

Evolução de Frentes de Lama em Canais – Parte II: Determinação da Lei de Atrito em Canal

Francisco Lledo dos Santos, Geraldo de Freitas Maciel

Departamento de Engenharia Civil – FEIS – UNESP – Alameda Bahia, 550

15385-000 Ilha Solteira, SP – lledo@dec.feis.unesp.br, maciel@dec.feis.unesp.br

Recebido: 27/05/03 – revisado: 16/07/03 – aceito: 12/11/03

RESUMO

Este artigo apresenta a modelagem matemática simplificada para a determinação da lei de atrito de frentes de lama em canais a partir da caracterização reológica das misturas água-argila em diferentes concentrações em volume, sob condições controladas e permanentes.

Palavras-chave: fluido Não-Newtoniano; Herschel-Bulkley; frentes de lama, canais.

MOTIVAÇÃO

Os fluidos hiperconcentrados resultantes de misturas de fluido Newtoniano e de partículas sólidas aparecem, com frequência, na natureza e na indústria.

Pode-se citar, neste contexto, desde os escoamentos de lodo residuário (lodo de esgoto), carvão líquido, lamas oriundas da exploração de petróleo, concreto fresco, fluidos agro-alimentares etc, até os processos de liquificação das areias e ações erosivas de voçorocas e de lavas torrenciais.

Este artigo tem como objetivo diagnosticar de maneira mais afinada, consistente e com compromissos de aplicação em engenharia, as propriedades reológicas das misturas de água-argila em diferentes concentrações e descrever a evolução de frentes de lama. Pretende-se, assim, chegar a um modelo matemático global (validade sob condição de plano infinito) que nos permita prever leis de atrito para esta natureza de escoamento em canais.

O padrão de escoamento observado nas experiências realizadas nos canais-piloto, e apresentado neste artigo, é de natureza permanente e predominantemente laminar.

MODELAGEM MATEMÁTICA: Escoamento Uniforme de Fluido de Propriedades Não-Newtonianas com base no modelo reológico de Herschel-Bulkley

O equacionamento tem como hipóteses um escoamento permanente uniforme, laminar, de um fluido incompressível, escoando em canal inclinado (figura 1).

Assim, o modelo dinâmico que rege o escoamento em questão se resume a:

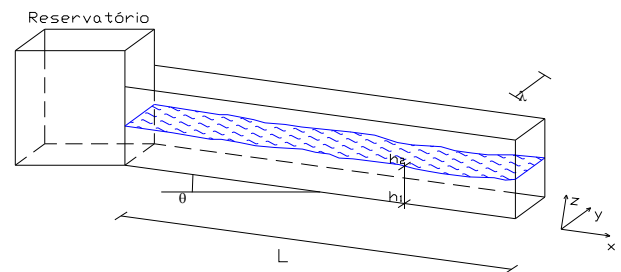


Figura 1 - Croquis com as características do escoamento e do canal: h_1 , h_2 , L , θ , λ e os eixos x , y e z .

$$\tau = \rho g \sin \theta (h - z) \quad (1)$$

Sendo: τ : tensão de escoamento;
 ρ : massa específica da mistura;
 θ : ângulo de inclinação do canal;
 h_1 : cota do fundo do canal;
 h_2 : cota da superfície livre;
 h : altura da lâmina de lama ($h = h_2 - h_1$);
 z : altura do plano de referência;
 λ : largura do canal.

O modelo reológico de Herschel - Bulkley se escreve da seguinte forma:

$$\tau = \tau_c + k \dot{\gamma}^n \quad (2)$$

Com: τ_c : tensão crítica de escoamento;
 k : viscosidade aparente do fluido;
 u : velocidade;
 $\dot{\gamma} : \frac{du}{dy}$ = taxa de deformação;
 n : índice de Herschel-Bulkley.

Inserindo (2) em (1) e resolvendo a equação diferencial, pode-se obter, após alguns desenvolvimentos matemáticos, o perfil de velocidade $u(z)$ para o modelo em questão, conforme a figura 2:

$$u(z) = \frac{\alpha}{m+1} \left[z_0^{m+1} - (z_0 - z)^{m+1} \right] \quad \text{para } z \leq z_0$$

$$\text{com } \alpha = \left(\frac{\rho g \sin \theta}{k} \right)^m;$$

$$u(z) = u(z_0) = \frac{\alpha}{m+1} z_0^{m+1} \quad \text{para } z_0 \leq z \leq h$$

$$\text{com } m = \frac{1}{n}; \quad z_0 = h - \frac{\tau_c}{\rho g \sin \theta};$$

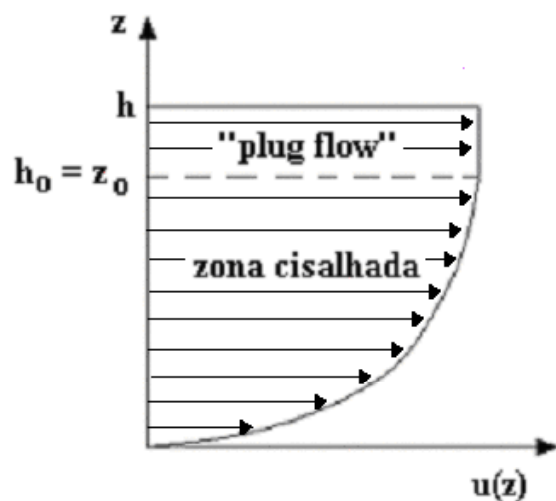


Figura 2 – Perfil de Velocidade característico na vertical para um Fluido tipo Hershel-Bulkley

Trabalhando com os grupos adimensionais,

$$U = \frac{u(z)}{u(z_0)} \quad ; \quad Z = \frac{z}{z_0}$$

após alguns desenvolvimentos, tem-se:

$$U(Z) = 1 - (1 - Z)^{m+1} \quad \text{se } Z \leq 1$$

$$U(Z) = 1 \quad \text{se } 1 \leq Z \leq \frac{G}{G-1}$$

$$\text{com } G = \frac{\rho g h \sin \theta}{\tau_c}$$

Dessa maneira, pode-se analisar a distribuição do perfil de velocidades (figuras 2 e 3). Pôde-se notar a presença de uma região de influência das ações viscosas (zona cisalhada) mais próxima ao fundo do canal e uma região mais próxima à superfície livre com ação dominante da

tensão crítica com distribuição uniforme da velocidade ("plug flow"). Já na figura 4 podemos verificar, em detalhes, o comportamento do escoamento segundo a orientação do perfil transversal de velocidade.

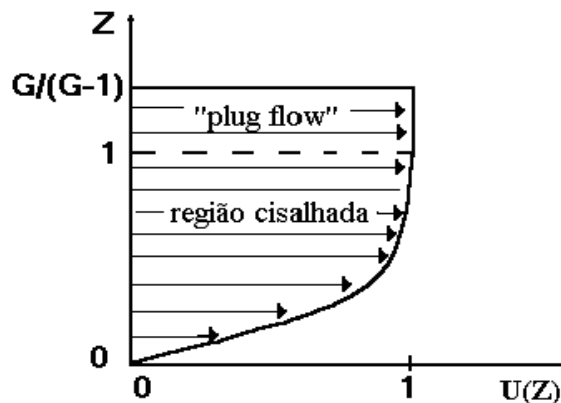


Figura 3 – Perfil de Velocidade (adimensional) na vertical para um Fluido tipo Hershel-Bulkley



Figura 4a – Visualização (elucidativa) de perfil transversal em canal piloto

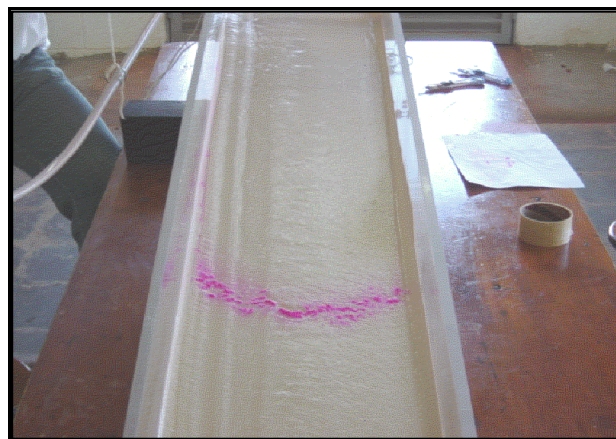


Figura 4b – Visualização (elucidativa) de perfil transversal de velocidades em canal piloto

Cálculo de q: vazão por unidade de largura

Sabe-se que:

$$q = \int_0^h u(z) dz$$

$$q = \frac{\alpha}{(1+m)} \left[\int_0^{z_0} [z_0^{(1+m)} - (z_0 - z)^{(1+m)}] dz + \int_{z_0}^h z_0^{(1+m)} dz \right]$$

Desenvolvendo, resulta em:

$$q = \frac{\alpha}{(1+m)} z_0^{(1+m)} \left[h - \frac{z_0}{(2+m)} \right] \quad (3)$$

Reescrevendo a equação (3) com variáveis adimensionais, obtém-se:

$$H_b^{-m} = \frac{1}{(1+m)(2+m)} G^{-2} (G-1)^{(1+m)} [(1+m)G+1]$$

$$\text{com} \quad H_b = \frac{\tau_c}{k} \left(\frac{h}{\bar{u}} \right)^n \quad (4)$$

em que:

H_b : número de Herschel-Bulkley;

$$\bar{u} = \frac{q}{h}$$

Determinação simplificada de uma lei de atrito para canais de superfície livre escoando lamas

Ainda que não apresentemos uma Análise Dimensional “standard” e completa, o número de Herschel-Bulkley pode ser determinado e entendido de forma simplificada conforme se segue:

$$\tau = \tau_c + k\dot{\gamma}^n \quad \text{ou ainda}$$

$$\frac{\tau}{\tau_c} = 1 + \frac{k\dot{\gamma}^n}{\tau_c}$$

Fazendo $H_b = \frac{\text{parcela da tensão crítica}}{\text{parcela da tensão viscosa}}$, decorre que:

$$H_b = \frac{\tau_c}{k\dot{\gamma}^n} = \frac{\tau_c}{k \left(\frac{\bar{u}}{h} \right)^n} = \frac{\tau_c}{k} \left(\frac{h}{\bar{u}} \right)^n,$$

Assim,

$$\frac{\tau}{\tau_c} = 1 + \frac{k\dot{\gamma}^n}{\tau_c} = 1 + H_b^{-1}$$

A partir da condição de regime permanente e uniforme com a equação da tensão (1), o atrito no fundo do canal ($z=0$) é dado por:

$$\tau_p = \rho g h \sin \theta ;$$

A partir da expressão de G , tem-se:

$$\tau_p = G \tau_c \quad (5)$$

(equação a ser calibrada através de dados experimentais)

ou ainda

$$\tau_p = \tau_c [1 + H_b^{-1}] \quad \text{ou,} \quad G - 1 = H_b^{-1} \quad (6)$$

(lei de atrito teórica)

Caracterização dinâmica em canal piloto

Como dito anteriormente, um dos objetivos principais da pesquisa é calibrar uma lei de atrito de parede para escoamento de fluido hiperconcentrado em canal de superfície livre. Esses escoamentos serão efetuados em canal residente de 10 m de comprimento por, aproximadamente, 0,5 m de largura e de inclinação variável.

Como o canal residente encontra-se em sua fase final de implantação no Laboratório de Hidráulica da FEIS/Unesp, os resultados apresentados neste artigo são os de dois canaletes piloto que nos permitiram bem definir uma metodologia de ensaio rigorosa e consistente.

De uma maneira geral, a metodologia utilizada consistiu em variar a vazão na faixa de 0,1 l/s a 0,6 l/s, através de uma bomba centrífuga de 1,0 CV e 3450 rpm, variar a declividade dos canaletes (10° e 15°) e a partir do escoamento, fazer as leituras de lâmina normal com régua fina metálica. Ao mesmo tempo, coletavam-se amostras para a caracterização reológica no reômetro Brookfield R/S (controlando tensão e deformação). Os parâmetros tais como tensão crítica de cisalhamento (τ_c), viscosidade aparente (K) e índice de escoamento (n) também foram determinados com auxílio do reômetro (Santos, 2003).

O primeiro canaleta, confeccionado no laboratório da FEIS/Unesp, media 6 cm de largura por 130 cm de comprimento. Para fluidos com baixa concentração em volume de sólidos, esse canal apresentou bons resultados, isso porque a lâmina gerada foi pequena (bem menor que a largura). Entretanto, para fluidos mais concentrados, a lâmina produzida foi alta (da ordem da largura) e, dessa forma, a condição $h \ll \lambda$, imposta no cálculo da expres-

são da vazão teórica q , não foi verificada. Assim exposto, fez-se necessário a construção de um canaleta mais largo, medindo 30 cm de largura por 200 cm de comprimento. Os resultados dos testes realizados nesse canaleta mostraram-se mais coerentes, conforme apresentado a seguir.

Ambos os canais funcionam com sistema de recirculação garantido por uma bomba centrífuga conforme supracitado. As figuras 5a e 5b mostram os dois canaletes e o sistema de circulação.



Figura 5a - Canaleta de 6 cm de largura com sistema de recirculação.

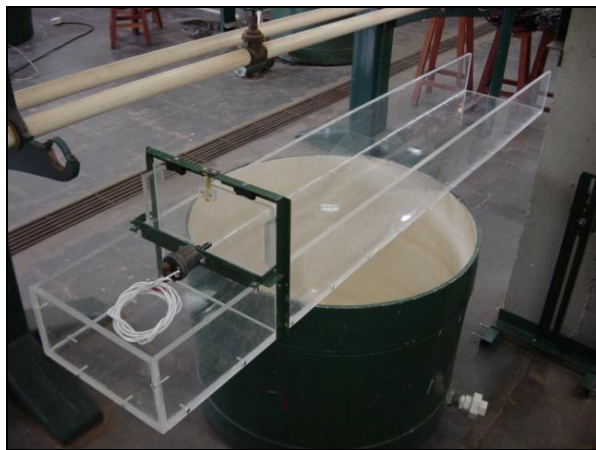


Figura 5b- Canaleta de 30 cm de largura.

Ensaio no canaleta de 6 cm de largura

Em posse da equação característica da vazão por unidade de largura (equação (3)), preparamos uma amostra com concentração em volume $C_v = 10,21\%$ e colocamos a mesma para escoar no canaleta piloto de dimensões 6 cm de largura por 130 cm de comprimento. O ensaio foi feito para duas declividades do canal, aproximadamente 10° e 15° . Em cada declividade, houve variação de 3 e 4 vazões,

respectivamente.

Todos os dados referentes ao escoamento (lâmina normal, vazão), bem como os parâmetros reológicos calibrados com o reômetro Brookfield R/S (tensão crítica de cisalhamento, viscosidade aparente e índice de escoamento). Os parâmetros físicos da mistura, tais como, concentração em volume e massa específica dos sólidos são apresentados na tabela 1.

Tabela 1 – Dados do escoamento em canaleta piloto ($L = 6 \text{ cm}$)

	n	tc	k	Cv	ros	ro	m	sini
		(Pa)	(Pa.s ⁿ)	(%)	(Kg/m ³)	(Kg/m ³)		
Decliv. 1	0,57	5,83	9,08	10,21	2620	1165,402	1,75439	0,174
	0,57	5,83	9,08	10,21	2620	1165,402	1,75439	0,174
	0,57	5,83	9,08	10,21	2620	1165,402	1,75439	0,174
Decliv. 2	0,57	5,83	9,08	10,21	2620	1165,402	1,75439	0,259
	0,57	5,83	9,08	10,21	2620	1165,402	1,75439	0,259
	0,57	5,83	9,08	10,21	2620	1165,402	1,75439	0,259
	0,57	5,83	9,08	10,21	2620	1165,402	1,75439	0,259

	h (m)	h ₀ (m)	q (teórico)	Q _{exp}	L	q _{exp}	erro
			(m ³ /s/m)	(m ³ /s)	(m)	(m ³ /s/m)	(%)
Decliv. 1	0,024	0,0211	0,00205	0,00014	0,06	0,002292	11,8
	0,025	0,0221	0,002422	0,00028	0,06	0,004414	82,3
	0,03	0,0271	0,005067	0,00052	0,06	0,008305	63,9
Decliv. 2	0,019	0,017	0,001808	0,00013	0,06	0,002133	18,0
	0,021	0,019	0,002704	0,00015	0,06	0,002427	11,4
	0,022	0,02	0,003257	0,00026	0,06	0,004108	26,1
	0,024	0,22	0,004606	0,00054	0,06	0,00865	87,8

sendo:

n: índice de escoamento;

tc: tensão crítica de cisalhamento;

K: viscosidade aparente;

Cv: concentração em volume;

ros: massa específica dos sólidos;

ro: massa específica da mistura;

m: inverso do índice de escoamento;

i: declividade do canal;

h: altura da lâmina normal;

$h_0 = z_0$: altura de início do “plug” (espessura do “plug” = $h - h_0$);

q: vazão teórica por unidade de largura calculada pela equação (3);

q_{exp}: vazão por unidade de largura medida experimentalmente;

Q: vazão total medida experimentalmente;

$L(=\lambda)$: largura do canal piloto;

erro: erro relativo entre as vazões experimental e teórica.

Os resultados resumidos na tabela 1 indicam que os erros percentuais sobre as vazões são significativos. Assim exposto, algumas considerações fazem-se necessárias e são discutidas a seguir:

- o canal piloto não apresenta largura suficientemente grande (6 cm) para que se possa desconsiderar a presença de atrito de parede lateral (consideração essa feita quando da obtenção da equação (1));
- devido ao seu comprimento relativamente curto, existe uma pequena variação no valor da lâmina normal ao longo do canal (propiciando remanso), o que pode ter interferido no resultado;
- a bomba utilizada não é apropriada para o escoamento de fluidos hiperconcentrados, o que afetava a garantia de regime permanente.

Análise dos resultados: Para a análise dos dados experimentais, plotamos os números adimensionais $(G-1) \times H_b$ (ver equação (6)) conforme apresentados na figura 6. Dessa forma, com a comparação entre a equação ajustada para os pontos “teóricos” (semi - experimentais) obtida através desse gráfico e a equação (5) (teórica), podemos analisar a consonância entre o desenvolvimento teórico e os resultados experimentais.

Nessa análise, o número H_b é obtido pela equação (4), utilizando no cálculo as vazões teóricas. A título de comparação, também foram plotados os dados de H_b obtidos com os valores experimentais da vazão (q_{exp} – medida pelo método volumétrico). Todos os dados utilizados nesses cálculos encontram-se na tabela 2.

Tabela 2 - Valores de $G-1$, H_b teórico e H_b experimental

$G-1$	H_b (teo)	H_b (exp)	Erro (%)
7,17	0,31	0,29	6,58
7,51	0,30	0,21	40,79
9,22	0,24	0,18	32,54
8,64	0,26	0,23	9,89
9,66	0,23	0,24	6,34
10,17	0,22	0,19	14,14
11,18	0,20	0,14	43,22

A partir do gráfico anterior, e utilizando o método dos mínimos quadrados, chegamos a seguintes expressões de G (H_b):

$$G - 1 = 2,335 H_b^{-0,9617} \quad (\text{teórico}) \quad (7)$$

$$G - 1 = 4,286 H_b^{-0,4673} \quad (\text{experimental}) \quad (8)$$

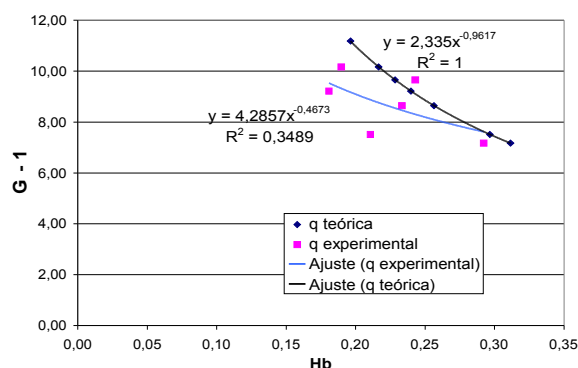


Figura 6 - Gráfico de $(G - 1)$ versus H_b (obtido por q teórico e experimental).

Determinação da lei de atrito: Em posse das equações (7) e (8) pode-se calcular os valores de G que, introduzidos na equação (5), nos fornece os valores experimentais das tensões de atrito. Esses valores são comparados com os valores “teóricos” calculados com a equação (6).

Tabela 3 - Valores das tensões de atrito teórico e experimental

(1) Atrito teórico (Pa)	(2) Atrito eq. (7)	(3) Atrito eq. (8)	erro (%) (1) e (3)	erro (%) (1) e (2)	erro (%) (2) e (3)
24,55	47,63	50,23	104,61	94,02	5,46
25,48	49,63	57,56	125,90	94,77	15,98
30,14	59,58	61,38	103,63	97,66	3,02
28,58	56,24	55,16	93,04	96,82	1,96
31,36	62,16	54,24	72,97	98,23	14,60
32,75	65,10	60,16	83,71	98,81	8,22
35,53	70,98	69,08	94,43	99,79	2,76

Ensaio no canaleta de 30 cm de largura

Seguindo o mesmo procedimento de ensaio realizado no canal piloto de menores dimensões, preparamos uma mistura com $C_v = 10,28\%$ e colocamos para escoar no canal de 30 cm de largura. Novamente os ensaios foram realizados para declividades do canal de 10° e 15° , sendo que para cada declividade foram usadas 3 vazões distintas.

Os dados do escoamento e das características reológicas do material encontram-se na tabela 4.

Tabela 4 - Dados do escoamento em canaleta piloto (L = 30 cm)

	n	tc	k	Cv	ros	ro	m	sini
	(Pa)	(Pa.s ⁿ)	(%)	(Kg/m ³)	(Hg/m ³)			
Decliv.	0,55	22,66	0,38	10,28	2620	1166,536	1,81818	0,174
1	0,55	22,66	0,38	10,28	2620	1166,536	1,81818	0,174
	0,55	22,66	0,38	10,28	2620	1166,536	1,81818	0,174
Decliv.	0,55	22,66	0,38	10,28	2620	1166,536	1,81818	0,259
2	0,55	22,66	0,38	10,28	2620	1166,536	1,81818	0,259
	0,55	22,66	0,38	10,28	2620	1166,536	1,81818	0,259

	h (m)	ho	q (teórico)	Q exp	L	q exp	Erro
	(m)	(m)	(m ³ /s/m)	(m ³ /s)	(m)	(m ³ /s/m)	(%)
Decliv.	0,015	0,0036	0,003723	0,00012	0,3	0,000392	2835,24
1	0,016	0,0043	0,006372	0,00015	0,3	0,000505	3869,34
	0,014	0,0029	0,001949	0,00026	0,3	0,000879	405,769
Decliv.	0,013	0,0048	0,014263	9E-05	0,3	0,000299	15551,6
2	0,012	0,0045	0,011679	0,0001	0,3	0,000339	11150,4
	0,012	0,0041	0,008769	0,00014	0,3	0,000474	5831,3

Novamente podemos notar que os resultados apresentam, na maioria dos casos, erro muito elevado sobre as vazões.

No caso de baixas vazões, o erro se dá, principalmente, devido à descontinuidade do fluxo ocasionado pela bomba. O equipamento não é capaz de produzir um fluxo contínuo e, conseqüentemente, a variação da vazão interfere nas medições.

Outro aspecto a ser considerado é a grande sensibilidade de certos parâmetros. Ainda que o valor da lâmina normal (h), mostrado na tabela 4, seja uma média retirada de várias medições feitas ao longo do canal, qualquer imprecisão na sua medição gera um erro considerável, pois esse parâmetro interfere significativamente no cálculo da vazão teórica (equação (3)). Outros procedimentos de ensaio têm sido implementados para tentar sanar essa problemática.

Análise dos resultados: Da mesma forma como realizado para o canal de 6 cm de largura, plotamos os números (G-1) x H_b, chegando aos seguintes resultados:

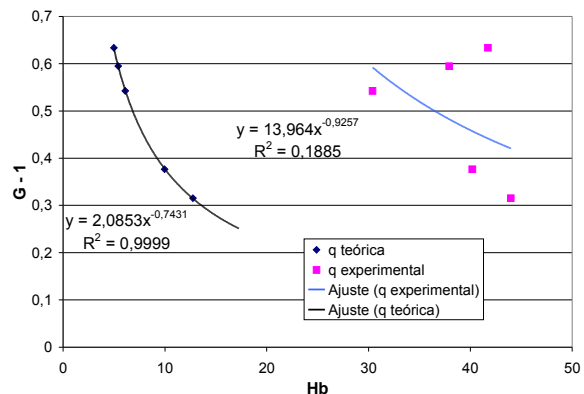
Neste caso, chegamos a seguinte expressão experimental de G (H_b):

$$G - 1 = 2,062 H_b^{-0,7368} \quad (\text{teórico}) \quad (9)$$

$$G - 1 = 13,964 H_b^{-0,9257} \quad (\text{experimental}) \quad (10)$$

Tabela 5 - Valores de G-1, H_b teórico e H_b experimental

G-1	Hb (teo)	Hb (exp)	Erro (%)
0,32	12,74	43,96	245,06
0,38	9,97	40,18	303,05
0,25	17,26	26,74	54,95
0,63	4,98	41,71	737,45
0,59	5,41	37,92	600,59
0,54	6,11	30,39	397,58

**Figura 7 - Gráfico de H_b (obtido por q teórico e experimental) versus (G - 1).**

Determinação da lei de atrito: Os valores do atrito de parede teórico e experimental calculados para o canal de 30 cm de largura são apresentados na tabela 6.

Tabela 6 - Valores das tensões de atrito “teórico” e experimental

(1) Atrito teórico (Pa)	(2) Atrito eq. (9)	(3) Atrito eq. (10)	Erro (%) (1) e (3)	Erro (%) (1) e (2)	Erro (%) (2) e (3)
24,44	29,83	32,19	37,23	22,04	12,44
24,93	31,25	33,02	32,23	25,32	5,52
23,97	28,39	37,77	28,27	18,42	8,32
27,21	36,98	32,67	22,02	35,89	11,37
26,85	36,12	33,59	21,51	34,56	10,74
26,37	34,98	36,08	19,04	32,64	11,42

COMENTÁRIOS

Os resultados obtidos para o atrito de parede nos ensaios realizados no canaleta de maiores dimensões são mais satisfatórios que os resultados do canal menor.

Embora tenhamos obtido, no caso do escoamen-

to no canaleta mais largo, erros percentuais elevados entre as vazões teórica e experimental, verificou-se que a equação (9) se aproxima bem da equação teórica (6) da mesma forma que a equação (7) em relação à potência de um dos parâmetros balizadores da lei de atrito (H_b). O fator multiplicador de H_b nas respectivas leis devem advir de uma dependência da geometria do problema (uma certa função $\phi(\text{geometria})$ a ser determinada a partir de um universo maior de ensaios). A tabela 6 mostra erros percentuais menores em relação aos erros encontrados na tabela 3, relativos ao canaleta de 6 cm de largura, para atrito de parede.

Sendo assim, concluímos que a construção do novo canal piloto (30 cm de largura) aprimorou as primeiras tentativas de adaptação de uma lei de atrito de parede para escoamento de fluido hiperconcentrado em canal de superfície livre, sob condições de canal largo. Tais tentativas prosseguem, e deverão convergir, em tempo breve, para a realização de ensaios em grande escala no canal residente.

AGRADECIMENTOS

À Fapesp pelo financiamento do projeto (00/14853 – 5), ao CNPq e Fapesp pelas bolsas de mestrado e de IC.

REFERÊNCIAS

SANTOS, F.L., “*Estudo Teórico-Experimental em via de Determinação de uma lei de Atrito em Escoamentos de Fluidos Hiperconcentrados*”, Dissertação de mestrado – Universidade Estadual Paulista . Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, 2003. 116p.

Mud front evolution in open channels - Part two: Determination of channel's friction law.

ABSTRACT

This article presents a short mathematical model to determine the friction law of mud fronts in channels. This modeling is based on the rheological properties of the different water-clay mixture concentrations, and also on laminar and steady flow conditions.

Key-Words: Non-Newtonian fluid; Herschel-Bulkley; mud; open channels.