1988), (c) Campo de força (N/m^3) na direção longitudinal e linhas de corrente, (d) visualização experimental com pó de alumínio (Taneda, 1988); (e) vetores de velocidade e contornos de vorticidade ($m/(s.m)$), (f) vetores de velocidade e distribuição de pressão (N/m^2).

Por uma breve análise da figura 5 é possível observar como a simulação com fronteira imersa conseguiu reproduzir escoamentos reais. Percebe-se estreita semelhança entre os vetores de velocidade, determinando o traçado das linhas de corrente, e as visualizações experimentais com traçadores passivos. As figuras 5(a) e 5(b) permitem elucidar o princípio da simulação com o MFI. Note-se que todo o domínio é simulado como se fosse totalmente ocupado pelo fluido (há campos de velocidade internos ao cilindro). Todavia, o campo de força que impõe virtualmente a condição de não deslizamento separa esses campos internos dos externos, os quais são realmente de interesse final. Em outras palavras, o campo de força impede a perfuração da interface virtual entre fluido e objeto. Assim, a tendência do fluido na região de interesse é de contornar o objeto, de forma que o descolamento da camada limite, a partir dos bordos laterais, provoca o surgimento de zonas de baixa pressão à jusante do objeto, as quais são coincidentes com os campos de elevada vorticidade (ver figuras 5(e) e 5(f)). Da mesma forma é possível visualizar que os campos de maior pressão surgem no bordo anterior, onde ocorre o ataque do fluido ao objeto. Esses resultados são concordantes com as características dos escoamentos externos. É interessante comentar que o fluido presente dentro da interface assume movimentos de recirculação (figuras 5(a) e 5(c)), semelhantes aos que ocorrem no interior de bolhas dispersas. Por isso também surgem elevados campos de vorticidade no interior do objeto.

Uma vantagem do MFI, sobre outras formas clássicas de tratamento de escoamentos externos, é a sua flexibilidade, no que diz respeito ao tratamento de objetos com formas variadas. Isto ocorre porque a malha de discretização (euleriana) pode permanecer fixa, enquanto que apenas a distribuição dos pontos da malha lagrangeana se altera para simular outro objeto com forma diferente. A figura 6 ilustra um caso em que o escoamento ocorre no entorno de uma placa rombuda, na qual a pressão no bordo de ataque é consideravelmente maior do que a pressão no bordo posterior. Nessa simulação, as dimensões da malha euleriana foram mantidas as mesmas, ao passo que a interface sólido/fluido foi discretizada por 60 pontos. A forma final do objeto consistiu de um retângulo com lado maior de 0,21 m e lado menor de 0,04 m. O número de Reynolds, calculado em função do lado maior, foi de 1050. Nesse caso, a exemplo do anterior, também é possível visualizar como o MFI captura adequadamente os padrões reais de escoamento.

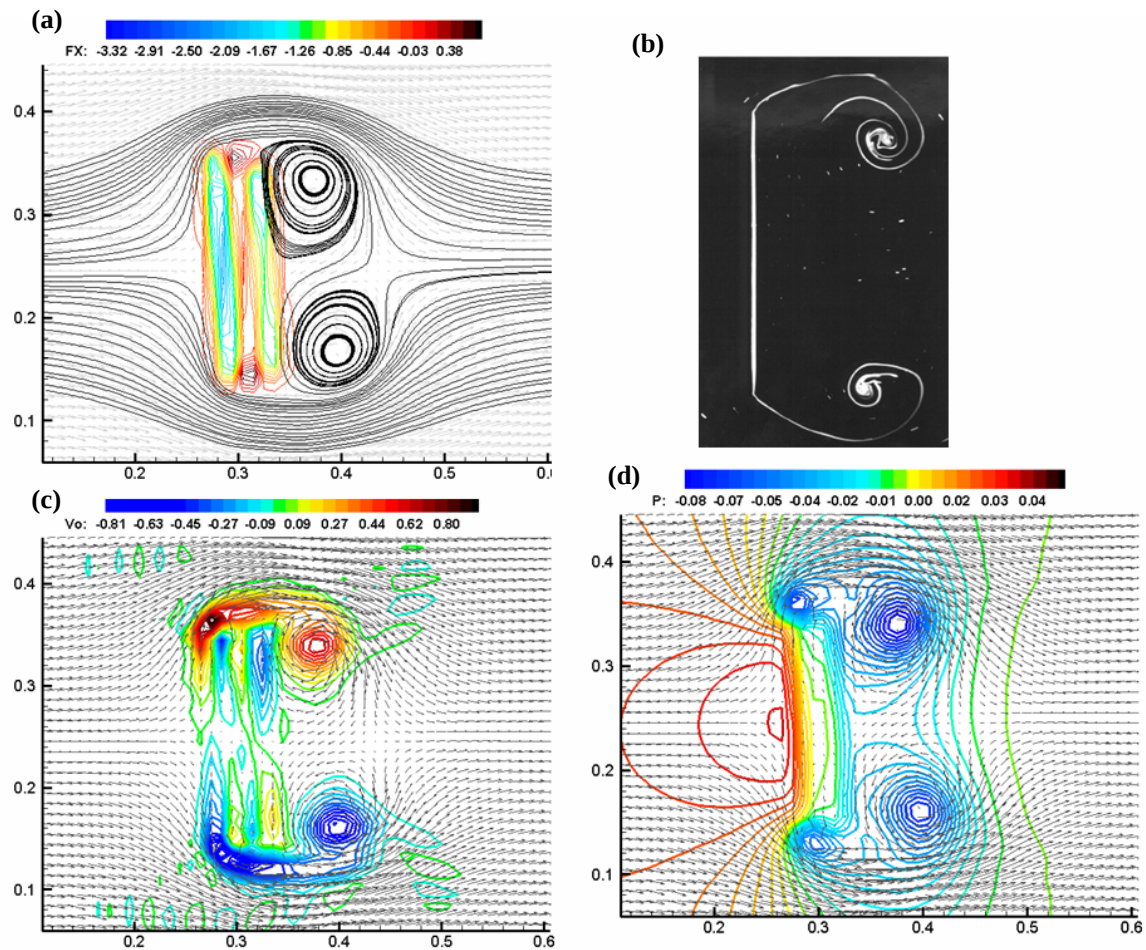


Figura 6 – Simulação de escoamento em torno de placa rombuda – desenvolvimento dos campos hidrodinâmicos iniciais (instante $t^+ = 0,6$): (a) Campo de força (N/m³) na direção longitudinal e linhas de corrente, (b) visualização experimental utilizando método de precipitação eletrolítica (Taneda e Honji, 1971), (c) vetores de velocidade e contornos de vorticidade (m/(s.m)), (d) vetores de velocidade e distribuição de pressão (N/m²).

Nas figuras 7 a 13 ilustram-se as evoluções temporais dos campos de vorticidade para diferentes objetos imersos.

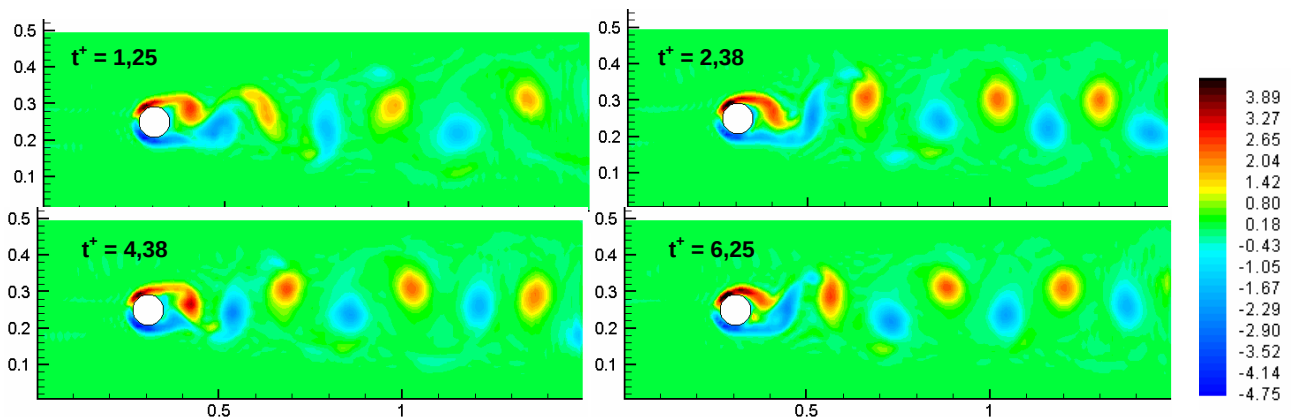


Figura 7 – Evolução temporal dos campos de vorticidade (m/(s.m)) para cilindro circular. Dados da simulação: $Re = 3200$, $d = 0,08$ m; malha euleriana (50 x 150), malha lagrangeana de 20 pontos.

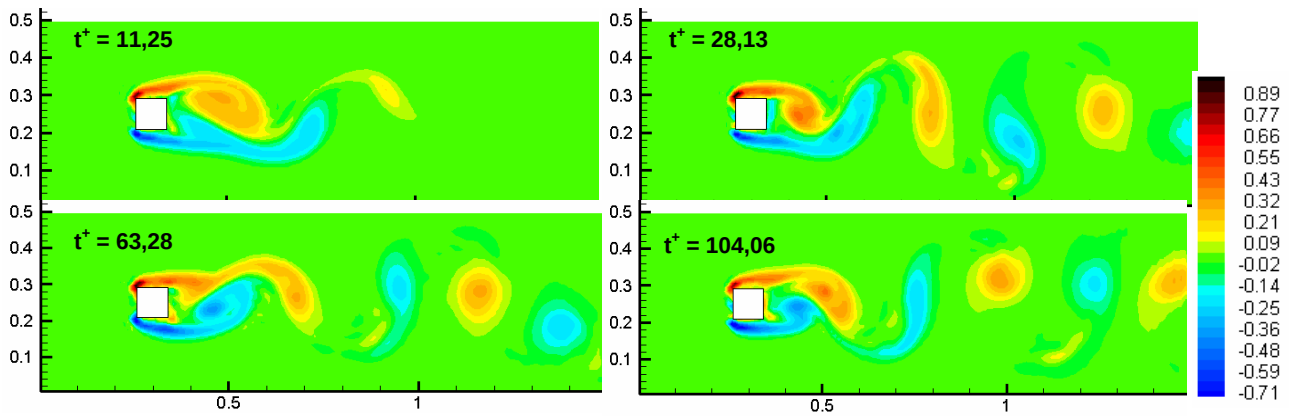


Figura 8 – Evolução temporal dos campos de vorticidade (m/(s.m)) para obstáculo quadrado. Dados da simulação: $Re = 640$, $d = 0,08$ m; malha euleriana (50 x 150), malha lagrangeana de 40 pontos.

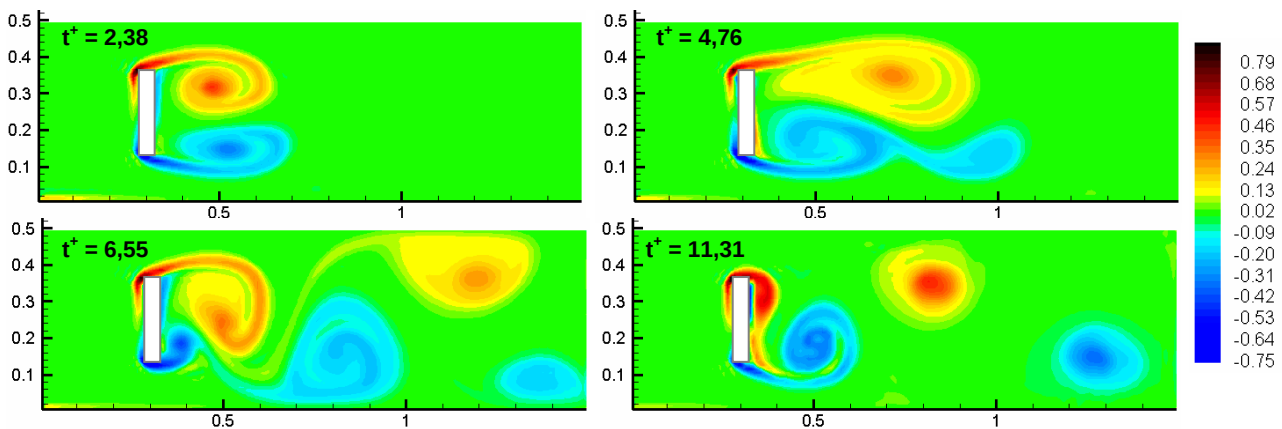


Figura 9 – Evolução temporal dos campos de vorticidade (m/(s.m)) para placa rombuda. Dados da simulação: $Re = 1050$, $d = 0,21$ m; malha euleriana (50 x 150), malha lagrangeana de 60 pontos.

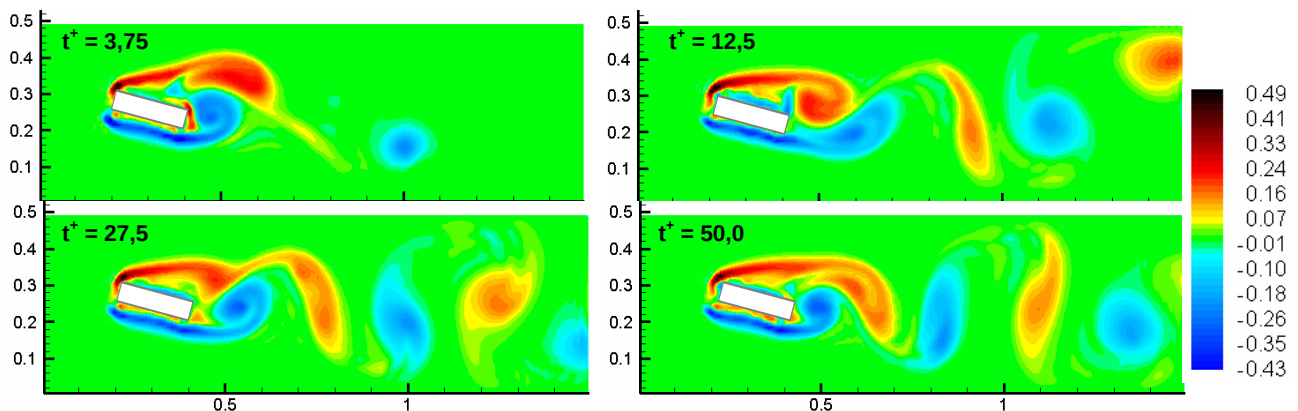


Figura 10 – Evolução temporal dos campos de vorticidade (m/(s.m)) para placa inclinada (15° com a horizontal). Dados da simulação: $Re = 1000$, objeto (0,20 x 0,075 m); malha euleriana (50 x 150), malha lagrangeana de 60 pontos.

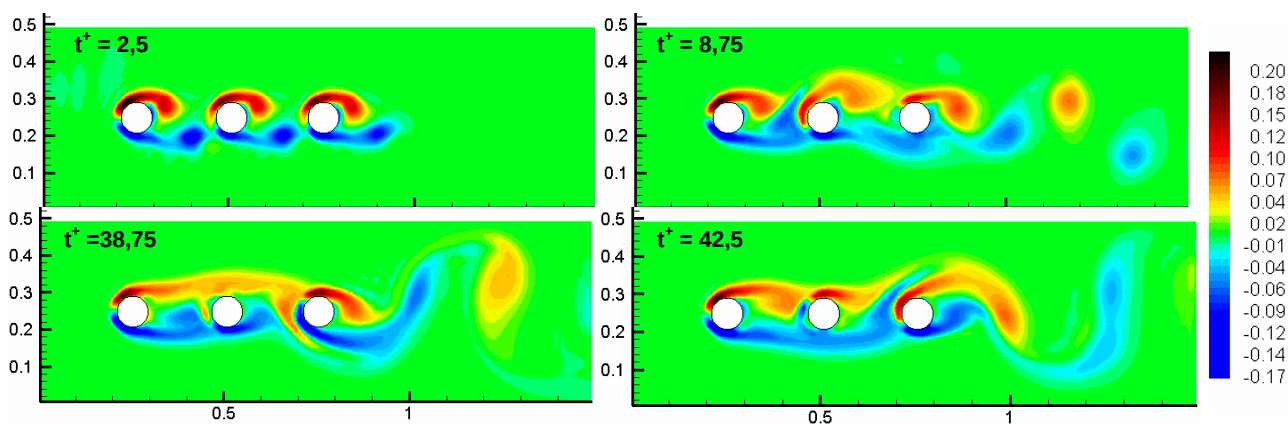


Figura 11 – Evolução temporal dos campos de vorticidade (m/(s.m)) para cilindros alinhados na longitudinal. Dados da simulação: $Re = 160$, $d = 0,08$ m; malha euleriana (50 x 150), malha lagrangeana de 40 pontos por objeto.

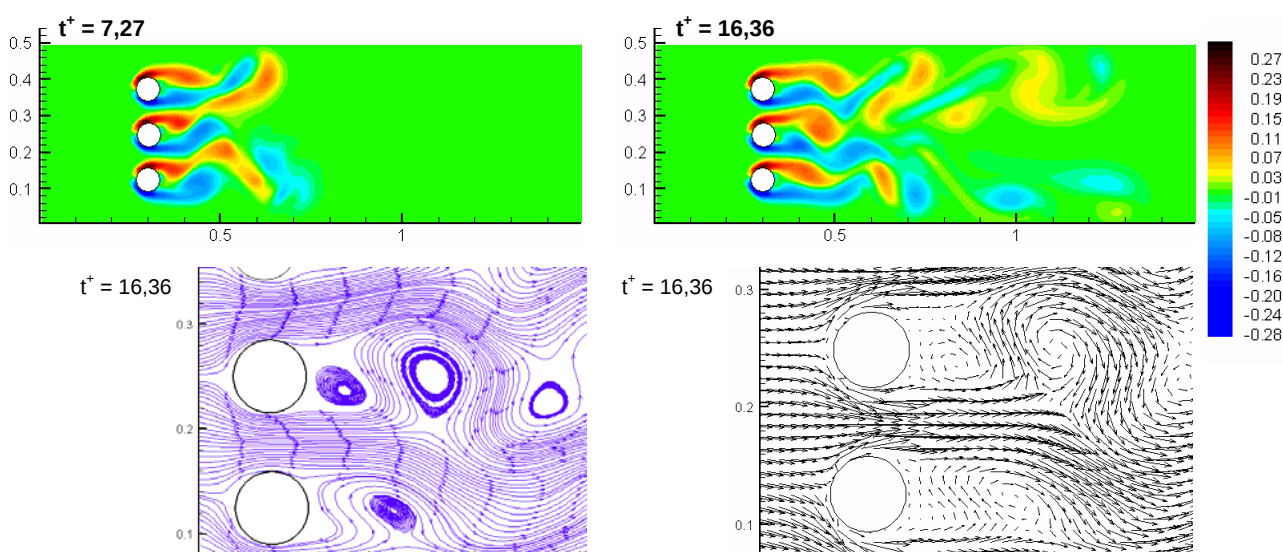


Figura 12 – Evolução temporal dos campos de vorticidade (m/(s.m)) para cilindros alinhados na vertical. Dados da simulação: $Re = 110$, $d = 0,055$ m; malha euleriana (50 x 150), malha lagrangeana de 40 pontos por objeto. Visualização das linhas de corrente e dos vetores de velocidade. Note-se a formação de jatos entre os objetos.

De uma maneira geral, percebe-se que a formação e o desenvolvimento das esteiras de vórtices foram devidamente capturados pela simulação. Nas figuras 7 a 12, o objeto foi destacado em branco apenas com o intuito de facilitar a visualização dos diversos escoamentos. Vale lembrar que, no modelo matemático, o objeto é substituído pelo campo de força. Especialmente interessantes são os resultados com vários objetos imersos, cuja disposição espacial torna uma discretização clássica do domínio (sem fronteira imersa) extremamente difícil. No caso de cilindros alinhados na direção preferencial do escoamento percebe-se que o encontro dos vórtices com os objetos induz à formação novas estruturas vorticosas após a colisão. No caso de cilindros dispostos perpendicularmente ao escoamento principal, percebe-se a formação de jatos nos vãos entre esses objetos.

A introdução de movimento no objeto é perfeitamente viável com o MFI. Nesse contexto, o papel do campo de força é induzir que as velocidades do objeto e das partículas de fluido sobre a fronteira se igualem. Note-se que, também nesse caso, há a tendência de se atingir a condição de não deslizamento. Na figura 13 ilustram-se resultados para um cilindro rotativo. Nesse caso, a rotação oscila entre os sentidos horário e anti-horário. Note-se que, dependendo do sentido de rotação, há alterações na direção eixo de geração de vórtices, o qual se desloca para cima (quando o objeto gira no sentido anti-horário), e para baixo (quando o giro ocorre no sentido horário).

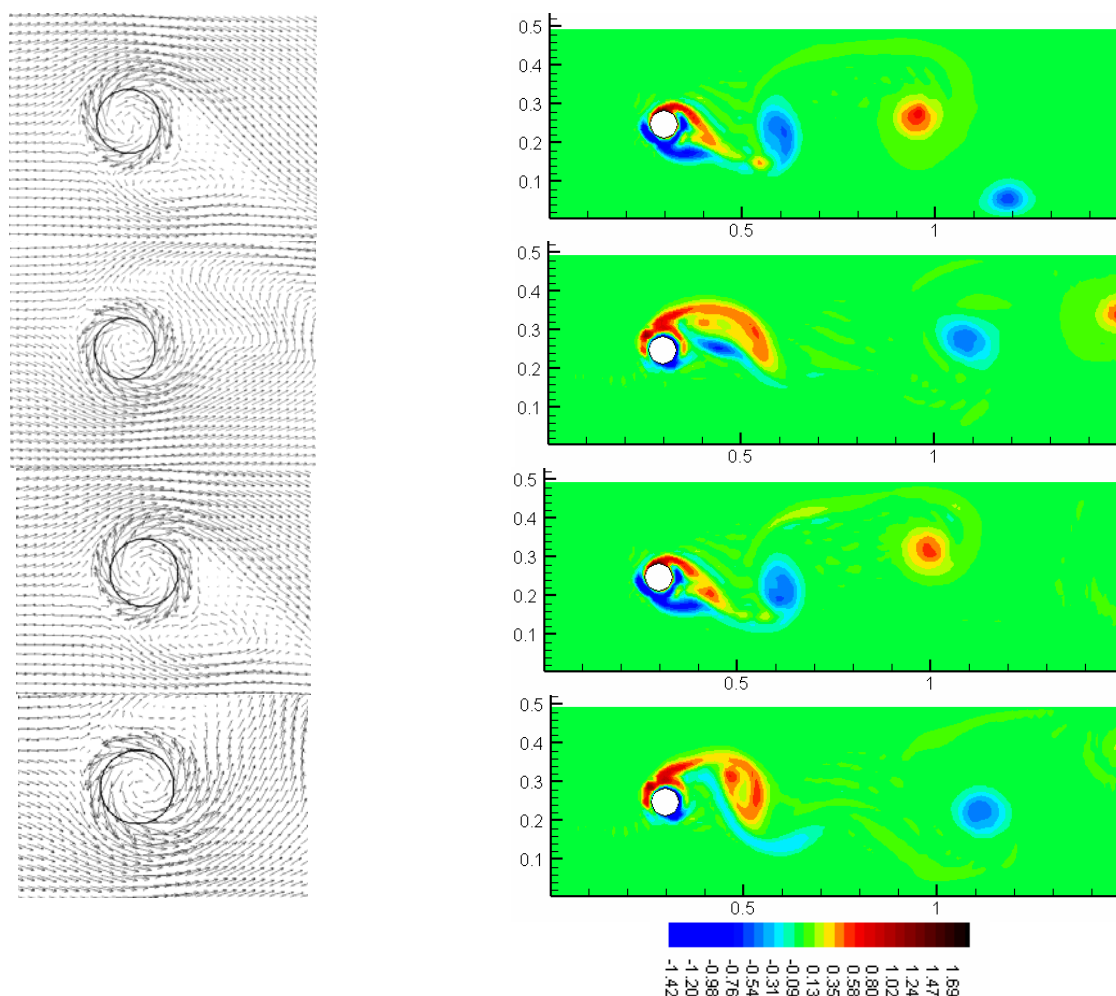


Figura 13 – Evolução temporal dos campos de vorticidade (m/(s.m)) para cilindro com rotação variável. Dados da simulação: $Re = 800$, $d = 0,08$ m; malha euleriana (50 x 150), malha lagrangeana de 40 pontos. Visualização dos vetores de velocidade na vizinhança da fronteira imersa.

4 – CONCLUSÕES

Este artigo procurou esclarecer as vantagens da modelagem e simulação de escoamentos externos mediante o uso do Método de Fronteira Imersa (MFI). Os resultados apresentados demonstram que casos reais de escoamentos são reproduzidos, substituindo a forma tradicional de modelagem por um campo de força que impõe virtualmente a condição de não deslizamento entre fluido e interface sólida. Assim, foram evidenciados campos de elevada pressão nos bordos de

ataque e queda de pressão nas regiões de elevada vorticidade. Também foi possível capturar a evolução espacial da esteira de vórtices, inclusive para situações complicadas de serem discretizadas de forma tradicional, como é o caso de vários objetos imersos. Apesar desse artifício matemático, observa-se, principalmente pela análise das linhas de corrente, que o campo de força euleriano impede a perfuração da fronteira imersa, isolando dois campos de velocidade, um interno e sem interesse final e o escoamento externo que se deseja simular. A introdução de movimentos do objeto também é viável. Nesse sentido o MFI assume potencial aplicação em problemas com geometrias irregulares e transientes.

BIBLIOGRAFIA

- ALAMY FILHO, J. E. (2006) Modelação numérica de processos de sedimentação em escoamentos turbulentos e análise da ressuspensão em canais. Tese (doutorado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 233 f., São Carlos, Brasil.
- FORTUNA, A. O. (2000) Técnicas computacionais para Dinâmica dos Fluidos: conceitos básicos e aplicações. Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo.
- GERMANO, M.; PIOMELLI, U.; MOIN, P.; CABOT, W.H. (1991) A dynamic sub-grid scale eddy viscosity model, *Physics of Fluids A*3, 7, pp.1760-1765.
- HUANG, Z.; OLSON, J. A.; KERÉKES, R. J.; GREEN, S.I. (2006) Numerical simulation of the flow around rows of cylinders. *Computers & Fluids*, 35, pp.485-491.
- LIMA E SILVA, A. L. F. (2002) Desenvolvimento e implementação de uma nova metodologia para modelagem de escoamentos sobre geometrias complexas: Método de Fronteira Imersa com Modelo Físico Virtual. Tese de doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Minas Gerais, Brasil.
- LIMA E SILVA, A. L. F.; SILVEIRA NETO, A.; DAMASCENO, J.J.R. (2003) Numerical simulation of two-dimensional flows over a circular cylinder using the immersed boundary method. *Journal of Computational Physics*, 189, pp.351-370.
- MATTHEWS, L. A.; GREAVES, D. M.; WILLIAMS, C.J.K., (2006) Numerical simulation of separated flow over flexible structural membranes, In: *European Conference of Computational Fluid Dynamics – ECCOMAS CFD 2006*, P. Wesseling, E. Oñate, J. Périaux (Eds), YU Delft, Delft The Netherlands.
- MÉTAIS, O.; LESIEUR, M. (1992) Spectral large-eddy simulations of isotropic and stably-stratified turbulence, *Journal of Fluid Mechanics*, 239, pp.157-194.
- PESKIN, C.S. (1977) Numerical analysis of blood flow in the heart, *Journal of Computational Physics*, 25, 200.
- TANEDA, S., HONJI, H. (1971) *J. Phys. Soc. Jpn.*, vol.30, n.1, 262.
- TANEDA, S. (1988) *Fluid Dynamics learned from images*, Asakura-Shoten.
- WANG, Q.; SQUIRES, K.D. (1996) Large-eddy simulation of particle deposition in a vertical turbulent channel flow. *Int. Journal of Multiphase Flow*, v.22, n.4, pp. 667-683.