

Obtenção de uma Solução Analítica da Equação de Difusão-Advecção com Decaimento de 1ª Ordem pelo Método da Transformação de Similaridade Generalizada

Nelson L. Dias

Lemma - Laboratório de Estudos em Monitoramento e Modelagem Ambiental: UFPR/LAPAR/SIMEPAR Centro Politécnico da UFPR
Caixa Postal 19100 - CEP 81531-990 Curitiba, PR - nldias@ufpr.br

Recebido: 27/06/01 - revisão: 19/04/02 - aceito: 09/07/02

RESUMO

Estudam-se as soluções da equação da difusão-advecção homogênea, com um termo de decaimento linear, e de diversos casos particulares em que um ou mais dos processos de decaimento, advecção ou difusão estão ausentes. Faz-se uma revisão das técnicas clássicas de solução por transformadas de Laplace e Fourier e de suas aplicações a alguns destes casos particulares. Para resolver a equação, estende-se o método de transformação de similaridade por meio de uma conjectura que é então demonstrada, e que dá origem a um "método de transformação de similaridade generalizada". O método proposto proporciona uma forma sistemática de encontrar as variáveis de similaridade que reduzem o problema a uma equação diferencial ordinária com solução conhecida, o que completa a obtenção da solução analítica desejada.

Palavras-chave: transformação de similaridade; equação de difusão-advecção; equações diferenciais.

INTRODUÇÃO

Todos os fenômenos físicos em hidrologia são regidos, em última análise, por leis fundamentais da física: conservação de massa, as leis da dinâmica newtoniana, e as leis da termodinâmica. Aplicadas a meios contínuos, essas leis são traduzidas para equações diferenciais parciais que assumem diferentes formas, dependendo do fenômeno em questão. Alguns exemplos em hidrologia e a equação diferencial associada são dados a seguir:

- Movimento da água na região não-saturada do solo – *Equação de Richards* (Chow et al., 1988, p.104).
- Defluência de um maciço poroso no curso d'água adjacente (que é a causa básica da perenidade dos rios nas épocas sem chuva) – *Equação de Boussinesq* (Brutsaert, 1994).
- Propagação de uma cheia em uma calha de rio – *Equações de Saint-Venant* (Chow et al., 1988, p. 273-280).
- Transporte unidimensional de uma substância química em uma calha de rio – *Equação da difusão-advecção* (Fischer et al., 1979, p. 51).
- Transporte de calor unidimensional em uma calha de rio com resfriamento por transferência de calor sensível, calor latente e emissão de radiação – *Equação da difusão-advecção com decaimento* (Dias et al., neste número).

A obtenção de soluções analíticas para equações diferenciais parciais, quando possível, é de fundamental impor-

tância: ela permite que soluções numéricas sejam validadas, e também, em geral, revela os parâmetros adimensionais que controlam a solução do problema.

Além disso, nos casos em que soluções analíticas existem, elas certamente permitem uma análise muito mais rápida do problema do que a aplicação de soluções numéricas; em particular, a sensibilidade da solução aos diversos parâmetros de controle pode ser avaliada muito facilmente.

As técnicas usualmente envolvidas na solução de equações diferenciais são freqüentemente descritas em livros de "matemática avançada", "matemática aplicada", "física matemática" ou "matemática para engenharia".

Quando nos deparamos com um problema "novo", entretanto, dificilmente conseguimos resolvê-lo aplicando uma única técnica de forma direta e linear. Muito pelo contrário, o processo de resolução de um problema de matemática aplicada freqüentemente é tortuoso, envolvendo intuição, trabalho algébrico, e uma boa dose de tentativa e erro antes que a solução seja alcançada. Este aspecto intuitivo e "experimental" é pouco enfatizado nos livros-texto e nos cursos usuais de matemática aplicada.

O problema de que trata este artigo é essencialmente a solução da equação da difusão-advecção com um termo de decaimento de 1º ordem, com determinadas condições de contorno e iniciais. Ele surgiu em decorrência de um estudo de modelação da temperatura da água de um rio sujeito ao lançamento de efluentes térmicos (Dias et al., neste número). Os objetivos do presente trabalho são os seguintes:

1. Rever diversas técnicas úteis e interessantes de matemática aplicada que têm aplicabilidade mais geral do que a equação diferencial em si que foi resolvida.
2. Divulgar soluções da equação da difusão-advecção que são relativamente obscuras
3. Exemplificar o processo de resolução de um problema de matemática com ênfase na “descoberta” por indução e por tentativa e erro: esta é uma habilidade certamente fundamental para o modelador de sistemas físicos naturais.

COLOCAÇÃO DO PROBLEMA

Deseja-se encontrar a solução da equação diferencial parcial:

$$b^2 + \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} - a^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

onde a , b e u são constantes positivas; fisicamente, b^2 um coeficiente de decaimento de 1º ordem, u a velocidade de advecção e a^2 o coeficiente de difusão; $\phi(x,t)$ pode representar um campo de temperatura ou de concentração de uma substância num domínio unidimensional: tipicamente, (1) é utilizada em hidrologia para modelação unidimensional de problemas de qualidade da água em rios.

As condições iniciais e de contorno de nosso interesse são:

$$\phi(x,0) = 0, x \geq 0 \quad (2)$$

$$\phi(0,t) = \phi_0, t \geq 0 \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x,t) = 0, t \geq 0 \quad (4)$$

O domínio é semi-infinito em x . A Equação (2) indica um campo inicial ou de *background* nulo, e (3) indica que o contorno de montante do problema é mantido a um valor constante, por exemplo via injeção de uma vazão mássica de poluente ou um fluxo de calor constantes no rio.

Todas as soluções de (1) e seus casos particulares envolvem, de uma forma ou de outra, a função erro, erf , e a função erro complementar, erfc , definidas por (Jeffrey, 1995):

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi \quad \text{e} \quad \text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x) \quad (5)$$

A Equação (1) é um caso bastante geral. Casos particulares de grande interesse (todos com as mesmas condições iniciais e de contorno definidas por (2) - (4)) são dados a seguir. Em cada um deles, procurou-se escrever as soluções com o objetivo de enfatizar as analogias que existem entre elas.

I - Difusão pura

Neste caso $b = u = 0$ em (1); este é o problema normalmente descrito em diversos livros-texto de matemática aplicada: Butkov (1988) apresenta a solução via transformada de Laplace; Fischer et al. (1979) o resolvem utilizando o método de transformação de similaridade; Dettman (1988) o resolve utilizando uma extensão ímpar de ϕ para $-\infty < x < \infty$ e aplicando uma transformada de Fourier; o fato de a função ser ímpar permite reduzir as integrais da transformada de Fourier ao domínio $0 \leq x < \infty$, e explicitar a condição de contorno integrando por partes. A solução obtida por todos esses autores é:

$$\xi = \frac{x}{2a\sqrt{t}} \quad (6)$$

$$\phi(x,t) = \phi_0 \text{erfc}(\xi) \quad (7)$$

II - Difusão e advecção sem decaimento

Neste caso, $b = 0$; o autor não encontrou na bibliografia consultada a solução detalhada em nenhuma referência. Fischer et al. (1979) simplesmente afirmam (“*It is left as an exercise for the reader to show...*”, ou seja, “Deixa-se como exercício para o leitor mostrar...”; diante da dificuldade da solução, parece que a intenção de Fischer et al., 1979 é apenas que o leitor *verifique* a sua validade por substituição direta na equação diferencial) que a solução é:

$$\xi = \frac{-x + ut}{2a\sqrt{t}} \quad (8)$$

$$\eta = \frac{x + ut}{2a\sqrt{t}} \quad (9)$$

$$\phi(x,t) = \frac{\phi_0}{2} \left[(1 + \text{erf}(\xi)) + (1 - \text{erf}(\eta))e^{ux/a^2} \right] \quad (10)$$

III – Difusão com decaimento sem advecção

Neste caso, $u = 0$; Slaterry (1972) detalha uma solução por transformada de Laplace:

$$\xi = \frac{-x + 2abt}{2a\sqrt{t}} \quad (11)$$

$$\eta = \frac{x + 2abt}{2a\sqrt{t}} \quad (12)$$

$$\phi(x,t) = \frac{\phi_0}{2} \left[(1 + \text{erf}(\xi))e^{-bx/a} + (1 - \text{erf}(\eta))e^{bx/a} \right] \quad (13)$$

AS TÉCNICAS CLÁSSICAS DE SOLUÇÃO

Transformada de Laplace

Se $\bar{\phi}$ é a transformada de Laplace de ϕ (Butkov, 1988), a transformada de (1) é:

$$(b^2 + s)\bar{\phi} + u \frac{d\bar{\phi}}{dx} - a^2 \frac{d^2\bar{\phi}}{dx^2} = 0 \quad (14)$$

que é uma equação diferencial ordinária homogênea em x (com s interpretado como um parâmetro) cuja equação característica possui raízes:

$$\lambda_{1,2} = \frac{u \mp \sqrt{u^2 + 4a^2(b^2 + s)}}{2a^2} \quad (15)$$

Em (15), λ_1 corresponde ao sinal de menos (-) antes do radical, e λ_2 à raiz com o sinal de mais (+). Segue-se que a transformada de Laplace é:

$$\bar{\phi}(x, s) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \quad (16)$$

As transformadas de Laplace das condições de contorno (3)-(4) produzem:

$$\bar{\phi}(0, s) = \frac{1}{s}, \quad \bar{\phi}(\infty, s) = 0 \quad (17)$$

donde:

$$c_1 = \frac{1}{s}, \quad c_2 = 0 \quad (18)$$

De posse da transformada de Laplace, aplica-se a fórmula da transformada inversa (Greenberg, 1978):

$$\phi(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} \frac{1}{s} e^{\frac{u-\sqrt{u^2+4a^2(b^2+s)}}{2a^2} x} ds \quad (19)$$

A solução do problema completo, (1)-(4), é dada por Bear (1972), porém sem o detalhamento do cálculo da integral (19) (a qual é atribuída a Gröber e Hofreiter):

$$\xi = \frac{-x + \sqrt{u^2 + 4a^2 b^2} t}{2a\sqrt{t}} \quad (20)$$

$$\eta = \frac{x + \sqrt{u^2 + 4a^2 b^2} t}{2a\sqrt{t}} \quad (21)$$

$$\phi(x, t) = \frac{\phi_0}{2} \left[(1 + \operatorname{erf}(\xi)) e^{(u - \sqrt{u^2 + 4a^2 b^2})x / 2a^2} + (1 - \operatorname{erf}(\eta)) e^{(u + \sqrt{u^2 + 4a^2 b^2})x / 2a^2} \right] \quad (22)$$

Mesmo no caso de difusão pura, com $b = u = 0$, o cálculo da integral de linha (19), em que a variável de integração s é complexa, é uma tarefa consideravelmente difícil, envolvendo integração de contorno. A única referência encontrada pelo autor que detalha este procedimento - porém mesmo assim para o caso mais simples, $b = u = 0$ - é Butkov (1988). Um dos objetivos deste trabalho é a apresentação de um método alternativo para a solução de (1)-(4).

Transformada de Fourier

Esta técnica também é frutífera em situações particulares, porém mais difícil no caso mais geral de (1). Para ilustrá-la, considere a solução proposta por Dettman (1988), generalizada aqui para resolver o caso III. Para isso, toma-se uma extensão ímpar de $\phi(x, t)$ para o domínio $-\infty < x < \infty$. Então, a transformada de Fourier de ϕ é:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[\phi] &= \hat{\phi}(k, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x, t) e^{-ikx} dx \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} i \int_0^{\infty} \phi(x, t) \operatorname{sen}(kx) dx, \end{aligned} \quad (23)$$

onde $i = \sqrt{-1}$ e o resultado da 2ª linha (obtido por meio da fórmula de Euler, $e^{-ikx} = \cos kx - i \operatorname{sen} kx$) é uma consequência do fato de ϕ ser ímpar. Mas a derivada de uma função ímpar é uma função par, e vice-versa: basta aplicar as regras de derivação, ou então lembrar que a série de Taylor de uma função ímpar possui apenas expoentes ímpares em x , e que a derivada desta série conterá apenas expoentes pares. Segue-se que $\partial\phi/\partial x$ é par, e $\partial^2\phi/\partial x^2$ é novamente ímpar. A transformada de Fourier desta última é:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} e^{-ikx} dx \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \operatorname{sen}(kx) dx \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} i k \phi_0 - k^2 \hat{\phi}(k, t). \end{aligned} \quad (24)$$

A última linha é obtida integrando-se a segunda linha por partes duas vezes e introduzindo-se as condições de contorno (3)-(4). Substituindo-se todos estes resultados e tomando-se a transformada de Fourier de (1) com $u = 0$ obtém-se:

$$\frac{d\hat{\phi}}{dt} + (b^2 + k^2 a^2) \hat{\phi} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} i k a^2 \quad (25)$$

$$\hat{\phi}(k, 0) = 0 \quad (26)$$

onde (20) resulta da transformada de Fourier da condição inicial (2). A solução de (19) com a condição inicial (20) é:

$$\hat{\phi}(k, t) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} i \frac{k a^2}{b^2 + k^2 a^2} \left[1 - e^{-(b^2 + k^2 a^2)t} \right] \quad (27)$$

de forma que ϕ pode ser obtida aplicando-se a transformada inversa de Fourier:

$$\begin{aligned} \phi(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}(k, t) e^{+ikx} dk \\ &= \frac{2\phi_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k a^2}{b^2 + k^2 a^2} \sin(kx) dk \\ &\quad - \frac{2\phi_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k a^2}{b^2 + k^2 a^2} e^{-(b^2 + k^2 a^2)t} \sin(kx) dk. \end{aligned} \quad (28)$$

As duas integrais que aparecem na solução acima estão tabeladas (Gradshteyn & Ryzhik, 1980, p.406, § 3.723.3 e p. 497, § 3.954.1); o resultado final é:

$$\phi(x, t) = \phi_0 \left[e^{-bx/a} + \frac{1}{2} (\operatorname{erfc}(\eta) e^{bx/a} - \operatorname{erfc}(\xi) e^{-bx/a}) \right] \quad (29)$$

com ξ e η dados por (11) e (12), e onde o 1º termo dentro dos colchetes corresponde à 1ª integral de (22), e o 2º termo corresponde à 2ª integral. Naturalmente, a Equação (23) é algebricamente equivalente a (13).

O método da transformada de Fourier parece, em princípio, suficientemente poderoso para resolver o problema completo ($b, u, a \neq 0$); no entanto, observe que, quando $u \neq 0$, aparece a 1ª derivada $\partial\phi/\partial x$ em (1); neste caso, uma solução puramente ímpar não é possível, já que (exceto no caso trivial de funções identicamente nulas) é impossível que a soma de uma função par e uma função ímpar seja identicamente nula em todo o eixo dos x .

Embora pareça possível *em princípio* generalizar esta abordagem para a solução de problemas advectivos, o autor não prosseguiu neste caminho diante de sua aparente dificuldade. De qualquer forma, a aplicação da transformada de Fourier mostrada acima resulta em uma solução do caso III alternativa à apresentada por Slattery (1972).

TRANSFORMAÇÃO DE SIMILARIDADE

Este método é aplicável quando uma condição inicial e uma das condições de contorno são iguais, como no caso

de (2) e (4) (Greenberg, 1978, p.128; Batchelor, 1967, p.188-190; Kundu, 1990, p.274-280). A essência do método consiste em supor que a solução depende de um grupo adimensional envolvendo x e t . Considere por exemplo o caso I, mais simples. A variável de similaridade a ser introduzida é dada por (6); supondo que $\phi = f(\xi)$ e utilizando agora a regra da cadeia em (1) (com $b = u = 0$), obtém-se a equação diferencial ordinária:

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} + 2\xi \frac{df}{d\xi} = 0 \quad (30)$$

cujas solução geral é:

$$f(\xi) = c_1 + c_2 \operatorname{erf}(\xi) \quad (31)$$

Introduzindo-se as condições iniciais e de contorno (2)-(4), obtém-se (7).

Na verdade, o processo - enfadonho e sujeito a erros de álgebra - de derivação, aplicação da regra da cadeia e substituição na equação diferencial pode ser totalmente automatizado utilizando-se um programa de processamento simbólico. Alguns exemplos de programas deste tipo são: Macsyma (<http://www.macsyma.com>), Mathematica (www.wolfram.com), Maple (www.maplesoft.com) e Maxima (maxima.sourceforge.net). As manipulações algébricas deste trabalho foram feitas em Maxima mas os detalhes, por economia de espaço, não são mostrados.

Sempre que a aplicação dos passos acima leva à “transformação” da equação diferencial parcial (no caso, (1)) em uma equação diferencial ordinária mais simples, na variável adimensional, o método é bem sucedido. O grande problema, naturalmente, é como encontrar a variável de similaridade que deve ser introduzida.

O método da transformação de similaridade tende a funcionar melhor com problemas puramente difusivos. Pode-se tentar adaptá-lo para problemas advectivos ($u \neq 0$) utilizando-se a variável adimensional dada por (8); novamente, a hipótese $\phi = f(\xi)$ e a sua inserção em (1) (com $b = 0$) leva à Equação (30); desta feita, entretanto, é impossível atender às condições de contorno e iniciais (2)-(4) com a solução (31). Portanto, é necessário um método mais poderoso que nos permita obter a forma correta da solução. Por exemplo, no caso II, a solução do problema, Equação (10), é mais complexa do que simplesmente $c_1 + c_2 \operatorname{erf}((-x + ut)/2a\sqrt{t})$. O estabelecimento de um tal método é o conteúdo da próxima seção.

SOLUÇÃO POR TRANSFORMAÇÃO DE SIMILARIDADE GENERALIZADA

A solução de (1) pode ou não tender para um regime permanente dependendo de seus parâmetros. Por exemplo,

(7) e (10) *não possuem* um regime permanente, muito embora, para cada $x < \infty$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(x, t) = \phi_0$; já (13) possui um regime permanente, ou seja: ela se torna assintoticamente independente de t . Conforme veremos, a existência de um regime permanente está associada à presença do termo de decaimento. Suponha por enquanto que *exista* um regime permanente para (1); então $\partial\phi/\partial t \rightarrow 0$, e ele deve ser a solução da equação diferencial ordinária:

$$b^2\phi + u \frac{\partial\phi}{\partial x} - a^2 \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0 \quad (32)$$

cujas equação característica tem raízes:

$$\lambda_{1,2} = \frac{u \mp \sqrt{u^2 + 4a^2b^2}}{2a^2} \quad (33)$$

e que possui solução geral:

$$\phi(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \quad (34)$$

que se reduz, nos casos I, II e III respectivamente, a:

$$\phi(x) = c_1 + c_2 x \quad (35)$$

$$\phi(x) = c_1 + c_2 e^{ux/a^2} \quad (36)$$

$$\phi(x) = c_1 e^{-bx/a} + c_2 e^{bx/a} \quad (37)$$

Note que os coeficientes c_1, c_2 em cada uma das equações acima possuem significados diferentes. A analogia entre (34)-(37) e as soluções (22), (7)-(13) é impressionante: em cada caso, vemos que a solução da equação diferencial parcial é formada a partir da solução da equação de regime permanente correspondente com os coeficientes c_1 e c_2 substituídos por funções de variáveis de similaridade:

1. Caso I: $c_1 \rightarrow \phi_0 \operatorname{erfc}(\xi); c_2 \rightarrow 0$
2. Caso II: $c_1 \rightarrow \phi_0 \operatorname{erfc}(1 + \operatorname{erf}(\xi))/2;$
 $c_2 \rightarrow \phi_0 \operatorname{erfc}(1 + \operatorname{erf}(\eta))/2$
3. Caso III: $c_1 \rightarrow \phi_0 \operatorname{erfc}(1 + \operatorname{erf}(\xi))/2;$
 $c_2 \rightarrow \phi_0 \operatorname{erfc}(1 + \operatorname{erf}(\eta))/2$

Note também que as setas acima indicam substituições ou correspondências, e *não* limites. Segue-se portanto a:

Conjectura 1 - a solução de (1)-(4) é da forma:

$$f(\xi) \phi_1(x) + g(\eta) \phi_2(x) \quad (38)$$

onde $f(\xi)$ e $g(\eta)$ são funções de variáveis de similaridade ξ e η a determinar, e $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ são as soluções linearmente

independentes da equação diferencial ordinária em x obtida a partir de (1) fazendo-se $\partial\phi/\partial t = 0$.

Na sequência, vamos introduzir o “método de transformação de similaridade generalizada”, o qual permite a obtenção de ξ e η . Ele será aplicado à solução do caso II (difusão e advecção sem decaimento), mas a solução do caso geral é totalmente análoga. De acordo com a Conjectura 1, a solução do caso II é da forma:

$$\phi(x, t) = f(\xi) + g(\eta) \exp(ux/a^2), \quad (39)$$

onde ξ e η são variáveis de similaridade a determinar. Naturalmente, esta é a solução obtida por Ogata & Banks (1961), de forma que as variáveis de similaridade são dadas por (8)-(9); na sequência, vamos supô-los desconhecidos e obtê-los de uma maneira independente. Como (1) é linear, os dois termos de (39) podem ser testados separadamente. Fazendo-se (primeiramente) $\phi = f(\xi)$ e substituindo-se em (1) (com $b = 0$), obtém-se:

$$\frac{df}{d\xi} \left[\frac{\partial\xi}{\partial t} + u \frac{\partial\xi}{\partial x} \right] = a^2 \left[\frac{df}{d\xi} \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{d^2f}{d\xi^2} \left(\frac{\partial\xi}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (40)$$

Impõe-se agora que ξ seja *linear* em x ; esta imposição, longe de ser arbitrária, é perfeitamente natural já que qualquer potência de uma variável adimensional é ela mesma uma variável adimensional. O primeiro termo do lado esquerdo de (40) é então identicamente nulo. De volta à Equação (1) (com $b = 0$) note que ela possui dimensões ΦT^{-1} , onde $\Phi = [\phi]$ é a dimensão física do escalar ϕ . Dimensionalmente, portanto, $[a^2(\partial^2\xi/\partial x^2)^2] = T^{-1}$; a forma mais simples de se impor analiticamente este resultado dimensional é:

$$\left(a \frac{\partial\xi}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{4t} \quad (41)$$

onde o fator numérico 4 é arbitrário, pode ser incluído sem perda de generalidade, e objetiva apenas simplificar um pouco a álgebra intermediária. Integrando-se (41):

$$\xi(x, t) = \frac{\mp x + h(t)}{2a\sqrt{t}} \quad (42)$$

onde h é uma função a determinar de t . A escolha do sinal de x simplesmente trocará, ao final do procedimento, o sinal da variável adimensional resultante; escolhendo-se o sinal de menos e levando-se (42) em (40), obtém-se:

$$-2 \frac{-x + h(t) + 2t(u - dh/dt)}{2a\sqrt{t}} \frac{df}{d\xi} = \frac{d^2f}{d\xi^2} \quad (43)$$

Para que o método de transformação de similaridade generalizada seja bem sucedido é preciso que esta última equação envolva apenas ξ e f ; então, por inspeção o termo entre parêntesis do lado esquerdo deve ser nulo: $dh/dt = u$, obtendo-se enfim a mesma expressão para ξ encontrada em (8). A equação diferencial ordinária resultante para f é novamente (30), com solução geral (31).

Analogamente, fazendo-se $\phi = g(\eta)\exp(u\eta/a^2)$ e substituindo-se em (1) com $b = 0$, obtém-se:

$$\frac{dg}{d\eta} \left[\frac{\partial \eta}{\partial t} - u \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] = a^2 \left[\frac{dg}{d\eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{d^2 g}{d\eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (44)$$

Observe a analogia com (40), exceto que agora $u\partial h/\partial x$ tem o sinal de menos (-). Um procedimento semelhante ao descrito para ξ agora leva a (9), e à mesma equação diferencial ordinária (30), exceto que nas variáveis g e η , o que completa o processo. A solução portanto (de acordo com a Conjectura 1) deve ser da forma:

$$\phi(x, t) = (c_1 + c_2 \operatorname{erf}(\xi)) + (c_3 + c_4 \operatorname{erf}(\eta)) e^{u\eta/a^2} \quad (45)$$

Para determinar as constantes c_1, c_2, c_3 e c_4 note que:

$$t \rightarrow 0 \text{ ou } x \rightarrow \infty \Rightarrow \xi \rightarrow -\infty \Rightarrow \operatorname{erf}(\xi) \rightarrow -1 \quad (46)$$

$$t \rightarrow 0 \text{ ou } x \rightarrow \infty \Rightarrow \eta \rightarrow +\infty \Rightarrow \operatorname{erf}(\eta) \rightarrow 1 \quad (47)$$

Portanto, quando $t \rightarrow 0$ ou $x \rightarrow \infty$:

$$\phi(x, t) \rightarrow (c_1 - c_2) + (c_3 + c_4) e^{u\eta/a^2} \quad (48)$$

e para atender simultaneamente a (2) e (4) é preciso que $c_2 = c_1$ e $c_4 = -c_3$. Agora, (3) requer que:

$$\phi_0 = c_1 \left(1 + \operatorname{erf}(u\sqrt{t}/2a) \right) + c_3 \left(1 - \operatorname{erf}(u\sqrt{t}/2a) \right) \quad (49)$$

para que o lado direito seja independente de t , $c_1 = c_3 = \phi_0/2$, e isto encerra o problema. A solução encontrada, naturalmente, é a Equação (10), para a qual agora nós obtivemos uma solução formal pelo método de transformação de similaridade generalizada.

Agora tanto o Caso III ($b \neq 0$; $u = 0$) - resolvido por transformada de Fourier na seção 3.2 - quanto o caso geral podem ser resolvidos exatamente da mesma forma, levando, naturalmente, às soluções (11)-(13) e (20)-(22). Portanto, o método de transformação de similaridade é capaz de resolver de forma mais rápida e simples o mesmo problema já resolvido na literatura com transformada de Laplace e, em alguns casos particulares, com transformada de Fourier.

DISCUSSÃO

A presença da variável de similaridade ξ sozinha em (7) e novamente sozinha no 1º termo de (10) significa que nenhuma destas duas soluções possui um “regime permanente”: a solução não tende para uma função somente de x quando $t \rightarrow \infty$. No entanto, conforme observamos acima, para cada x fixo nestas duas soluções, $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(x, t) = \phi_0$. Fisicamente, a condição de contorno em $x = 0$ simula uma “injeção” pontual e contínua de alguma grandeza física (massa de um escalar, ou calor): esta grandeza nos casos I e II será difundida/advecada para a região do domínio ($x > 0$). Quanto mais tempo se passa, maior a quantidade da grandeza presente no domínio, com uma tendência à “saturação” em pontos fixos.

Já no caso III e na solução completa, o coeficiente de decaimento b^2 “combate” a criação desta grandeza no contorno, destruindo-a em cada ponto do domínio. Quando os dois processos se equilibram, atinge-se um verdadeiro regime permanente.

A Figura 1 mostra uma comparação das 4 soluções (7), (10), (13) e (44) para os valores arbitrários de parâmetros $\phi_0 = a = b = u = 1$.

Observe que no caso advectivo-difusivo (II) o perfil de ϕ “penetra” mais profundamente no domínio que no caso puramente difusivo (I).

Da mesma forma, a solução completa (advecção-difusão-decaimento) também “penetra” mais no domínio que a solução do caso III, que não possui advecção. Nestes dois últimos casos, as soluções alcançam distâncias menores no domínio devido à presença do termo de decaimento ($b^2 > 0$) o qual, conforme mencionado logo acima, destrói a massa de um escalar (ou qualquer outra grandeza representada por ϕ) introduzida pela condição de contorno de montante (3) e transportada no sentido positivo dos x tanto por difusão quanto por advecção.

As Figuras 1c e 1d exibem, para $t = 10$, perfis essencialmente iguais aos de regime permanente.

Um dos pontos mais interessantes da Conjectura 1 é a relação entre a solução postulada (33), as funções $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$, e o $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(x, t)$. Com efeito, $f(\xi)$ é igual a $\operatorname{erfc}(\xi)$ no caso I, e $1 + \operatorname{erf}(\xi)$ nos demais; $g(\eta)$ é igual a 0 no caso I, e $1 - \operatorname{erf}(\eta)$ ($= \operatorname{erfc}(\eta)$) nos demais; em todos os casos, $\lim_{x \rightarrow \infty} \phi_1(x, t) < \infty$ (isto é: o limite é finito), e $\lim_{x \rightarrow \infty} \phi_2(x) = \infty$. Isto tem implicações importantes, já que é fisicamente impossível aceitar uma solução em $t \rightarrow \infty$ que tenda para infinito em x . De fato, pode-se notar que, devido ao fato de que $g(\eta)$ tende para zero rapidamente quando t cresce, o 2º termo envolvendo $\phi_2(x)$ tende para zero quando t é grande. Em outras palavras, embora $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ sejam postulados na Conjectura 1 a partir da idéia de que $\partial \phi / \partial t = 0$ em (1), apenas $\phi_1(x)$ sobrevive quando $t \rightarrow \infty$; por outro lado, $\phi_2(x)$ que foi obtido com base num argumento de “regime permanente” na

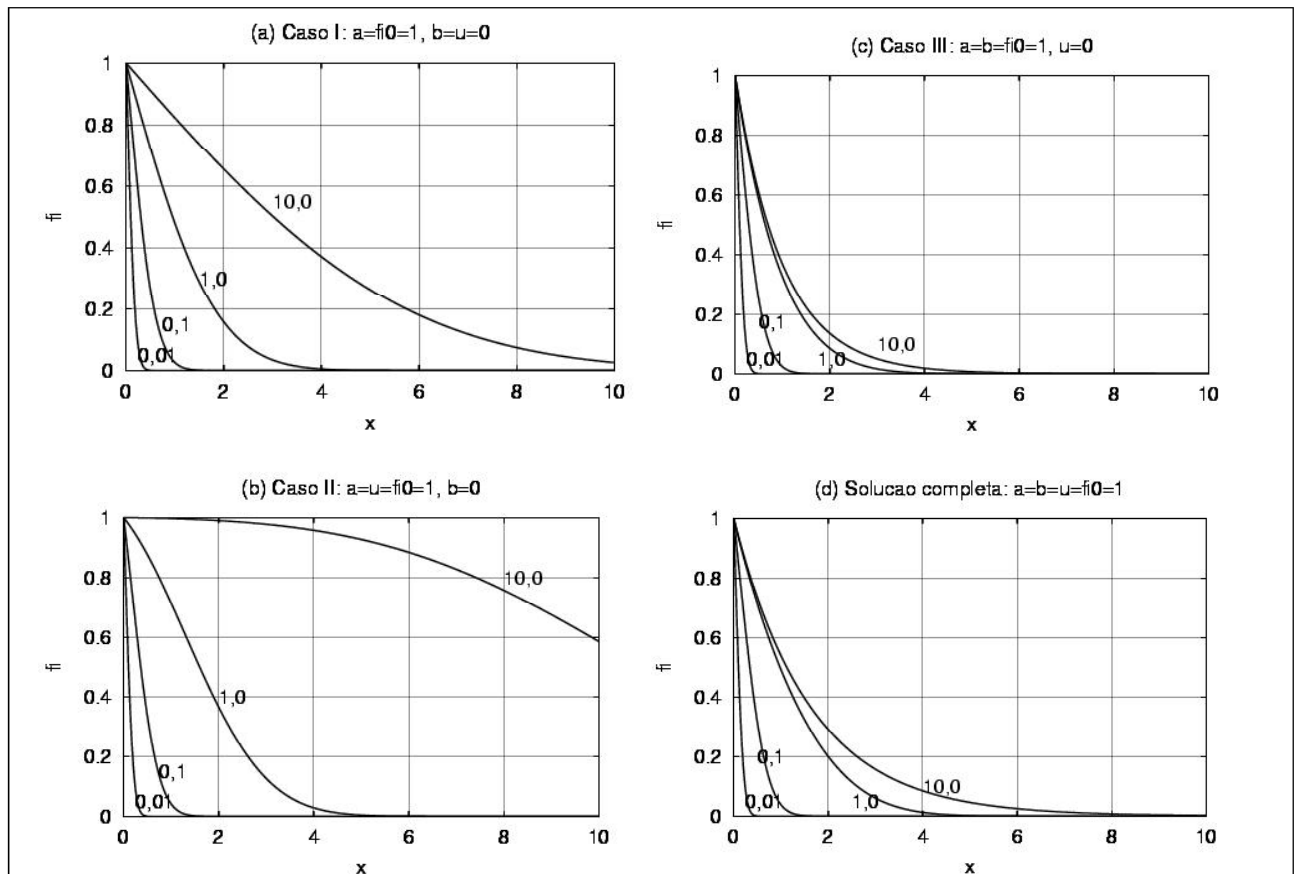


Figura 1. Soluções dos casos (a) I, (b) II, (c) III e (d) solução completa para $\phi_0 = a = b = u = 1$, para os instantes de tempo arbitrários $t = 0,01$, $t = 0,1$, $t = 1,0$ e $t = 10,0$.

verdade só é importante na solução para valores pequenos de t !

Finalmente, vale à pena comentar que, como sempre acontece com equações diferenciais parciais, o conceito de uma “solução geral” não faz sentido: existem soluções analíticas de (1) diferentes de (22); no entanto, via de regra estas soluções não atendem às condições iniciais e de contorno (2)-(4). Os dois exemplos a seguir ilustram este fato:

Exemplo 1 - se $\phi(x,t)$ é solução de (1) com $b = 0$, então:

$$\psi(x,t) = e^{-b^2 t} \phi(x,t) \quad (50)$$

é uma solução da mesma equação para qualquer valor não nulo de b .

Para provar este fato, basta substituir (50) em (1) e calcular as derivadas; o resultado é:

$$e^{-b^2 t} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} - a^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right] = 0 \quad (51)$$

Consequentemente, (10) multiplicada por $\exp(-b^2 t)$ é solução de (1); no entanto, ela não atende à condição de

contorno (3).

No decorrer das tentativas e erros que conduziram à (re)descoberta de (22), o autor “tentou” uma solução com variáveis de similaridade ξ e η diferentes de (20)-(21), o que levou ao:

Exemplo 2 - a função:

$$\phi(x,t) = e^{but/a} \left[e^{-bx/a} (c_1 + c_2 \operatorname{erf}(\xi)) + e^{bx/a} e^{ux/a^2} (c_3 + c_4 \operatorname{erf}(\eta)) \right], \quad (52)$$

com:

$$\xi = \frac{-x + (u + 2ab)t}{2a\sqrt{t}} \quad (53)$$

$$\eta = \frac{x + (u + 2ab)t}{2a\sqrt{t}} \quad (54)$$

é novamente uma solução de (1).

No entanto, é mais uma vez impossível achar c_1 , c_2 , c_3 e c_4 tais que (52) atenda às condições iniciais e de contorno do problema. A prova de que esta função é solução pode ser obtida rapidamente com processamento simbólico.

CONCLUSÕES

Neste trabalho, foram analisadas soluções analíticas da equação da difusão-advecção unidimensional com um termo de decaimento. Soluções foram encontradas na literatura para casos envolvendo *pares* de fenômenos: advecção+difusão ou difusão+decaimento, além de difusão pura. Uma solução para o caso geral envolvendo transformada de Laplace é esboçada, porém não detalhada, na literatura. Foi possível obter uma solução por transformada de Fourier para o caso de advecção com decaimento, cuja solução disponível na literatura era por meio de transformada de Laplace.

A aplicação do método de transformação de similaridade é frutífera, quando devidamente generalizada de acordo com a Conjectura 1 apresentada e provada neste artigo. Por meio dela, é possível estimar a forma da solução utilizando-se o passo intermediário de resolver a equação diferencial ordinária em x que se obtém quando o termo transiente é anulado.

O método da “transformação de similaridade generalizada” aqui proposto permite obter de forma sistemática as variáveis de similaridade que reduzem o problema a uma equação diferencial ordinária. Estas variáveis estão longe de serem intuitivas no caso da solução completa, como demonstra o Exemplo 2 da seção anterior. Neste exemplo, variáveis alternativas são apresentadas e uma solução analítica da equação completa é obtida, solução esta entretanto incapaz de atender às condições iniciais e de contorno do problema. Finalmente, com o uso do método de transformação de similaridade generalizada, foram encontradas todas as soluções anteriormente disponíveis na literatura via transformadas de Laplace ou de Fourier. A solução da equação mais geral é aplicável a problemas de difusão-advecção unidimensional em que a grandeza em questão não seja conservada, devido a processos físicos ou químicos.

AGRADECIMENTOS

O autor gostaria de agradecer às sugestões dos dois revisores anônimos, que contribuíram para melhorar o texto deste artigo. Após a sua submissão, um de meus alunos do Curso de Engenharia Ambiental da UFPR (Michel Souza Marques) me chamou a atenção para a referência bibliográfica que contém a solução do problema completo por transformada de Laplace, o que levou à reestruturação do artigo e a um considerável aprimoramento do método de transformação de similaridade generalizada.

REFERÊNCIAS

- BATCHELOR, G. K. (1967). *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- BEAR, J. (1972). *Dynamics of Fluids in Porous Media*. Dover Publications, Inc., New York.
- BRUTSAERT, W. (1994). The unit response of groundwater outflow from a hill slope. *Water Resources Research*, 30(10):2759-2763.
- BUTKOV, E. (1988). *Física matemática*. Guanabara Koogan, Rio de Janeiro.
- CHOW, V. T.; MAIDMENT, D. R. & MYS, L. W. (1988). *Applied Hydrology*. McGraw-Hill, New York.
- DETTMAN, J. W. (1988). *Mathematical methods in physics and engineering*. Dover Publications, New York.
- FISCHER, H. B.; LIST, E. J.; KOH, R. C. Y.; IMBERGER, J. & BROOKS, N. H. (1979). *Mixing in Inland and Coastal Waters*. Academic Press, New York.
- GRADSHTEYN, I. S. & RYZHIK, I. M. (1980). *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, San Diego.
- GREENBERG, M. D. (1978). *Foundations of applied mathematics*. Prentice-Hall, London.
- JEFFREY, A. (1995). *A handbook of mathematical formulas and integrals*. Academic Press, San Diego.
- KUNDU, P. K. (1990). *Fluid Mechanics*. Academic Press, San Diego.
- OGATA, A. & BANKS, R. B. (1961). *A solution of the differential equation of longitudinal dispersion in porous media*. Professional Paper 411-A, U. S. Geological Survey.
- SLATERRY, J. C. (1972). *Momentum, energy, and transfer in continua*. McGraw - Hill Kogakusha, Tokyo.

Obtaining an Analytical Solution of the Diffusion-Advection Equation with First-Order Decay Using the Generalized Similarity Transform Method

ABSTRACT

We study the solution of the homogeneous advection-diffusion equation with a linear decay term, and several particular cases in which one or more of the decay, advection or diffusion processes is absent. A brief review is given of the classical Laplace and Fourier transform techniques for some of the particular cases. In order to solve the differential equation, the similarity transform method is extended by means of a conjecture which is readily proved, and which generates a “generalized similarity transform method”. The proposed method provides a means to obtain the similarity variables which reduce the problem to an ordinary differential equation with a known solution, and that completes the obtention of the analytical solution.

Key-words: similarity transform; diffusion-advection equation; differential equations.