

## Modelos para Operação de Sistemas de Reservatórios: Atualização do Estado da Arte

Henrique Vieira Costa Lima, Antônio Eduardo Leão Lanna

Instituto de Pesquisas Hidráulicas – UFRGS

henriquelim@terra.com.br, aelanna@terra.com.br

Recebido: 20/10/00 revisado: 25/02/02 aceito: 26/08/05

---

### RESUMO

*O uso de modelos matemáticos na análise de sistemas de recursos hídricos tem se desenvolvido bastante desde a década de 60. O acentuado desenvolvimento destes modelos devido ao advento e aos contínuos avanços da tecnologia dos computadores digitais torna imperativa uma atualização nas revisões bibliográficas anteriores sobre o tema. O presente artigo busca colaborar nesta linha de pesquisa esperando ajudar e, sobretudo, incentivar, novos estudos na área de pesquisa operacional, particularmente para sistemas de reservatórios de grande porte.*

**Palavras-chave:** Modelos matemáticos; pesquisa operacional.

---

### INTRODUÇÃO

O uso de modelos matemáticos na análise de sistemas de recursos hídricos tem se desenvolvido bastante desde a década de 60 (Maass et al., 1962). Biswas (1976) apud Andreu et al. (1991) afirmou que uma das principais razões para este desenvolvimento é o fato destes modelos serem a única maneira de se obter discernimento no planejamento e na operação de sistemas com certo grau de complexidade.

Segundo Labadie (1987), outras fortes razões para o acentuado desenvolvimento destes modelos foram o advento e os contínuos avanços da tecnologia dos computadores digitais. Estes avanços tecnológicos permitiram reduzir custos operacionais, aumentar a eficiência e a produtividade dos sistemas, e aumentar a confiabilidade dos resultados, possibilitando o estudo de sistemas considerados anteriormente inviáveis.

Loucks et al. (1981) introduzem as questões fundamentais para planejamento e análise de sistemas de recursos hídricos, com ênfase especial nas técnicas matemáticas de modelagem. Goodman (1984), Braga Jr. (1987) e Votruba (1988, 1989) também apresentam muitas metodologias para modelagem de sistemas de recursos hídricos.

Uma das principais áreas de aplicação dos modelos de análise de sistemas de recursos hídricos é no planejamento e na operação de sistemas de reservatórios. Yakowitz (1982) apresenta uma

discussão detalhada sobre operação de reservatórios através de programação dinâmica. Yeh (1985) revisa o estado-da-arte dos modelos para gerenciamento e operação de reservatórios. Siminovic (1992) resume e atualiza revisões anteriores. Wurbs (1996) apresenta uma compilação de modelos para análise de sistemas de reservatórios, tanto do ponto de vista quantitativo como do ponto de vista qualitativo.

A revisão da literatura sobre otimização de operação de reservatórios mostra que não existe um algoritmo geral para este fim. Yeh (1985) diz que a escolha da metodologia a ser utilizada em cada caso dependerá das características do sistema de reservatórios, da disponibilidade dos dados, e dos objetivos e restrições especificadas. Ko et al. (1992) apresentam diretrizes para escolha do método para operação de sistemas de reservatórios de grande porte sujeitos a não-linearidades e aleatoriedade das variáveis. Wurbs (1993) apresenta comparações entre diversos tipos de modelos de simulação, otimização e conjuntos (simulação-otimização), proporcionando diretrizes para uma melhor escolha da metodologia.

A classificação dos modelos pode ser feita através de várias características tais como o tipo de técnica de otimização empregado, as características das variáveis utilizadas (determinísticas ou estocásticas), e o tipo de regra de operação adotado (e.g., tabela, equação) (Karamouz et al., 1992). Segundo o tipo de otimização realizada, os métodos podem ser divididos em quatro grupos: programação linear, programação dinâmica,

programação não-linear e simulação. Combinações destes métodos têm sido relatadas na literatura (Yeh, 1985).

A revisão apresentada a seguir baseia-se nesta classificação, indicando-se dentro de cada grupo as formulações determinísticas e estocásticas.

A primeira etapa para o estudo de sistemas de reservatórios é a caracterização do problema. Esta consiste na definição dos objetivos e restrições do sistema, transformando a solução do problema na aplicação das diversas técnicas de pesquisa operacional (Yeh, 1985). Problemas complexos podem apresentar milhares de variáveis de decisão e restrições.

Como objetivos a serem atingidos pode-se ter a minimização dos custos de operação ou das perdas, ou a maximização dos benefícios advindos dos diversos usos atendidos pelo sistema. Isto deve ser obtido garantindo-se um número mínimo de falhas no atendimento das demandas previstas (Molinas e Tucci, 1987). As restrições típicas em reservatórios incluem as equações de conservação de massa (continuidade), armazenamentos máximos e mínimos, limitações impostas pelas tubulações e outros equipamentos, e as obrigações contratuais e institucionais as quais o sistema deve satisfazer (Yeh, 1985). Além destas, deve-se considerar que, qualquer que seja o horizonte para o qual se busca a operação ótima, o estado final do sistema deve garantir abastecimentos futuros.

O resultado procurado é a determinação da política de operação dos reservatórios que atinja os objetivos do problema, respeitando todas as restrições as quais ele está submetido. Em termos simples, política de operação é um conjunto de regras que determinam o armazenamento e a retirada de água do sistema nos diversos períodos de tempo (Bower et al., 1962).

Em geral, um modelo para análise de sistemas de recursos hídricos é representado matematicamente por:

$$\max \text{ (ou } \min) F(\mathbf{X})$$

$$\text{submetido a } g_i(\mathbf{X}) = b_i, i = 1, 2, \dots, m \quad (1)$$

onde  $F(\mathbf{X})$  é a função-objetivo, função esta que deve ser otimizada (maximizada ou minimizada);  $\mathbf{X}$  é o vetor de variáveis de decisão; e  $g_i(\mathbf{X}) = b_i$  são equações que representam as restrições na operação do sistema,  $b_i$  sendo parâmetros do modelo. Loucks et al. (1981) enfatizam que, por melhor que seja esta representação matemática, esta será uma aproximação do mundo real. A solução ótima obtida

pelo modelo é, portanto, ótima somente em relação à definição em particular. Isto é importante para limitar o significado da palavra “ótimo”, comumente usada pelos analistas de sistemas de recursos hídricos.

## MODELOS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

A técnica de programação linear tem sido amplamente utilizada para gerenciamento de sistemas de recursos hídricos. A técnica é um caso particular do modelo geral de otimização (Eq. 1), quando o conjunto de restrições e a função objetivo são lineares (Braga Jr., 1987).

O modelo geral de PL pode ser representado por :

$$\max \text{ (ou } \min) Z = \mathbf{C}^T \mathbf{X} \quad (2)$$

submetido a :

$$\mathbf{AX} \geq \mathbf{b}, \mathbf{X} \geq 0 \quad (3)$$

onde :  $\mathbf{C}$  é o vetor n-dimensional dos coeficientes da função-objetivo;  $T$  indica a operação matricial de transposição;  $\mathbf{X}$  é o vetor n-dimensional das variáveis de decisão;  $\mathbf{b}$  é o vetor m-dimensional de parâmetros do modelo;  $A$  é a matriz m x n dos coeficientes das restrições; n é o número de variáveis de decisão; e m é o número de restrições.

A aplicação de programação linear em recursos hídricos varia desde simples problemas de alocação de recursos até situações complexas de gerenciamento e operação envolvendo milhares de variáveis de decisão e restrições (Yeh, 1985). A teoria de programação linear pode ser encontrada em textos de pesquisa operacional tais como Wagner (1970) e Luenberger (1973). Loucks et al. (1981), Goodman (1984), Braga Jr. (1987), Labadie (1987), Votrubá (1988, 1989), Wurbs (1996), entre outros, apresentam aplicações em sistemas de recursos hídricos.

Yeh (1985) afirma que a programação linear tem sido uma preciosa ferramenta para otimização da operação de reservatórios. Enfatiza ele que as principais vantagens desta técnica são:

- I. a habilidade para se ajustar facilmente a problemas multidimensionais;
- II. a garantia de obtenção de valores ótimos globais;
- III. a não necessidade de uma política inicial de operação dos reservatórios; e

- IV. a existência de pacotes computacionais prontos para a resolução de problemas de programação linear.

A principal desvantagem dos métodos de PL é a hipótese de linearidade nas relações, particularmente na função-objetivo. Somente para um conjunto limitado de problemas esta hipótese pode ser aceita sem grande distorção da realidade. Yeh (1985) afirma que várias técnicas de linearização, tais como linearização por partes, expansões por séries de Taylor de primeira ordem e esquemas iterativos, podem ser usadas com sucesso. Loucks et al. (1981) afirmam que, utilizando-se de linearizações, a PL pode ser usada para maximizar funções côncavas, ou para minimizar funções convexas. Eles apresentam três métodos para linearização por partes. Vieira Neto (1991) descreve três métodos bastante simples sugeridos por Ramos (1981) para linearização de funções de custo.

Outra desvantagem das técnicas de PL é a otimização em um único estágio (representação estática), enquanto o sistema é dinâmico (variável no tempo). Conseqüentemente, torna-se necessária à repetição da otimização periodicamente, para considerar as mudanças no estado do sistema (Votrubá, 1988).

A solução de um problema de PL simples (duas variáveis de decisão) pode ser obtida através de gráficos como ilustra Braga Jr. (1987, pág. 466). Entretanto, o número de variáveis de decisão em problemas de planejamento e operação de sistemas de recursos hídricos é, em geral, muito superior a dois, inviabilizando a solução gráfica. O método simplex e suas variações (simplex revisado, simplex dual, etc.) têm sido, então, os mais utilizados na solução de PL aplicada a recursos hídricos. A explicação e aplicação dos métodos simplex podem ser encontradas em Braga Jr. (1987), Labadie (1987), entre outros.

Para problemas de grande escala, existem algoritmos mais eficientes do que o simplex, como é o caso do método primal-dual utilizado no modelo HOPDM (*“Higher Order Primal-Dual Method”*) apresentado por Gondzio e Makowski (1995). Comparando o HOPDM com um modelo baseado no simplex, estes autores concluíram que o aumento da dimensão do problema em geral favorece o método primal-dual. Nos casos estudados eles obtiveram economias de 10% a 30% no tempo de resolução.

Ainda para problemas de grande escala, Kuczera (1989) afirma que vários modelos de

programação linear podem ser formulados através de redes (*“Network Linear Programs”*), para os quais ele afirma serem possíveis códigos computacionais cem vezes mais rápidos do que os códigos de PL tradicional. Para ilustrar esta técnica, Kuczera mostra uma formulação em rede para um sistema de três reservatórios.

O modelo básico de programação linear tem sido estendido para tratar de alguns casos especiais de variáveis inteiras (Braga Jr., 1987). Esta extensão se aplica principalmente na análise de projetos de irrigação, conforme apresenta Labadie (1987). Trezos (1991) mostra uma aplicação da programação linear com inteiros na operação de reservatórios.

Vários são os pacotes computacionais genéricos para a resolução de problemas de PL. Wurbs (1996) cita que, além dos modelos incluídos em planilhas eletrônicas usuais (Excel, Quattro Pro), um dos mais utilizados é o modelo GAMS (*General Algebraic Modeling System*), inicialmente desenvolvido pelo Banco Mundial (*International Bank for Reconstruction and Development*). Atualmente o sistema é composto pelo GAMS/MINOS e pelo GAMS/ZOOM, além do pacote original (Wurbs, 1996) podendo ser utilizado na resolução de problemas lineares e não-lineares, estando disponíveis versões para microcomputadores, mainframes e estações de trabalho. O GAMS/MINOS (*Modular In-Core Nonlinear Optimization System*) tem a capacidade para resolução de problemas complexos tanto lineares como não-lineares. O GAMS/ZOOM (*Zero/One Optimization Model*) pode ser utilizado para resolução de programas de PL com inteiros.

Os modelos de programação linear podem ser determinísticos ou estocásticos. Os modelos determinísticos são os mais simples, nos quais se faz a hipótese de que as condições hidrológicas são perfeitamente conhecidas (Votrubá, 1988). Na realidade, porém, todos os parâmetros hidrológicos apresentam incertezas. Quando variáveis importantes do sistema apresentam tais incertezas, necessita-se de uma análise mais ampla para avaliar tanto o desempenho do sistema submetido a eventos aleatórios como a magnitude das perdas devido às falhas do sistema (Yeh, 1985). Embora as incertezas de alguns parâmetros possam ser suavizadas por uma análise de sensibilidade (Loucks et al., 1981), esta não considera as incertezas explicitamente, podendo não apresentar resultados satisfatórios (Yeh, 1985). Modelos estocásticos, apesar de aumentarem a complexidade da formulação, são então importantes para análise dos sistemas.

A revisão que segue não tem a intenção de cobrir todos os modelos existentes. Procurou-se apenas dar uma visão geral das possibilidades de aplicação da programação linear em recursos hídricos.

### Modelos Determinísticos de PL

Uma das mais remotas aplicações de programação linear na operação determinística de reservatórios ocorreu com Dorfman (1962). Com uma seqüência de exemplos com graus crescentes de complexidade, ele demonstrou como uma técnica de programação matemática pode ser de grande utilidade na análise de projetos de recursos hídricos.

Embora os modelos de PL determinística apresentem muitas limitações, importantes aplicações surgiram desde então, demonstrando a utilidade desta técnica (e.g., Windsor, 1973; Martin, 1983; Grygier e Stedinger, 1985; Ellis e ReVelle, 1988; Trezos, 1991; Crawley e Dandy, 1993). Yeh (1985) e Wurbs (1993,1996) apresentam outros modelos envolvendo programação linear determinística.

Windsor (1973) desenvolveu uma metodologia que emprega programação linear na otimização (minimização dos prejuízos) da operação de um sistema de múltiplos reservatórios para controle de enchentes. O autor afirma que embora as hipóteses simplificadoras do modelo por ele denominado PL recursiva distanciem-se bastante da realidade em alguns casos, a metodologia proporciona um grande avanço computacional em relação às metodologias existentes até então.

Grygier e Stedinger (1985) apresentam a comparação entre três modelos determinísticos de otimização — programação linear sucessiva (PLS), combinação de programação linear e programação dinâmica (PL-PD) e um algoritmo de controle ótimo — aplicando-os a um sistema de geração de força hidrelétrica composto de múltiplos reservatórios. O modelo de PLS apresentou os melhores resultados, pois, possuindo um esforço computacional semelhante ao dos demais métodos, foi o de mais fácil implementação e gerou soluções mais próximas do ótimo global.

A PLS consiste em sucessivas soluções de um problema de PL, buscando-se em cada nova solução, uma melhor aproximação linear para as não-linearidades do problema original. Maiores explicações da formulação e aplicação desta

metodologia podem ser encontradas em Martin (1983) e Grygier e Stedinger (1985).

Ellis e ReVelle (1988) apresentam o desenvolvimento de uma metodologia para transformar problemas não-lineares de maximização de geração de força hidrelétrica com funções não-separáveis em problemas lineares com funções separáveis que podem ser resolvidos por pacotes computacionais de programação linear já disponíveis. Para testar a metodologia, os autores obtiveram a solução de um problema não-linear em sua forma original e a compararam com a solução obtida pela nova metodologia. Eles concluíram que o grande valor desta nova metodologia reside no fato dela proporcionar uma maneira rápida e eficiente de se obter a solução inicial para ser utilizada em um modelo não-linear, diminuindo o tempo gasto na solução deste último.

Crawley e Dandy (1993) desenvolveram um modelo determinístico de PL para obter políticas de operação ótimas para o sistema de abastecimento da cidade de Adelaide, Austrália. O modelo teve por objetivo a minimização dos custos de bombeamento. A aplicação deste modelo proporcionou uma redução entre 5% e 10% nos custos. Atualmente este modelo é utilizado pelo *Engineering and Water Supply (EWS) Department*, órgão responsável pela operação do sistema.

Wurbs (1996) apresenta exemplos dos três principais tipos de aplicações da PL em sistemas de reservatórios. São elas:

- I. Análise da Vazão Firme, ou seja, a máxima vazão que pode ser retirada continuamente do sistema utilizando-se dados de uma série histórica. O autor ressalta que em problemas dessa natureza, deve-se especificar as condições de armazenamento inicial e final do sistema. Para solucionar esse problema, o autor sugere que a série histórica seja repetida várias vezes, fazendo-se que as características hidrológicas (e.g, vazão afluente) no intervalo de tempo seguinte ao intervalo final sejam igual a do primeiro intervalo da série histórica, podendo-se, neste caso, fazer-se que o armazenamento final seja igual ao inicial.
- II. Determinação das Retiradas de um Reservatório que maximize os benefícios; e
- III. Alocação de Água: na qual se usa a PL para alocação de água entre diversos usuários, seguindo prioridades estabelecidas previamente e de tal forma que se libere o

menor volume de água possível para o atendimento das demandas.

Entre as aplicações da programação linear nos casos especiais que utilizam variáveis inteiras, Trezos (1991) descreve um modelo e sua aplicação ao sistema *Big Creek* na Califórnia, EUA que consiste de seis reservatórios e é utilizado para geração de força hidrelétrica. Com variáveis de decisão mensais e horizonte de otimização anual, este modelo de otimização (maximização da produção de energia) da operação do sistema mostrou vantagens em relação à operação histórica.

### Modelos Estocásticos de PL

A programação linear tem sido amplamente utilizada na modelagem estocástica de sistemas de reservatórios, existindo diferentes metodologias tais como : PL estocástica com processos markovianos, programação estocástica com recurso, PL com restrição probabilística, entre outras (Siminovic, 1992).

Loucks et al. (1981) apresentam algumas formulações de programação linear estocástica para sistemas de recursos hídricos. Yeh (1985) apresenta uma extensa lista de aplicações de PL estocástica em gerenciamento e operação de reservatórios. Wurbs (1996) cita algumas aplicações da PL estocástica.

Loucks (1968) apud Wurbs (1996) apresenta um modelo estocástico para a operação de um reservatório isolado no qual determina a retirada do reservatório que minimiza a função-objetivo dada pela soma dos quadrados das diferenças entre as retiradas esperadas e os valores reais das mesmas.

Loucks e Falkson (1970) apresentam a incorporação da cadeia de Markov de primeira ordem em otimizações baseadas em programação linear e dinâmica. Os autores mostram as formulações dos modelos, os algoritmos de solução, as eficiências computacionais e algumas vantagens e limitações destas formulações.

Houck e Cohon (1978) também utilizaram um processo markoviano de retardo 1 (um) para representação dos escoamentos na elaboração do modelo SESLP (*“Sequential Explicitly Stochastic Linear Programming Model”*) para operação de sistemas de múltiplos reservatórios e múltiplos usos baseado em programação linear. Segundo os autores, este modelo pode ser utilizado tanto na fase de

planejamento como na de operação de sistemas de reservatórios, mas apresenta como grandes limitações o alto esforço computacional e a grande quantidade de dados necessária para sua utilização. Procurando diminuir tais limitações, Houck e Cohon utilizaram com sucesso um algoritmo denominado Scorpio (*“System Coordinated Performance-Individual Operation”*).

Em outra formulação de programação estocástica, modelos baseados em programação linear são ampliados para que as variáveis aleatórias, além de estarem presentes na função-objetivo, apareçam também nas equações de restrição. Yeh (1985) discute e apresenta algumas aplicações deste tipo de formulação denominada programação estocástica com recurso, às vezes também chamada de programação estocástica em dois estágios. Yeh (1985) enfatiza que, qualquer que seja o problema, a aplicação desta metodologia apresenta grandes dificuldades.

Uma terceira alternativa dentro dos modelos estocásticos de programação linear é a PL com restrições probabilísticas. Segundo Strobel (1983), o método de restrições probabilísticas consiste em permitir violações das equações de restrições com uma certa probabilidade, fixada exteriormente e conhecida como nível de risco. Yeh (1985) apresenta a formulação desta técnica e algumas aplicações na operação de reservatórios. Hogan et al. (1981) apud Yeh(1985) afirmam que esta técnica tem sua aplicabilidade bastante comprometida por não considerar explicitamente nenhuma penalidade para as violações das restrições e por não apresentar, mesmo implicitamente, um recurso para corrigir estas violações. Strobel (1983) apresenta um exemplo de aplicação de um modelo modificado de PL com restrições probabilísticas, no qual incorpora uma regra de decisão linear. Diversos outros autores mostram variações desta metodologia (e.g., Houck e Datta, 1981; Joeres et al. 1981; Siminovic e Mariño, 1980; Sniedovich, 1980; entre outros).

Yeh (1985) enfatiza que a principal tarefa das metodologias de programação estocástica em problemas de tomada de decisão sujeitos a incertezas, como é o caso da operação de sistemas de reservatórios, é a determinação da formulação determinística equivalente. Obtendo-se sucesso nesta tarefa, os procedimentos padrões de otimização matemática podem ser utilizados. Se o modelo determinístico equivalente não puder ser encontrado, a simulação através do método de Monte Carlo aparece como a alternativa mais viável (Yeh, 1985).

## MODELOS DE PROGRAMAÇÃO DINÂMICA

A maioria dos problemas operacionais de recursos hídricos tem as decisões levadas a cabo de forma seqüencial no tempo e no espaço, facilitando a sua solução. A programação dinâmica, poderoso e elegante método de pesquisa operacional, explora essa característica. Bellman (1957) apud Yakowitz (1982) definiu programação dinâmica como sendo a teoria dos processos de decisão em múltiplos estágios.

Segundo Yeh (1985), a programação dinâmica é aplicável a problemas de planejamento e operação de reservatórios já que estes podem ser representados em estágios seqüenciais. Votrubá (1988) afirma que a meta de modelos de PD para operação de reservatórios é a determinação da política de operação para todo o processo, política esta que maximize ou minimize uma função-objetivo. O processo é dividido em estágios geralmente com referência ao tempo.

Assim como a programação linear, a teoria da programação dinâmica pode ser encontrada em textos de pesquisa operacional tais como Nemhauser (1966), Wagner (1970), e Dreyfus e Law (1977). Aplicações em sistemas de recursos hídricos podem ser encontradas em Loucks et al. (1981), Yakowitz (1982), Goldman (1984), Yeh (1985), Labadie (1987), Votrubá (1988), Wurbs (1996), entre outros.

Segundo Labadie (1987), as principais vantagens da programação dinâmica são:

- I. A possibilidade de otimização de processos dinâmicos;
- II. A possibilidade de ter relações funcionais, tanto da função-objetivo como das restrições, extremamente não-lineares, não-convexas e até descontínuas. Isso permite representar o comportamento real do sistema, sem necessidade de aproximações (linearizações); e
- III. Ao contrário de outras técnicas matemáticas de programação, a PD produz normas de decisão retroalimentadas, o que permite tomadas de decisão em qualquer etapa do sistema.

Yeh (1985) afirma que a popularidade e o sucesso da PD podem ser atribuídos à relativa facilidade de serem incluídas nos modelos características não-lineares e estocásticas, tão comuns em sistemas de recursos hídricos.

A grande desvantagem dos modelos de programação dinâmica é a dimensionalidade dos problemas. Votrubá (1988) mostra por meio de exemplificação, só ser possível, através das técnicas convencionais de PD, a resolução de sistemas de recursos hídricos com no máximo quatro reservatórios. Loucks et al. (1981) afirmam que a dimensão de um problema de PD cresce linearmente com o número de estágios mas exponencialmente com o número de variáveis de estado (dimensão do vetor-estado). Este problema ficou conhecido como a “maldição” da dimensionalidade.

Nas últimas três décadas, diversos algoritmos têm sido criados na tentativa de superar esta “maldição”. Chow et. al. (1975) analisam o tempo computacional e a quantidade de memória requeridos para a solução de dois algoritmos de programação dinâmica — a PD convencional ou discreta (PDD) e a PD diferencial discreta (PDDD). Eles mostram ser impossível a resolução de problemas de grande escala através da PD convencional, mas que é possível diminuir os esforços computacionais através da criação de novos algoritmos, como a PD diferencial discreta. Essa possibilidade e os avanços na tecnologia dos computadores digitais têm incentivado cada vez mais as pesquisas de modelos que empreguem programação dinâmica.

As linhas gerais da formulação de um problema de programação dinâmica em recursos hídricos são apresentadas a seguir. Não existe um formato padrão, sendo a PD mais uma forma de analisar um problema do que uma técnica de otimização matemática, podendo, portanto, assumir as mais variadas formas (Braga Jr., 1983). Yeh (1985) afirma que parte da arte da resolução de um problema de PD reside em encontrar a formulação mais eficiente para um problema conhecido. Maiores informações podem ser encontradas em Loucks et al. (1981), Goodman (1984), Braga Jr. (1983, 1987), Labadie (1987) e Wurbs (1996).

A primeira etapa na formulação de um problema de PD é a definição das etapas seqüenciais do problema. Para o caso típico de operação de reservatórios, estas etapas são os intervalos de tempo no horizonte operacional (Labadie, 1987).

Em seguida devem ser definidas as variáveis do problema, as quais pertencerão a dois grupos: variáveis de decisão (ou controle) e variáveis de estado. As variáveis de decisão são independentes enquanto as de estado são dependentes, tendo seus valores calculados em função das anteriores. Em problemas típicos de operação de reservatórios, as

variáveis de decisão e de estado são as retiradas e os armazenamentos em cada etapa (intervalo de tempo), respectivamente.

A terceira das etapas da PD é a definição da equação de estado para o sistema, equação esta que relaciona a variável de estado na etapa  $t+1$  com as variáveis de estado e decisão para a etapa  $t$  anterior. Para operação de reservatórios a equação de estado freqüentemente expressa o balanço de massa ou de energia do sistema em análise (Labadie, 1987).

Labadie (1987) apresenta dois requisitos para aplicação da programação dinâmica. O primeiro é que a função-objetivo seja separável, isto é, composta de funções-objetivo (ou funções de retorno) individuais para cada etapa, funções estas que sejam dependentes das variáveis de estado e/ou de decisão da etapa. Não existem restrições quanto à estrutura das funções-objetivo individuais. O segundo requisito é que as restrições sejam individuais, ou seja, cada uma delas deve estar associada com apenas uma etapa.

Entre os poucos pacotes computacionais genéricos que utilizam programação dinâmica, pode-se destacar o pacote desenvolvido por Labadie na Universidade do Colorado - EUA denominado CSUDP. Esse pacote tem sido utilizado com sucesso em diversas aplicações de PD no planejamento e gerenciamento de problemas de recursos hídricos (Wurbs, 1996). O pacote, disponível em FORTRAN e C++ permite ao usuário a criação de sub-rotinas nas quais o mesmo caracterize a função-objetivo e as restrições do problema em análise.

Assim como os modelos de programação linear, os de programação dinâmica também podem ser divididos em determinísticos e estocásticos. Seguindo esta classificação, apresenta-se a seguir diversos algoritmos de PD e suas aplicações em sistemas de recursos hídricos, dando-se ênfase aos problemas de operação de reservatórios. Da mesma forma feita para os modelos de programação linear, a revisão que segue não tem a intenção de cobrir todos os modelos existentes. Procurou-se apenas dar uma visão geral das possibilidades de aplicação da programação dinâmica em recursos hídricos.

### Modelos Determinísticos de PD

Um modelo determinístico de programação dinâmica, ou um processo determinístico de decisão em múltiplos estágios (também denominado de problema de controle ótimo), é caracterizado por um estado inicial  $x_1$  e pelas funções  $f_t$  e  $L_t$  definidas como se segue. As funções  $f_t$  determinam as relações

entre as variáveis de controle  $u_t$  e as de estado  $x_t$  de acordo com:

$$x_{t+1} = f_t(x_t, u_t) \quad 1 \leq t \leq N \quad (4)$$

As variáveis  $x_t$  e  $u_t$  são vetores reais  $n$ -dimensionais e  $m$ -dimensionais, respectivamente, onde  $n$  é o número de variáveis de estado e  $m$  o número de variáveis de controle. As funções  $f_t(x, u)$  são denominadas de equações dinâmicas. As funções  $L_t(x, u)$  são as funções de retorno individuais para cada estágio.

Com uma seqüência  $\mathbf{u} = \{u_t\}$  de variáveis de controle, seqüência esta conhecida como política operacional, pode-se definir a função de retorno para todo o processo por:

$$J(\mathbf{u}) = \sum_{t=1}^N L_t(x_t, u_t) \quad (5)$$

A meta do problema de controle ótimo é determinar a política de operação  $\mathbf{u}^*$  que minimize (ou maximize) a função  $J(\mathbf{u})$ . A política de operação ótima  $\mathbf{u}^*$  tem que estar no conjunto de políticas operacionais possíveis para o problema. Este conjunto é definido pelas equações de restrição:

$$g_t(x_t, u_t) \leq 0, \text{ com } 1 \leq t \leq N \quad (6)$$

O procedimento tradicional para resolução do problema de programação dinâmica ocorre pela solução recursiva da função  $V_t(x)$ , denominada por Bellman (1957) apud Yakowitz(1982) de equação funcional. Isto se faz pela sucessiva determinação dos valores ótimos das funções  $V_N(x)$ ,  $V_{N-1}(x)$ , ...,  $V_1(x)$ , através da seguinte equação recursiva:

$$V_t(x) = \min(\max)[L_t(x, u) + V_{t+1}(f_t(x, u))] \quad t = N, N-1, \dots, 1 \quad (7)$$

onde  $V_{N+1} \equiv 0$ . A minimização (ou maximização) é com respeito às variáveis de controle  $u$  que satisfazem as equações (6). Pode-se provar que a política de operação ótima obtida,  $\mathbf{u}^*$ , é um ótimo global (Yakowitz, 1982).

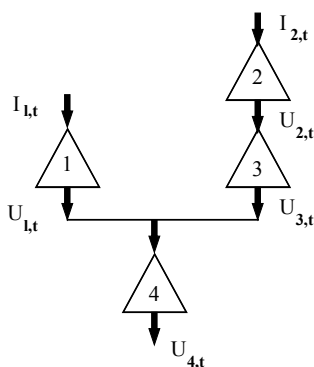
O primeiro algoritmo para resolução computacional do problema determinístico de PD acima descrito foi apresentado por Bellman e Dreyfus (1962) e é hoje denominado de programação dinâmica discreta (PDD). A grande

difficuldade deste algoritmo é a “maldição” da dimensionalidade, já comentada anteriormente. Labadie (1987) apresenta uma boa descrição deste algoritmo. Desde então, diversos algoritmos e aplicações, tanto determinísticos como estocásticos, têm surgido buscando principalmente a superação da “maldição” da dimensionalidade. Yakowitz (1982), Yeh (1985), Siminovic (1992) e Wurbs (1996) citam uma grande quantidade destes algoritmos e suas aplicações em recursos hídricos.

A primeira aplicação de um modelo de PD determinístico em operação de reservatórios ocorreu com Young (1967) que estudou a operação ótima para um reservatório singular com horizonte finito Yakowitz (1982). Roefs e Bodin (1970) estenderam a aplicação para o caso de múltiplos reservatórios. Nestes trabalhos, os autores utilizaram o algoritmo de PD discreta.

Os algoritmos desenvolvidos posteriormente para superar as limitações da PD discreta podem ser chamados em conjunto de métodos de aproximações sucessivas, ou na terminologia da análise numérica, de métodos iterativos (Murray e Yakowitz, 1979). Como tais, a solução ótima global pode não ser obtida, devendo-se analisar os resultados com cautela.

Heidari et al. (1971) propuseram um esquema computacional denominado de programação dinâmica diferencial discreta (PDDD). Os autores aplicaram este novo algoritmo em um problema hipotético contendo quatro reservatórios (figura 1). Eles mostraram que com a aplicação da PDDD obtém-se uma grande redução no esforço computacional em relação à PD discreta. Entretanto, a PDDD ainda exige um grande esforço computacional (Murray e Yakowitz, 1979) e, sob certas condições, esta pode convergir para uma solução não-ótima Turgeon (1982).



**Figura 1 - Configuração do problema hipotético com quatro reservatórios.**

Larson (1968) apud Murray e Yakowitz (1979) desenvolveram o método denominado programação dinâmica com estado incremental. Este método, conhecido entre os hidrólogos por programação dinâmica de aproximação sucessiva (PDAS), foi refinado e explorado por Trott e Yeh (1973) que aplicaram a PDAS em um sistema com seis reservatórios. A vantagem deste algoritmo é que a solução do problema de dimensão seis é obtida através da resolução de uma série de problemas unidimensionais, reduzindo consideravelmente as necessidades computacionais. A grande desvantagem da PDAS é que a convergência para um ótimo global não pode ser demonstrada genericamente (Trott e Yeh, 1973). Entretanto, a convergência para um ótimo global foi demonstrada por Korsak e Larson (1970) apud Trott e Yeh (1973) para três casos particulares de problemas de controle ótimo, discretos no tempo, com o número de variáveis de controle igual ao de variáveis de estado e nos quais os subproblemas possuíam apenas uma variável de estado.

Outra maneira de aliviar a “maldição” da dimensionalidade em problemas de PD determinísticos é através do algoritmo desenvolvido por Jacobson e Mayne (1970) denominado de programação dinâmica diferencial (PDDif). Yakowitz (1989) apresenta uma visão geral do desenvolvimento deste algoritmo, permitindo uma avaliação das possibilidades de aplicação desta metodologia em problemas de tomada de decisão. Murray e Yakowitz (1979) apresentaram uma modificação para a PDDif que torna esta técnica aplicável a problemas de controle de sistemas de múltiplos reservatórios. Segundo estes autores, esta metodologia é superior a todas as demais, pois não apresenta várias das limitações presentes em todas as técnicas de aproximações sucessivas existentes até então, ou seja, a PDDif : i) não sofre da “maldição” da dimensionalidade; ii) não necessita da discretização das variáveis de estado e de controle; e iii) não necessita agrupamento de estágios. Para confirmar a aplicabilidade da metodologia em grandes sistemas de recursos hídricos, Murray e Yakowitz (1979) apresentam sua aplicação a dois sistemas hipotéticos: o sistema com quatro reservatórios apresentados na figura 1 e um sistema contendo dez reservatórios.

Turgeon (1981) apresentou um algoritmo de programação dinâmica com otimização progressiva e sua aplicação a um sistema com quatro reservatórios em série. As principais vantagens deste algoritmo, segundo o autor, são : i) as variáveis de estado não precisam ser discretizadas; ii) a hipótese



de convexidade da função-objetivo, necessária em técnicas de programação não-linear, não é necessária e mesmo funções descontínuas são aceitas; e iii) ao contrário de outros métodos de aproximações sucessivas, um ótimo global é encontrado. Zessler e Shamir (1989) utilizaram esta mesma metodologia na determinação da política de operação para um sistema com oito reservatórios.

Segundo Ozden (1984), as grandes desvantagens dos algoritmos apresentados por Murray e Yakowitz (1979) e por Turgeon (1981) são: a função-objetivo tem que ser diferenciável e as funções de restrição têm que ser lineares. Ozden (1984) apresenta, então, um algoritmo, também baseado em PD, que supera tais desvantagens, permitindo que a função-objetivo e as funções de restrição possam ter qualquer forma. O próprio autor ressalta, entretanto, que a convergência para um ótimo global só pode ser garantida se a função-objetivo for convexa.

### Modelos Estocásticos de PD

A principal diferença de um modelo estocástico de programação dinâmica e o modelo determinístico básico apresentado na seção anterior reside nas equações dinâmicas  $f_t(x, u)$ . Na versão estocástica, estas são substituídas por “funções de transição probabilísticas”,  $p_t(y; x, u)$ , as quais para valores fixos de  $x$ ,  $t$  e  $u$  são funções de densidade de probabilidade em  $y$ . Estas funções são utilizadas para especificar a distribuição de probabilidade do estado aleatório  $X_{t+1}$  se no estágio  $t$ , o estado é  $x$  e o controle  $u$  é aplicado (Yakowitz, 1982).

Uma “estratégia”  $S$  é definida como uma seqüência de funções que, para cada estado  $x$  e estágio  $t$ , seleciona uma política de operação possível,  $u_t = S_t(x)$ . A estratégia  $S$  tendo sido selecionada para um dado problema estocástico de controle ótimo, a lei de probabilidade para os estados  $X_2, \dots, X_N$  é unicamente determinada e o valor esperado de :

$$J(S) = E\left[\sum_{t=1}^N L_t(X_t, X_{t+1}, S_t(X_t))\right] \quad (8)$$

é bem conhecido. A “solução” do problema estocástico de controle ótimo é a estratégia  $S^*$  que minimiza (ou maximiza)  $J(S)$ .

O conceito de equação funcional se aplica também, com pequenas modificações, ao problema estocástico de controle ótimo. No caso estocástico, ela toma a seguinte forma:

$$V_t(x) = \min(\max)\left[\int (L_t(x, y, u) + V_{t+1}(y))p_t(y, x, u)dy\right] \quad (9)$$

onde  $V_{N+1}(x) = 0$  para todo  $x$ . Yakowitz (1982) apresenta maiores informações sobre esta formulação.

A formulação estocástica da programação dinâmica, em especial aquela que considera as aleatoriedades explicitamente, aumenta bastante a complexidade dos algoritmos e, conseqüentemente, o tempo de execução e a memória requeridos têm aumentos consideráveis. Encorajados pelos avanços na tecnologia dos computadores digitais, muitos pesquisadores têm se dedicado, nos últimos quinze anos, à pesquisa da programação dinâmica estocástica (PDE). A aplicação da PDE em sistemas de reservatórios reais de grande porte ainda apresenta, porém, sérias limitações.

Apesar da maior complexidade dos algoritmos de PD estocástica, as primeiras aplicações na operação de reservatórios surgiram mais de uma década antes das aplicações de PD determinística, quando Masse (1946) e Little (1955) (citados por Yakowitz (1982)) aplicaram a PDE na operação de um reservatório singular.

Yakowitz (1982), Yeh (1985) e Siminovic (1992) apresentam vários algoritmos de PDE e suas aplicações em sistemas de recursos hídricos. Sem querer cobrir toda a gama de modelos existentes, apresenta-se a seguir uma pequena revisão da evolução dos algoritmos de PDE, em especial de suas aplicações na operação de sistemas de reservatórios.

Yakowitz (1982) afirma que, até aquela época, poucos eram os algoritmos de PDE existentes e a maioria das aplicações fazia uso da PD discreta (PDD). Algoritmos de PDD, entretanto, possuem grande influência da dimensão dos sistemas, sendo praticamente inviável a solução de sistemas com dimensão superior a dois, principalmente se as variáveis em questão forem consideradas estocásticas. A diferença nas aplicações até aquela época residia principalmente no modelo para representação das aleatoriedades das variáveis. Sobre este fato, Yakowitz (1982) mostra não haver concordância entre os pesquisadores na definição do melhor modelo.

Gal (1979) apresentou um método denominado de programação dinâmica estocástica paramétrica (PDEP), utilizando-o para obter uma aproximação da política ótima de operação de um sistema de três reservatórios. A eficiência desta nova metodologia foi comprovada pela comparação dos resultados obtidos com ela e os obtidos utilizando-se

um modelo de PD discreta. A PDEP, por diminuir os problemas com a dimensionalidade, pode ser utilizada em problemas de maior porte, mas ao contrário da PD discreta, não é totalmente automática, exigindo que o operador possua um bom conhecimento do funcionamento do sistema em análise.

Buscando políticas de operação ótimas para sistemas de múltiplos reservatórios utilizados para geração de energia hidrelétrica, Turgeon (1980) apresentou dois modelos baseados em programação dinâmica denominados método “*one-at-a-time*” e método agregação/decomposição. O primeiro consiste em dividir o problema original  $n$ -dimensional em  $n$  subproblemas unidimensionais em série que são resolvidos por programação dinâmica. O segundo consiste em dividir o problema original  $n$ -dimensional em  $n$  subproblemas de otimização estocástica com duas variáveis de estado (bidimensionais) que também são resolvidos por programação dinâmica. As metodologias foram aplicadas pelo autor em um sistema de seis reservatórios, tendo o segundo modelo apresentado melhores resultados.

Turgeon (1981) apresentou um modelo similar ao método agregação/decomposição, aplicando-o em um sistema de quatro reservatórios em série. Neste modelo, denominado pelo autor de método de decomposição para operação de sistemas de múltiplos reservatórios, a política de operação obtida é subótima. Tal fato, entretanto, não pode ser considerado uma grande limitação do modelo, pois, em sistemas de grande porte, é difícil encontrar uma política ótima de operação (Turgeon, 1981).

Trezos e Yeh (1987) apresentam o desenvolvimento de um modelo estocástico de PD Diferencial (PDEDif). A PDEDif apresentada por estes autores é uma extensão do modelo determinístico de PD diferencial desenvolvido por Murray e Yakowitz (1979). Evitando a discretização das variáveis de controle e de estado, a PDEDif é uma poderosa técnica de PD, permitindo a análise de sistemas de grande porte. O trabalho de Trezos e Yeh (1987) é, entretanto, apenas um dos primeiros passos no desenvolvimento de modelos estocásticos mais elaborados de PD, sendo ainda necessária uma grande quantidade de pesquisas de otimização estocástica para aplicações de modelos desta natureza em sistemas reais de grande porte.

Tai e Goulter (1987) desenvolveram uma técnica heurística baseada em PD estocástica para análise da operação de três reservatórios dispostos em “Y”, ou seja, dois reservatórios em paralelo

ligados em série a um terceiro reservatório à jusante. A formulação básica da PD estocástica utilizada neste modelo é a mesma apresentada para reservatório singular por Loucks et al. (1981). O resultado da aplicação desta metodologia mostrou-se similar ao obtido com a operação do sistema baseada em dados históricos.

Foufoula-Georgiou e Kitanidis (1988) apresentam o desenvolvimento do modelo por eles denominado de programação dinâmica estocástica com gradiente (PDEG) utilizado para controle ótimo de sistemas multidimensionais de reservatórios separáveis em estágios no tempo. Acreditam os autores que a PDEG é uma valiosa ferramenta para problemas estocásticos multidimensionais, pois antes dela, a resolução de problemas de PD explicitamente estocástica só era possível através da PD discreta, que é muito influenciada pela dimensão do sistema em análise (“maldição” da dimensionalidade). Resultados da utilização da PDEG na análise de um sistema de quatro reservatórios são apresentados pelos autores. Eles afirmam, entretanto, que a PDEG não resolveu por completo o problema da otimização estocástica, sendo apenas mais um passo no desenvolvimento de algoritmos de PDE. Ressaltando que nenhum método de otimização poderá ser o melhor para todos os tipos de sistemas possíveis, os autores sugerem que pesquisas que comparem os métodos disponíveis para diversos tipos de classes de problema sejam feitas, conhecendo-se assim o método mais atrativo, em termos de precisão e eficiência computacional, para situações particulares.

Kelman et al. (1990) apresentam uma variação da PDE por eles denominada programação dinâmica estocástica amostral (PDEA). Ao contrário de outros algoritmos de PDE, a complexa estrutura espacial e temporal dos escoamentos não é modelada explicitamente na PDEA, e sim, implicitamente capturada por um grande número de seqüências de escoamentos (amostras), observadas ou estocasticamente geradas, conhecidas como cenários de escoamento. Os autores ilustram a performance desta metodologia através de um estudo de caso usando o sistema hidrelétrico *North Fork no Feather River* na Califórnia, obtendo melhores resultados do que os obtidos através da PDE tradicional.

Piccardi e Soncini-Sessa (1991) apresentam modificações possíveis nos algoritmos de PDE para se tirar proveito das arquiteturas dos computadores mais modernos, permitindo soluções mais rápidas e mais precisas. Duas conclusões do trabalho destes

autores valem ser ressaltadas : i) a densidade da discretização das variáveis de estado, necessária em vários algoritmos de PDE, afeta consideravelmente a solução dos problemas e ii) a hipótese de escoamentos correlacionados ou não ocasiona substanciais diferenças nos resultados da análise de sistemas reais, onde os escoamentos certamente apresentam correlações.

Karamouz e Vasiliadis (1992) apresentam o modelo de PDE por eles denominado de programação dinâmica estocástica bayesiana (PDEB). Esta metodologia faz uso das técnicas de programação dinâmica e da teoria bayesiana de decisão (TBD) na obtenção de políticas de operação ótimas para sistemas de reservatórios. A incorporação da TBD em um modelo de PDE permite a constante atualização das previsões das variáveis hidrológicas, reduzindo as incertezas presentes nos modelos de previsão. Para verificar o valor da PDEB, os autores compararam sua performance com as performances de um modelo de PD convencional (PDE discreta) e do modelo desenvolvido por Kelman et al. (1990), obtendo resultados satisfatórios.

Vasiliadis e Karamouz (1994) apresentam uma atualização do modelo de PDEB. A diferença básica entre a nova metodologia e a PDEB é a inclusão da demanda como variável de estado, permitindo a obtenção de políticas de operação mais realistas e eficientes. Os autores afirmam que, comparando a performance dos dois modelos, pode-se afirmar que um modelo de otimização que considera as demandas como fixas não apresenta bons resultados quando as demandas são variáveis.

Pereira e Codner (1996) apresentam um modelo de PDE visando determinar regras de operação baseadas em níveis-meta para o de abastecimento urbano da cidade de Melbourne na Austrália. Níveis Metas (ou curvas guia) de um sistema de reservatórios especifica a distribuição espacial do armazenamento entre os reservatórios do sistema (Souza Filho e Porto, 1997). As principais características destas curvas podem ser encontradas no texto dos próprios autores.

## MODELOS DE PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR

A programação não-linear (PNL) não tem a popularidade dos modelos de programação linear e dinâmica na análise de sistemas de recursos hídricos. Segundo Yeh (1985), isto ocorre principalmente porque as resoluções computacio-

nais de modelos de PNL, se comparadas com as de modelos de PL e PD, são lentas e exigem uma grande capacidade de armazenamento de dados. Além disso, ao contrário dos modelos de PD, a PNL não apresenta a facilidade de incorporação da natureza estocástica das variáveis hidrológicas. A PNL possibilita, entretanto, uma formulação matemática mais genérica, permitindo a análise de sistemas de recursos hídricos com funções-objetivo não-separáveis e restrições não-lineares, o que não é possível com outras técnicas de otimização.

As técnicas de programação não-linear mais conhecidas são a programação quadrática e a programação geométrica. Decidiu-se incluir neste item também, em especial pela não inclusão de limitações na formulação dos problemas, as técnicas de Redes Neurais, Algoritmos Genéticos e Lógica Fuzzy (Lógica Nebulosa), denominadas em conjunto de *Sistemas Inteligentes* e que vêm ganhando destaque nas pesquisas mais recentes sobre operação de sistemas de reservatórios.

Os poucos trabalhos baseados nestas técnicas existentes na área de recursos hídricos mostram que alguns algoritmos geram bons resultados, mas as velocidades de convergência a uma solução ótima e as exigências computacionais impedem suas aplicações em sistemas de grande porte (Yeh, 1985). Com o desenvolvimento da tecnologia dos computadores digitais, análises de grandes sistemas de recursos hídricos através de algoritmos de PNL vêm se tornando possíveis, motivo pelo qual tem havido um maior número de pesquisas de algoritmos de PNL.

Yeh (1985), Siminovic (1992) e Wurbs (1996) apresentam alguns exemplos de aplicações de PNL com programação quadrática e geométrica em sistemas de recursos hídricos. Jun and Jing (?) apresentam um modelo para operação de reservatórios com redes neurais artificiais. Galvão e Valença (1999) apresentam várias aplicações de técnicas de *Sistemas Inteligentes* em recursos hídricos e ciências ambientais.

## Sistemas Inteligentes

O termo “Sistemas Inteligentes” tem sido aplicado a sistemas computacionais pertencentes a uma grande área de estudo da Informática, originalmente denominada Inteligência Artificial. Mais recentemente essa área tem recebido outras denominações, como Inteligência Computacional ou Computação Inteligente. O adjetivo “inteligente” parece pretensioso: um exame mais acurado dos métodos mostra que são sistemas inspirados no

comportamento humano ou da natureza, ou que tentam reproduzi-los, mas estão longe de apresentarem um comportamento que, realmente, se possa classificar de inteligente. Apesar desta ressalva, têm encontrado grande aceitação em variadas aplicações a diversas áreas do conhecimento, muitas vezes superando o desempenho dos convencionais.

Em recursos hídricos e demais ciências ambientais, os Sistemas Computacionais Inteligentes encontram aplicações sobretudo em modelagem, previsão, otimização, operação e controle. São alternativas ou complementos às técnicas consagradas da estatística, pesquisa operacional e modelagem numérica.

A análise da aplicabilidade destas técnicas na operação de sistemas de reservatórios é alvo atual das pesquisas dos autores do presente artigo. Por ser um assunto extenso, com estruturação matemática diferente dos modelos clássicos de Pesquisa Operacional, a descrição dos métodos e aplicações será apresentada em artigo posterior.

## MODELOS DE SIMULAÇÃO

Simulação é uma técnica de modelagem usada para aproximar o comportamento espacial e/ou temporal de um sistema em um computador, representando suas principais características por descrições matemáticas ou algébricas (Maass et al., 1962). Devido à simplicidade e versatilidade, modelos baseados em simulação têm sido os mais utilizados na avaliação de alternativas de sistemas de recursos hídricos. Vários autores apresentam aplicações desta técnica, entre eles Loucks et al. (1981), Yeh (1985), Braga Jr. (1987), Votrubá (1988), Wurbs (1996) e Evans e Olson (1998).

A simulação não é um procedimento de otimização como as técnicas de programação matemática (linear, dinâmica e não-linear) discutidas anteriormente. As técnicas de programação matemática encontram, se possível, uma política de operação ótima, ou seja, uma política que minimize (ou maximize) a função de retorno para o sistema em análise, satisfazendo todas as restrições impostas. Já os modelos de simulação fornecem o valor da função de retorno para um designe específico do sistema submetido a uma regra de operação.

Desta forma, os modelos de otimização procuram a melhor decisão possível entre todas as alternativas, enquanto os de simulação apenas

avaliam um número finito de alternativas. Isto provoca um dos maiores problemas da aplicação de modelos de simulação: a determinação do número de conjuntos de designs e políticas de operação que devem ser simulados para que se obtenha discernimento para uma tomada de decisão (Loucks et al., 1981). Vale ressaltar que, mesmo com o avanço da tecnologia digital nas últimas décadas, o que possibilita a rápida e eficiente simulação de inúmeros cenários, a quantidade de informação a ser analisada poderá ser ainda maior, dificultando a análise do tomador de decisão.

Os modelos de simulação, entretanto, são mais flexíveis e permitem uma representação mais realista do sistema, não sendo necessárias hipóteses simplificadoras na estrutura do sistema, hipóteses essas quase sempre indispensáveis em modelos de otimização e que podem, em alguns casos, gerar políticas de operação distantes da ótima.

A principal aplicação dos modelos de simulação em recursos hídricos tem sido no dimensionamento e operação de sistemas de múltiplos reservatórios (Braga Jr., 1987). Segundo Yeh (1982) apud Braga Jr. (1987), a estrutura básica de um modelo de simulação para representação de um sistema de reservatórios é dada por :

- I. Variáveis de entrada: constituídas pelas vazões afluentes, precipitações, evaporações e eventuais variáveis exógenas, como vazões de restrição e limites operacionais dos níveis dos reservatórios;
- II. Variáveis de estado: controlam o comportamento do sistema e variam ao longo da simulação (e.g., volume armazenado no reservatório);
- III. Variáveis de saída: respostas da simulação, escolhidas pelo responsável pela operação (e.g., custo ou benefício da operação do reservatório);
- IV. Parâmetros do modelo: variáveis que caracterizam o sistema, tais como capacidade dos reservatórios; e
- V. Intervalo de tempo: deve ser determinado de acordo com as necessidades do estudo, tendo em vista um balanço entre recursos computacionais e precisão dos resultados.

Regras de operação são geralmente utilizadas em conjunto com os modelos de simulação. Essas regras definem os volumes e defluências em cada intervalo de tempo em função de valores atuais de armazenamento e previsão de afluências (Braga Jr., 1987). Loucks e Sigvaldason

(1982) apud Yeh (1985) sugerem que um ou mais dos seguintes componentes gerais estejam presentes nestas regras de operação:

- I. níveis ou volumes alvo;
- II. múltiplas zonas;
- III. faixa de variação do escoamento; e
- IV. curvas de regras condicionais, levando em consideração as entradas no reservatório no período;

Uma questão que gera bastante discussão na utilização de modelos de simulação é se vale à pena a utilização de pacotes computacionais genéricos ou se o analista deve desenvolver um pacote específico para o sistema a ser analisado. Segundo Braga Jr. (1987), o melhor modelo é aquele que o analista conhece e domina. Ainda segundo este autor, os modelos genéricos apresentam maior flexibilidade enquanto os específicos são mais rápidos e econômicos.

Wurbs (1993) cita dois exemplos de modelos de simulação desenvolvidos para sistemas específicos que estão sendo utilizados com sucesso. São eles : o modelo CRSS (*“Colorado River Simulation System”*) e o modelo PRISM (*“The Potomac River Interactive Simulation Model”*).

Yeh (1985) afirma que, entre os pacotes computacionais genéricos de simulação, os modelos HEC-3 (*“reservoir system analysis for conservation”*) e HEC-5 (*“simulation of flood and conservation systems”*) desenvolvidos pelo *Hydrologic Engineering Center* são os com melhores documentações e que têm sido mais utilizados. Os dois modelos são similares, diferindo apenas no fato de que o HEC-5 possibilita, além da simulação de sistemas de reservatórios para abastecimentos, a simulação para controle de enchentes. Conejo (1983) apresenta uma boa descrição das características e possibilidades de aplicação do HEC-5. Entre exemplos mais recentes de modelos genéricos de simulação, Andreu et al. (1991) citam o SIM-V (1982), o MODSIM (1987) e o ARSP (1989).

Molinas e Tucci (1987) e Molinas (1995) apresentam aplicações das técnicas de simulação em sistemas de reservatórios para abastecimento de água. No primeiro destes trabalhos, os autores buscaram diminuir o risco de falhas e o custo da operação para o sistema composto por dois reservatórios que abastece a cidade de Santa Maria (RS - Brasil). Os autores concluíram que a escolha apropriada das variáveis de decisão, em particular aquelas que apresentam facilidade de serem monitoradas, permite estabelecer políticas de

operação que garantam o uso racional de recursos escassos.

Já Molinas (1995) utilizou um modelo de simulação para análise do sistema de reservatórios que abastece a região metropolitana de Fortaleza (CE - Brasil), tendo como objetivos principais avaliar a real capacidade de oferta hídrica deste sistema e fornecer subsídios para uma melhor operação integrada dos reservatórios.

Da mesma forma que as demais técnicas, os modelos de simulação também podem ser determinísticos ou estocásticos. Loucks et al. (1981) afirmam que se o sistema está sujeito a eventos aleatórios, ou os gera internamente, o modelo é considerado pelo menos parcialmente estocástico. Se nenhum componente aleatório está envolvido, o modelo é determinístico. Alguns modelos podem operar nos dois modos, variando de um para o outro conforme o estado do sistema.

Procedimentos alternativos aos modelos determinístico e estocásticos propriamente ditos também têm surgido. Muitos consideram como entradas no sistema os valores medidos em períodos críticos (Askew et al., 1971 apud Yeh, 1985).

## MODELOS CONJUNTO DE SIMULAÇÃO-OTIMIZAÇÃO

Os modelos de simulação têm se mostrado extremamente útil no planejamento e na operação de sistemas de reservatórios. Alguns autores enfatizam, entretanto, que todos eles têm como grande desvantagem o fato de que o próprio analista tem que definir os designs e as políticas de operação que devem ser estudadas. Sistemas mais complexos apresentarão um número grande de alternativas possíveis, dificultando a aplicação de modelos de simulação.

Na busca da solução de tais problemas, a tendência nos últimos anos têm sido a de incorporar esquemas de otimização em modelos de simulação, obtendo um certo grau de otimização (Yeh, 1985). Segundo Wurbs (1993), várias estratégias têm sido empregadas para utilização conjunta de modelos de simulação e otimização. Por exemplo, o modelo pode preliminarmente definir, através de um algoritmo de otimização, algumas alternativas que serão posteriormente detalhadas e testadas por um algoritmo de simulação.

O uso conjunto dos modelos de otimização e simulação tem sido efetuado de duas formas. Na primeira, os modelos de simulação servem como técnica preliminar para delimitar espaços de

soluções possíveis, espaços estes que serão pesquisados de maneira mais precisa pelos modelos de otimização para localizar o ponto de solução ótima. Na segunda, os modelos de otimização são utilizados, em sistemas com simplificações, na determinação de regras de operação, regras estas que serão em seguida processadas nos modelos de simulação em sistemas sem simplificações, verificando sua viabilidade prática e o grau de afastamento do ótimo.

Karamouz e Houck (1987) apresentaram um algoritmo que utiliza em conjunto um modelo determinístico de programação dinâmica, análises de regressão e um modelo de simulação na determinação de regras operacionais para reservatórios. Para utilização desta metodologia são necessárias duas séries de vazões contemporâneas (históricas ou geradas sinteticamente). O ciclo começa com a otimização da operação do reservatório para uma dada sequência de vazões. Os valores ótimos obtidos são analisados através de procedimentos de regressão obtendo-se regras operacionais. Estas regras são então testadas pelo modelo de simulação utilizando um conjunto de dados de vazão diferente do utilizado no modelo de otimização. Baseado nos resultados da simulação verifica-se se critérios de parada previamente estabelecidos foram satisfeitos. O ciclo continua até que tais critérios sejam atendidos.

Apesar desta metodologia ser de difícil verificação teórica, 48 testes realizados por Karamouz e Houck, incluindo pequenos, médios e grandes reservatórios, e diferentes características dos escoamentos (média, variância), resultaram na determinação de regras operacionais (mensais e anuais) melhores que as obtidas através de outras metodologias. Os autores afirmam que o algoritmo, desenvolvido para reservatórios isolados, pode ser facilmente estendido para sistemas complexos de múltiplos reservatórios e usos.

Karamouz et al. (1992) apresentaram o desenvolvimento desta metodologia de operação em três etapas para considerar sistemas de múltiplos reservatórios. Os autores testaram a metodologia para 28 diferentes situações de um sistema com dois reservatórios, incluindo várias condições hidrológicas e pequenos, médios e grandes reservatórios. Os resultados dos testes indicaram que esta nova metodologia gera melhores políticas operacionais do que as normalmente utilizadas em operação de sistemas deste tipo.

O esquema apresentado na figura 2 também pode ser utilizado com modelos de simulação e otimização.

Diversas outras possibilidades de combinação de modelos de simulação e otimização podem ser realizadas, sendo grande o potencial possível de exploração de metodologias deste tipo. Pode-se variar tanto as características da simulação (intervalo de simulação, tipo de balanço) e da otimização (tipo, nível de simplificação) como o esquema de inter-relacionamento destas técnicas. As pesquisas devem ser, portanto, direcionadas na busca de novos modelos e suas aplicações em sistemas reais de grande porte.

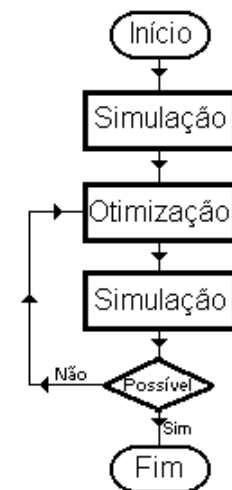


Figura 2 - Modelo sequencial de simulação-otimização

## COMENTÁRIOS FINAIS

Não existe uma metodologia consagrada para o estudo da operação de sistemas de reservatórios. Isto ocorre principalmente porque as aplicações possíveis diferem sob vários aspectos. Entre eles, pode-se destacar:

- I. número de reservatórios e de propósitos do uso da água;
- II. intervalo de tempo de operação; e
- III. estágio de aplicação (planejamento, projeto ou operação).

A programação linear tem sido uma valiosa técnica para otimização da operação de reservatórios. Embora geralmente tanto as funções-objetivo como as equações de restrição sejam não-lineares, várias técnicas de linearização podem ser usadas com sucesso. A importância e utilidade da PL devem-se principalmente: a sua habilidade de modelar problemas de grande dimensão; a possibilidade de obtenção de ótimos globais; a não

necessidade de uma política inicial; e a disponibilidade de pacotes computacionais para solução dos problemas.

Os avanços tecnológicos, principalmente na área dos computadores digitais, vêm proporcionando a solução de problemas através de outras técnicas de otimização que melhor representam o mundo real (e.g., programação não-linear, programação dinâmica, modelos conjuntos de simulação/otimização) antes considerados inviáveis. A utilização destas técnicas, entretanto, se comparadas com as de programação linear, são ainda insipientes, principalmente para estudos de sistemas reais de grande porte. Têm-se, portanto, pouco conhecimento das possibilidades de utilização e a qualidade dos resultados que podem ser obtidos.

A programação dinâmica tem sido alvo de inúmeras pesquisas nos últimos anos, principalmente pela capacidade de representar a dinâmica dos problemas e pela facilidade de incorporação das não-linearidades das funções e das aleatoriedades das variáveis. Seu grande problema é a “maldição” da dimensionalidade, sendo o desenvolvimento de modelos que superem este problema o alvo principal das pesquisas. Apesar de alguns algoritmos de PD já terem proporcionado importantes resultados, ainda existe uma grande lacuna entre a teoria destes algoritmos e suas aplicações em sistemas reais. Pesquisas que fechem esta lacuna são, portanto, necessárias para que melhor se conheça as vantagens e desvantagens da aplicação de técnicas de programação dinâmica.

A simulação de sistemas de reservatórios, apesar de não ter caráter otimizante, é muito difundida e utilizada, principalmente em operação de sistemas complexos onde as técnicas de otimização são de difícil utilização. A maior vantagem da simulação sobre as técnicas de otimização é a possibilidade de representação mais realista do sistema.

A escolha da metodologia dependerá das particularidades do sistema em análise. Tanto os modelos que utilizam programação matemática (linear, dinâmica ou não-linear) como os modelos de simulação serão importantes em situações específicas. A tendência das pesquisas dos modelos para planejamento e operação de sistemas de reservatórios, entretanto, é a busca de modelos que utilizem simulação e otimização em conjunto, tentando assim fornecer aos planejadores respostas mais confiáveis.

## REFERÊNCIAS

- ANDRADE, E.L. 1998. *Introdução à pesquisa operacional: métodos e modelos para análise de decisão*. Rio de Janeiro: Livro Técnico e Científicos.
- ANDREU, J., CAPILLA, J., SANCHIS, E. 1991. AQUATOOL: a computer – assisted support system for water resources research management including conjunctive use. In: LOUCKS, D.P., COSTA, J.R., ed. *Decision support systems*. NATO. P.333-355.
- ARAGÃO, J. O. R. 1998. *Tempo e clima no nordeste do Brasil e a transposição do rio São Francisco*. Recife: Secretaria de Ciência, Tecnologia e Meio Ambiente.
- BELLMAN, R. E., DREYFUS, S. E. 1962. *Applied dynamic programming*. Princeton: Princeton University.
- BOWER, B. et al. 1962. Operating procedures: their role in the design of water- resource systems by simulation analyses. In: MAAS, A. et al. *Design of water resource systems*. Cambridge: Harvard University. Ch. 11, p.443-458.
- BRAGA JUNIOR, B. P. F. 1983. Noções de programação dinâmica aplicada ao planejamento e operação de sistemas de recursos hídricos. In: CURSO de engenharia hidrológica. São Paulo: EPUSP: DAEE: ABRH. v.2, p.M.1 – M.14.
- BRAGA JUNIOR, B. P. F. 1987. Técnicas de otimização e simulação aplicadas em sistemas de recursos hídricos. In: MODELOS para gerenciamento de recursos hídricos. São Paulo: Nobel: ABRH. Cap.5, p.427 – 517.
- CEARÁ. Secretária dos Recursos Hídricos. 1992. *Plano Estadual dos Recursos Hídricos*. Fortaleza.
- CHOW, V. T., MAIDMENT, D. R., Tauxe, G.W. 1975. Computer time and memory requirements for DP and DDDP in water resource system analysis. *Water Resources Research*, Washington, v.11, n.5, p.621-628.
- COMPANHIA DE GESTÃO DOS RECURSOS HÍDRICOS (Ceará). 1999. *Plano Diretor das Bacias Metropolitanas*. Fortaleza. [Em execução].
- CRAWLEY, P.D., DANDY, G.C. 1993. Optimal operation of multiple-reservoir system. *Journal of Water Resources Planning and Management*, New York, v.119, n.1, p.1-17.

- DORFMAN, R. 1962. Mathematical models: the multistructure approach. In: MAAS, A. et al. Design of water resource systems. Cambridge: Harvard University. ch.13, p.494-539.
- DREYFUS, S.E., LAW, A.M. 1977. The art and theory of dynamic programming. New York: Academic Press.
- ELLIS, J.H., REVELLE, C.S. 1988. A separable linear algorithm for hydropower Optimization. *Water Resources Bulletin*, Bethesda, v.24, n.2, p.435-447.
- EVANS, J.R., OLSON, D.L. 1998. *Introduction to simulation and risk analysis*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
- FOUFOULA-GEORGIU, E., KITANIDIS, P. K. 1988. Gradient dynamic programming for stochastic optimal control of multidimensional water resources systems. *Water Resources Research*, Washington, v.24, n.8, p.1345-1359.
- GAL, S. 1979. Optimal management of a multireservoir water supply system. *Water Resources Research*, Washington, v.15, n.4, p.737-749.
- GALVÃO, C. O., VALENÇA, M. J. S., org. 1999. *Sistemas inteligentes: aplicações a Recursos hídricos e ciências ambientais*. Porto Alegre: Ed. Da Universidade UFRGS: ABRH.
- GONDZIO, J. MAKOWSKI, M. 1995. Solving a class of LP problems with a primal- dual logarithmic Barrier method. *European Journal of Operational Research*, v.80, p.184-192.
- GOODMAN, A. 1984. *Principles of water resources planning*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
- GRYGIER, J.C., STEDINGER, J.R. 1985. Algorithms for optimizing hydropower System operation. *Water Resources Research*, Washington, v.21, n.1, p.1-10.
- HADLEY, G. 1972. *Nonlinear and dynamic programming*. Reading: Addison- Wesley.
- HEIDARI, M., CHOW, V.T., KOKOTOVIC, P.V., MEREDITH, D.D. 1971. Discrete Differential dynamic programming approach to water resources systems optimization. *Water Resources Research*, Washington, v.7, n.2, p.273-282.
- HOUCK, M.H., COHON, J.L. 1978. Sequential explicitly stochastic linear Programming models: a proposed method for design and management of multipurpose reservoir systems. *Water Resources Research*, Washington, v.14 n.2, p.161-169.
- HUOCK, M. H., DATTA, B. 1981. Performance evaluation of a stochastic optimization model for reservoir design and management with explicit reliability criteria. *Water Resources Research*, Washington, v.17, n.4, p.827-832.
- JACOBSON, D.H., MAYNE, D.R. 1970. Differential dynamic programming. New York: American Elsevier.
- JOERES, E.F., SEUS, G. J., ENGELMAN, H. M. 1981. The Linear Decision Rule (LDR) reservoir problem with correlated inflows: 1. Model development. *Water Resources Research*, Washington, v.17, n.1, p.18-24.
- JUN, JING, D. [199-] Artificial neural network model for reservoir operation. *Bulletin of Water Resources*, p.134-140.
- KARAMOUZ, M., HOUCK, M. H. 1987. Comparison of stochastic and deterministic Dynamic programming for reservoir operating rule generation. *Water Resources Bulletin*, Bethesda, v.23, n.1, p.1-9.
- KARAMOUZ, M., VASILIADIS, H.V. 1992. Bayesian stochastic optimization of reservoir operation using uncertain forecasts. *Water Resources Research*, Washington, v.28, n.5, p.1221-1232.
- KARAMOUZ, M., HOUCK, M.H., DELLEUR, J.W. 1992. Optimization and simulation of multiple reservoir systems. *Journal of Water Resources Planning and Management*, New York, v.118, n.1, p.71-81.
- KELMAN, J., STEDINGER, J.R., COOPER, L.<sup>a</sup>, HSU, E., YUAN, s-p. 1990. Sampling stochastic dynamic programming to reservoir operation. *Water Resources Research*, Washington, v.26, n.3, p.447-454.
- KUCZERA, G. 1989. Fast multireservoir multiperiod linear programming models. *Water Resources Research*, Washington, v.25, n.2, p.169-176.
- LABADIE, J.W. 1987. *Otimização da operação de projetos agrícolas*. Brasília: PRONI.
- LANNA, A.E.L., SCHWARZBACH, H.S.R. 1989. *MODHAC: Modelo Hidrológico Auto-Calibrável*. Porto Alegre: Instituto de Pesquisa Hidráulica da UFRGS.
- LOUCKS, D. P., FALKSON, L.M. 1970. A comparison of some dynamic, linear and policy iteration methods for reservoir operation. *Water Resources Bulletin*, Bethesda, v.6, n.3, p.384-400.



- LOUCKS, D.P., STEDINGER, J.R., HAITH, D.<sup>a</sup> 1981. *Water resource systems planning and analysis*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
- LUENBERGER, D. 1973. *Introduction to linear and nonlinear programming*. Reading: Addison-Wesley.
- MAAS, A. et al. 1962. Design of water resource systems. Cambridge: Harvard University.
- MARTIN, Q.W. 1983. Optimal operation of multiple reservoir systems. *Journal of Water Resources Planning and Management*, New York, v.109, n.1, p.58-74.
- MOLINAS, P.A., TUCCI, C.E.M. 1989. Operação de um sistema de abastecimento d'água. In: SIMPÓSIO LUSO-BRASILEIRO DE HIDRÁULICA E RECURSOS HÍDRICOS, 4, 1989, Lisboa. *Anais*. Lisboa: APRH; [Rio de Janeiro]: ABRH. v. 2, p.121-131.
- MURRAY, D.M., Yakowitz, S.J. 1979. Constrained differential dynamic programming and its application to multireservoir control. *Water Resources Research*, Washington, v.15, n.5, p.1017-1027.
- NEMHAUSER, G.L. 1966. *Introduction to dynamic programming*. New York: John Wiley.
- OZDEN, M. 1984. A binary state DP algorithm for operation problems of multireservoir systems. *Water Resources Research*, Washington, v.20, n.1, p.9-14.
- PEREIRA, B.J.C., CODNER, G.P. 1996. Reservoir targets for urban water supply systems. *Journal of Water Resources Planning and Management*, New York, v.122 n.4, p.270-279.
- PICCARDI, C., SONCINI – SERRA, R. 1991. Stochastic dynamic programming for Reservoir optional control: dense discretization and inflow correlation assumption made possible by parallel computing. *Water Resources Research*, Washington, v.27, n.5, p.729-741.
- ROEFS, .G., BODIN, L.D. 1970. Multireservoir operation studies. *Water Resources Research*, Washington, v.6, n.2, p.410-420.
- SIMONOVIC, S.P. 1992. Reservoir systems analysis: closing gap between theory and practice. *Journal of Water Resources Planning and Management*, New York, v.118, n.3, p.262-280.
- SIMONOVIC, S.P., MARIÑO, M.A. 1980. Reliability programming in reservoir management: 1. Single multipurpose reservoir *Water Resources Research*, Washington, v.16, n.5, p.844-848.
- SNIEDOVICH, M. 1980. Analysis of a chance-constrained reservoir control model. *Water Resources Research*, Washington, v.16, n.5, p. 849-853.
- SOUZA FILHO, F.A., PORTO, R.L.L. 1997. Definições dos níveis-meta do sistema de abastecimento de Fortaleza. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE RECURSOS HÍDRICOS, 12. 1997, Vitória. *Anais*. São Paulo: ABRH. V.2, p.351-357.
- STEDINGER, J.R., PEI, D., COHN, T.A. 1985. A condensed desegregations model for incorporating parameter uncertainty into monthly reservoir simulations. *Water Resources Research*, Washington, v.21, n.5, p.665-675.
- STROBEL, O.M. 1983. Programação linear e método de restrições probabilísticas: um exemplo de aplicação. In: curso de engenharia hidrológica. São Paulo: EPUS: DAEE: ABRH. V.2, p.N.1-N.49.
- TAI, F-K, GOULTER, I.C. 1987. A stochastic dynamic programming based approach to the operation of multi-reservoir system. *Water Resources Bulletin*, Bethesda, v.23, n.3, p.371-377.
- TREZOS, T., YEH, W. W-G. 1987. Use of dynamic programming for reservoir Management. *Water Resources Research*, Washington, v.23, n.6, p.983-996.
- TREZOS, T. 1991. Integer programming application for planning of hydropower production. *Journal of Water Resources Planning and Management*, New York, v.117, n.3, p.340-351.
- TROTT, W.J., YEH, W. W-G. 1973. Optimization of multiple reservoir system. *Journal of the Hydraulics Division American Society of Civil Engineers*, New York, v.99, n.10, p.1865-1884.
- TURGEON, A. 1980. Optimal operation of multireservoir power systems with stochastic inflows. *Water Resources Research*, Washington, v.16, n.2, p.275-283.
- TURGEON, A. 1981. A decomposition method for the long-term scheduling of reservoirs in series. *Water Resources Research*, Washington, v.17, n.6, p.1565- 1570.
- TURGEON, A. 1982. Incremental dynamic programming may yield no optimal solutions. *Water Resources Research*, Washington, v.18, n.6, p.1599-1604.
- VASILADIS, H.V., KARAMOUZ, M. 1994. Demand-driven operation of reservoirs using uncertainty-based optimal operating policies. *Journal of*

*Water Resources Planning and Management*, New York, v.120, n.1, p.101-114.

- VIEIRA NETO, J.F. 1991. *Dimensionamento ótimo do sistema de irrigação e barragens da bacia do rio Acaraú-Ceará*. Porto Alegre: Curso de Pós-Graduação em Recursos Hídricos e Saneamento. Dissertação (Mestrado Engenharia Civil).
- VOTRUBA, L. 1988. *Analysis of water resources systems*. Amsterdam: Elsevier.
- VOTRUBA, L., BROZA, V. 1989. *Water management in reservoirs*. Amsterdam Elsevier.
- WAGNER, H.M 1969. *Principles of operations research*. Englewood Cliffs: Prentice- Hall.
- WINDSOR, J.S. 1973. Optimization model for the operation of flood control systems. *Water Resources Research*, Washington, v.9, n.5, p.1219-1226.
- WURBS, R.A. 1993. Reservoir system simulation and optimization models. *Journal of Water Resources Planning and Management*, New York, v.119, n.4, p.455-472.
- WURBS, R.A. 1996. *Modeling and analysis of reservoir system operations*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
- YAKOWITZ, S. 1982. Dynamic programming applications in water resources. *Water Resources Research*, Washington, v.18, n.4, p.673-696.
- YAKOMITZ, S. 1989. Algorithms and computational techniques in differential dynamic programming *Control and Dynamic Systems*, v.31, p.75-91.
- YEH, W. W-G. 1985. Reservoir management and operation models: a state-of-the-art Review. *Water Resources Research*, Washington, v.21, n.12, p.1797-1818.
- ZESSLER, U., 1989. Optimal operation of water distribution systems. *Journal of Water Resources Planning and Management*, New York, v.115, n.6, p.735-752.

*technology makes it imperative to update previous reviews of the literature on the subject. The present article seeks to collaborate in this line of research to help and, above all, to motivate new studies in the field of operational research, particularly for heavy flow reservoir systems.*

*Key-words: mathematical models, operational research.*

### ***Models for Reservoir System Operation: Update on the State of the Art***

#### ***ABSTRACT***

*The use of mathematical models to analyze water resources systems has made a lot of progress since the 1960s. The marked development of these models due to the advent and continuous advance of digital computer*