

# Ondas Não Lineares e Dispersivas em Escoamentos com Vorticidade Horizontal

Valeria S. Rego e Claudio F. Neves

Programa de Engenharia Oceânica/COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro - Caixa Postal 68508  
21945-970 Rio de Janeiro, RJ

Recebido: 22/09/00 - revisão: 23/07/01 - aceito: 20/10/01

## RESUMO

*Equações descrevendo a propagação de ondas não lineares e fracamente dispersivas em escoamentos com vorticidade horizontal são descritas. Um campo de velocidade é pré-definido onde a vorticidade é uniforme ao longo da profundidade. Para vorticidade horizontal nula, as novas equações se reduzem às equações tipo Boussinesq com ordem arbitrária de não linearidade de segunda ordem de dispersão (melhorada). O efeito da vorticidade no escoamento é demonstrado através da simulação de ondas propagando-se sobre correntes sem e com cisalhamento vertical para escoamentos no plano  $x, z$ . Resultados do modelo para correntes constantes ao longo da vertical são comparados a correntes com cisalhamento vertical que tem a) mesmo transporte de massa mas vorticidade diferente e b) mesma velocidade na superfície. A introdução de vorticidade horizontal modifica formalmente a relação de dispersão.*

**Palavras-chave:** propagação de ondas; vorticidade horizontal.

## INTRODUÇÃO

A estimativa de condições de onda na costa tem sido o principal interesse em problemas de engenharia costeira tais como estabilização de praias, proteção contra inundação costeira, danos a estruturas e quantificação de transporte de sedimento. Variação da topografia do fundo e a presença de correntes afetam a propagação de ondas superficiais de gravidade, mudando a direção e velocidade de propagação assim como a altura da onda. Os modelos de transformação lineares (refração e refração-difração) falham quando ondas não são mais de altura infinitesimal. Extensões não lineares destes modelos são geralmente baseadas na teoria de Stokes e portanto mais adequadas para a descrição de ondas em águas intermediárias e profundas.

Ondas em águas rasas são modificadas rapidamente sobre distâncias relativamente curtas, comparadas ao comprimento de onda, devido à fraca dispersão em frequência. Interações quase ressonantes transferem energia entre os harmônicos à medida que as ondas se aproximam da costa. A complexidade dos estágios finais de empinamento e perto da arrebentação também não são bem descritos pela formulação linear. Os modelos tipo Boussinesq com dispersão melhorada e ordem arbi-

trária de não linearidade têm provado serem instrumentos eficientes para o cálculo de transformação de ondas desde o limite de águas profundas até águas rasas.

Apesar do aparente sucesso da teoria irrotacional, a vorticidade pode ser importante perto da arrebentação ou na presença de correntes costeiras. Portanto, a dedução de uma teoria tipo Boussinesq sem a imposição da condição de irrotacionalidade parece ser desejável.

Este trabalho mostra a dedução de equações governantes, integradas na vertical, onde a condição de irrotacionalidade não é imposta, e calcula os parâmetros cinemáticos das ondas em escoamentos com cisalhamento vertical constante ao longo da vertical. São simulados casos de propagação de ondas sobre correntes co-lineares sem e com cisalhamento vertical.

## PROPAGAÇÃO DE ONDAS NÃO LINEARES E DISPERSIVAS EM ÁGUAS RASAS

### Modelos tipo Boussinesq

As equações de Boussinesq são deduzidas em função de dois parâmetros adimensionais que quantificam não linearidade,  $\epsilon$ , (definido como a

razão da amplitude e profundidade) e dispersão em frequência,  $\mu$ , (definido como a razão entre profundidade e comprimento de onda). As formas conhecidas dos modelos tipo Boussinesq diferem basicamente na ordem dos termos dispersivos e não lineares, escolha da variável de velocidade e propriedades de dispersão linear resultantes (uma revisão abrangente pode ser encontrada em Kirby, 1997). A condição de vorticidade horizontal nula (Nwogu, 1993) ou teoria potencial, e portanto escoamento irrotacional (Wei et al., 1995), tem sido usada na dedução de tais modelos. Entretanto nenhuma restrição é imposta na vorticidade vertical, resultante de gradientes das componentes da velocidade no plano horizontal.

### Interação onda-corrente

Embora a presença de correntes modifique o campo de ondas, raramente o cálculo da transformação de ondas inclui o efeito de correntes, seja por que são pequenos comparados aos efeitos de fundo ou simplesmente por que o campo de corrente é desconhecido. Correntes de marés, descargas fluviais ou correntes forçadas por ventos podem ser encontradas na zona costeira. As correntes afetam a velocidade de fase da onda observada em um referencial fixo assim como propriedades do escoamento como velocidade, aceleração e pressão. Ondas propagando-se contra a corrente têm seu comprimento encurtado e esbeltez aumentada (o aumento da densidade de energia local pode até resultar em arrebentação) e ondas propagando-se na mesma direção da corrente têm seu comprimento aumentado e altura diminuída (Peregrine, 1976). Correntes fortes opondo-se à propagação podem até causar o bloqueio de ondas, o que ocorre quando a velocidade de fase da onda se iguala à velocidade da corrente.

As equações tipo Boussinesq permitem o cálculo de movimentos permanentes ou de baixa frequência forçados por correntes impostas nos contornos ou devido à própria onda. Toda vez que se considera o efeito de uma corrente pré-existente na propagação de ondas, uma corrente induzida pelo movimento oscilatório também vai ser incorporada ao campo de velocidade. É extremamente difícil separar as contribuições da onda ou da corrente já que elas estão tão acopladas no regime não linear, embora Yoon e Liu (1989) e Dingemans (1997) obtêm dois sistemas (extremamente complexos) para resolver o campo de velocidade devido à corrente e à onda separados. O presente trabalho

não intenciona fazer a separação destas contribuições, mas considera o efeito de uma corrente pré-existente na propagação de ondas, a exemplo do que Chen (1997) fez para o caso de correntes irrotacionais. Correntes turbulentas também serão aproximadas por um escoamento médio, já que a escala de tempo da corrente é maior do que das ondas. Os modelos de propagação de onda geralmente separam a velocidade em dois componentes, um devido à onda e outro devido à corrente, considerado uniforme na vertical, excluindo assim os escoamentos com cisalhamento vertical. Yoon e Liu (1989) deduziram equações tipo Boussinesq para o caso onde a velocidade da corrente é maior do que a velocidade orbital do movimento oscilatório entretanto menor do que a velocidade de fase das ondas. Chen (1997) admite que a velocidade da corrente é da mesma ordem que a velocidade de fase da onda e consegue equações com dispersão melhorada podendo prever até o caso de bloqueio de ondas. Quando se retém todos os termos não lineares das equações governantes, não há nenhuma restrição quanto aos gradientes espaciais, ou à magnitude relativa da corrente em relação à velocidade de fase da onda, como já foi comentado por Kirby (1997).

Correntes na zona costeira comumente têm variações ao longo da profundidade, e vorticidade associada, geralmente decorrentes de tensões na superfície devido ao vento ou no fundo devido ao atrito (A Figura 1 mostra alguns perfis possíveis). Muitos autores sugerem métodos para a obtenção de correntes irrotacionais equivalentes, ao invés de usar uma corrente com cisalhamento vertical, de modo a continuar usando modelos de onda irrotacionais (Hedges e Lee, 1992; Skyner e Easson, 1998). Entretanto, Kirby e Chen (1989) mostram que o uso de correntes médias como equivalentes para correntes com cisalhamento, nos atuais modelos de

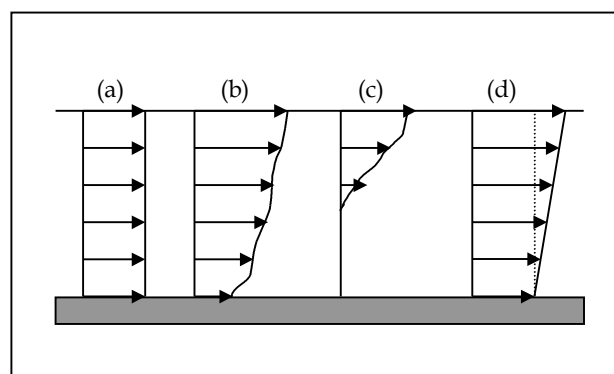


Figura 1. Exemplos de perfis de correntes: a) uniforme em  $z$ , b) perfil arbitrário, c) perfil limitado pela profundidade e d) cisalhamento vertical linear.

evolução baseados em teoria irrotacional, incorre em erro na conservação do fluxo de ação de onda. À medida que as distâncias de propagação aumentam, esses modelos ficam inválidos e estes autores recomendam a dedução de equações para o problema rotacional de forma a tratar corretamente escoamentos com cisalhamento vertical.

### EQUAÇÕES ESTENDIDAS PARA ONDAS NÃO LINEARES E FRACAMENTE DISPERSIVAS EM ESCOAMENTOS COM VORTICIDADE HORIZONTAL

Um método semelhante ao descrito em Nwogu (1993) é utilizado para deduzir uma nova classe de equações não lineares e fracamente dispersivas para escoamentos com vorticidade horizontal. Um sistema de coordenadas Cartesianas é adotado onde  $x = (x, y)$  é o vetor posição horizontal e  $z$  é positivo acima do nível de repouso. Um campo de ondas com elevação da superfície  $\eta(x, y, t)$ , propagando-se sobre um fundo variável,  $h(x, y)$ , é considerado onde  $t$  representa o tempo. O vetor velocidade total e vetor velocidade horizontal são, respectivamente,  $u_T = (u, v, w)$  e  $u = (u, v)$ . Ao longo deste trabalho  $'$  representa variáveis dimensionais.

Três parâmetros, profundidade característica,  $h_0$ , comprimento de onda típico,  $l$ , e amplitude de onda típica,  $a_0$ , (mostrados na Figura 2) são usados para obter o seguinte conjunto de variáveis adimensionais:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x'}{l} & y &= \frac{y'}{l} & z &= \frac{z'}{h_0} & t &= \frac{\sqrt{gh_0}}{l} t' & h &= \frac{h'}{h_0} \\ u &= \frac{h_0}{a_0 \sqrt{gh_0}} u' & v &= \frac{h_0}{a_0 \sqrt{gh_0}} v' & w &= \frac{h_0^2}{a_0 l \sqrt{gh_0}} w' \\ \eta &= \frac{\eta'}{a_0} & p &= \frac{p'}{\rho g a_0} & \xi^x &= \frac{h_0^2}{a_0 \sqrt{gh_0}} \xi'^x \\ \xi^y &= \frac{h_0^2}{a_0 \sqrt{gh_0}} \xi'^y & \xi^z &= \frac{h_0 l}{a_0 \sqrt{gh_0}} \xi'^z \end{aligned} \quad (1)$$

onde  $p$  é a pressão,  $\rho$  é a densidade,  $g$  é a aceleração gravitacional e  $\xi = (\xi^x, \xi^y, \xi^z)$  é o vetor vorticidade.

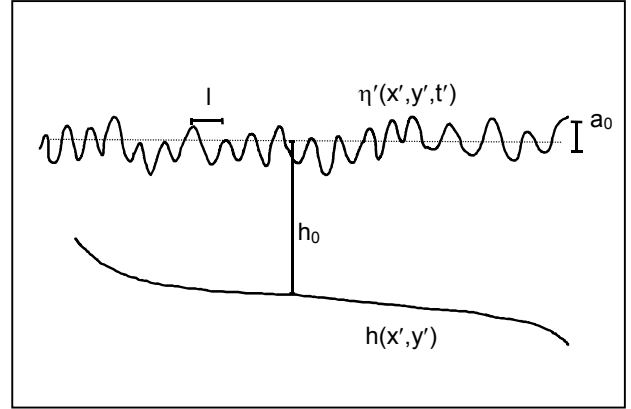


Figura 2. Parâmetros característicos.

As equações de conservação de massa e quantidade de movimento adimensionais são:

$$\mu^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \mu^2 \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon \mu^2 \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \varepsilon w \frac{\partial u}{\partial z} \\ + \mu^2 \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \mu^2 \frac{\partial v}{\partial t} + \varepsilon \mu^2 \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \varepsilon w \frac{\partial v}{\partial z} \\ + \mu^2 \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} + \varepsilon^2 \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\varepsilon^2}{\mu^2} w \frac{\partial w}{\partial z} \\ + \varepsilon \frac{\partial p}{\partial z} + 1 = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

onde  $\mu = h_0/l$  e  $\varepsilon = a_0/h_0$  são parâmetros que quantificam profundidade relativa ( $\varepsilon$ , consequentemente, dispersão em frequência) e não linearidade, respectivamente.

As condições de contorno para um fluido incompressível e invíscido se aplicam na superfície livre e no fundo, independente da vorticidade:

$$p = 0 \quad \text{em} \quad z = \varepsilon \eta \quad (6)$$

$$w = \mu^2 \frac{\partial \eta}{\partial t} + \varepsilon \mu^2 \left( u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \quad \text{em} \quad z = \varepsilon \eta \quad (7)$$

$$w = -\mu^2 \left( u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) \text{ em } z = -h \quad (8)$$

Permite-se que o campo de vorticidade seja rotacional, onde o vetor vorticidade é dado por:

$$\xi = \nabla_3 \times \mathbf{u}_T \quad (9)$$

com componentes:

$$\begin{aligned} \xi^x(x, y, z, t) &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \xi^y(x, y, z, t) &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \xi^z(x, y, z, t) &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \quad (10)$$

Integrando as equações da continuidade e de conservação de quantidade de movimento horizontais de  $z = -h$  a  $z = \varepsilon\eta$ , e usando as condições de contorno no fundo e na superfície livre:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot \int_{-h}^{\varepsilon\eta} \mathbf{u} dz = 0 \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\varepsilon\eta} \mathbf{u} dz + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\varepsilon\eta} u^2 dz + \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\varepsilon\eta} uv dz \\ + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\varepsilon\eta} p dz - p|_{-h} \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\varepsilon\eta} v dz + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\varepsilon\eta} uv dz + \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\varepsilon\eta} v^2 dz \\ + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\varepsilon\eta} p dz - p|_{-h} \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

A expressão para pressão é obtida integrando a equação vertical de conservação de quantidade de movimento de uma profundidade arbitrária  $z$  até  $z = \varepsilon\eta$ :

$$\begin{aligned} p = \eta - \frac{z}{\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial t} \int_z^{\varepsilon\eta} w dz + \varepsilon \nabla \cdot \int_z^{\varepsilon\eta} \mathbf{u} w dz \\ - \frac{\varepsilon}{\mu^2} w^2 \end{aligned} \quad (14)$$

A velocidade vertical é obtida integrando a equação da continuidade de  $z = -h$  a uma profundidade arbitrária  $z$ :

$$w = -\mu^2 \nabla \cdot \int_{-h}^z \mathbf{u} dz \quad (15)$$

A velocidade horizontal pode ser expressa como uma expansão em série de Taylor em torno de  $z = -h$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = \mathbf{u}|_{-h} + (z+h) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \Big|_{-h} + \frac{(z+h)^2}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} \Big|_{-h} \\ + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(z+h)^n}{n!} \mathbf{q}^n \right] \end{aligned} \quad (16)$$

onde:

$$\mathbf{q}^n = \frac{\partial^n \mathbf{u}}{\partial z^n} \Big|_{-h} \quad (17)$$

As derivadas de  $\mathbf{u}$  em relação a  $z$  são calculadas usando a definição de vorticidade:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = \hat{\xi} + \nabla w \quad (18)$$

onde:

$$\hat{\xi} = (\xi \times \mathbf{k}) = (\xi^y, -\xi^x) \quad (19)$$

é o vetor vorticidade horizontal rotacionado  $-90^\circ$ . Substituindo a definição de  $w$ , segue-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = \hat{\xi} - \mu^2 \left[ \int_{-h}^z \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) dz + (\nabla \cdot \mathbf{u})|_{-h} \nabla h \right. \\ \left. + \nabla (\mathbf{u}_b \cdot \nabla h) \right] \end{aligned} \quad (20)$$

As derivadas de ordem mais alta de  $\mathbf{u}$  em relação a  $z$  são calculadas levando em conta que a vorticidade horizontal não depende de  $z$ :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} = -\mu^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (21)$$

$$\frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial z^3} = -\mu^2 \nabla (\nabla \cdot \hat{\xi}) + O(\mu^4) \quad (22)$$

Avaliando as derivadas em  $z = -h$ :

$$\mathbf{q}^1 = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \Big|_{-h} = \hat{\xi} - \mu^2 \left[ (\nabla \cdot \mathbf{u})|_{-h} \nabla h + \nabla (\mathbf{u}_b \cdot \nabla h) \right] \quad (23)$$

$$q^2 = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} \Big|_{-h} = -\mu^2 [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})] \Big|_{-h} \quad (24)$$

$$q^3 = \frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial z^3} \Big|_{-h} = -\mu^2 \nabla(\nabla \cdot \hat{\xi}) + O(\mu^4) \quad (25)$$

Substituindo em (16) e usando as seguintes expressões para as derivadas espaciais da velocidade calculadas no fundo:

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}) \Big|_{-h} = \nabla \cdot \mathbf{u}_b + \hat{\xi} \cdot \nabla h + O(\mu^2) \quad (26)$$

$$\begin{aligned} [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})] \Big|_{-h} &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_b) + \nabla \cdot \hat{\xi} \nabla h \\ &+ \nabla(\hat{\xi} \cdot \nabla h) + O(\mu^2) \end{aligned} \quad (27)$$

e retendo termos até  $O(\mu^2)$ , a velocidade horizontal é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_b + (z+h)\hat{\xi} - \mu^2 \left\{ (z+h) [\nabla \cdot \mathbf{u}_b \nabla h \right. \\ &+ \nabla(\mathbf{u}_b \cdot \nabla h) + \hat{\xi} \cdot \nabla h \nabla h] \\ &+ \frac{(z+h)^2}{2} [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_b) + \nabla \cdot \hat{\xi} \nabla h + \nabla(\hat{\xi} \cdot \nabla h)] \\ &\left. + \frac{(z+h)^3}{6} \nabla(\nabla \cdot \hat{\xi}) \right\} + O(\mu^4) \end{aligned} \quad (28)$$

É importante notar que as derivadas da velocidade calculadas no fundo não são as mesmas que as derivadas da velocidade no fundo, como ocorre no caso de vorticidade nula.

A velocidade horizontal é expressa em termos de velocidade em uma profundidade arbitrária  $z_\beta = \beta h$  onde  $-1 \leq \beta \leq 0$  (limites do fundo e superfície, respectivamente). Avaliando  $\mathbf{u}$  em  $z = z_\beta$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\beta &= \mathbf{u}_b + (z_\beta + h)\hat{\xi} - \mu^2 \left\{ (z_\beta + h) [\nabla \cdot \mathbf{u}_b \nabla h \right. \\ &+ \nabla(\mathbf{u}_b \cdot \nabla h) + \hat{\xi} \cdot \nabla h \nabla h] \\ &+ \frac{(z_\beta + h)^2}{2} [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_b) + \nabla \cdot \hat{\xi} \nabla h \\ &\left. + \nabla(\hat{\xi} \cdot \nabla h)] + \frac{(z_\beta + h)^3}{6} \nabla(\nabla \cdot \hat{\xi}) \right\} + O(\mu^4) \end{aligned} \quad (29)$$

Alternativamente, pode-se expressar  $\mathbf{u}_b$  como função de  $\mathbf{u}_\beta$ , que pode ser substituído em (28). Retendo termos até  $O(\mu^2)$ , a definição de velo-

cidade como função de uma velocidade em uma profundidade arbitrária é obtida:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_1 + (z+h)\hat{\xi} - \mu^2 \left\{ (z-z_\beta) [\nabla \cdot \mathbf{u}_1 \nabla h \right. \\ &+ \nabla(\mathbf{u}_1 \cdot \nabla h) + \hat{\xi} \cdot \nabla h \nabla h] + \frac{1}{2} [(z+h)^2 \\ &- (z_\beta + h)^2] [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_1) + \nabla \cdot \hat{\xi} \nabla h + \nabla(\hat{\xi} \cdot \nabla h)] \\ &\left. + \frac{1}{6} [(z+h)^3 - (z_\beta + h)^3] \nabla(\nabla \cdot \hat{\xi}) \right\} + O(\mu^4) \end{aligned} \quad (30)$$

onde:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_\beta - (z_\beta + h)\hat{\xi} \quad (31)$$

A velocidade vertical é calculada substituindo (30) em (15):

$$\begin{aligned} w &= -\mu^2 \left\{ (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla h) + (z+h) [\nabla \cdot \mathbf{u}_1 + (\hat{\xi} \cdot \nabla h)] \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} (z+h)^2 (\nabla \cdot \hat{\xi}) \right\} + O(\mu^4) \end{aligned} \quad (32)$$

Os perfis das velocidades horizontal e vertical são descritos agora por funções quadráticas e cúbicas, respectivamente, comparados com os perfis quadráticos e lineares dos modelos com vorticidade horizontal nula.

Os seguintes termos podem ser definidos:

$$\begin{aligned} w_1 &= \mathbf{u}_1 \cdot \nabla h; \quad w_2 = \nabla \cdot \mathbf{u}_1 + \hat{\xi} \cdot \nabla h \\ w_3 &= \nabla \cdot \hat{\xi}; \quad u_2 = \hat{\xi} \\ u_3 &= \nabla(\mathbf{u}_1 \cdot \nabla h) + \nabla \cdot \mathbf{u}_1 \nabla h + \hat{\xi} \cdot \nabla h \nabla h \\ u_4 &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_1) + \nabla(\hat{\xi} \cdot \nabla h) + \nabla \cdot \hat{\xi} \nabla h \\ u_5 &= \nabla(\nabla \cdot \hat{\xi}) \\ E_h &= \varepsilon \eta + h; \quad Z_h = z + h; \quad B_h = z_\beta + h \end{aligned} \quad (33)$$

Se todos os termos não lineares são retidos, isto é,  $O(\varepsilon) < 1$ , a distribuição de pressão é dada por:

$$p = \eta - \frac{z}{\varepsilon} - \mu^2 P_1 - \varepsilon \mu^2 P_2 + O(\mu^4) \quad (34)$$

onde:

$$\begin{aligned} P_1 &= (E_h - Z_h) w_{1t} + \frac{1}{2} (E_h^2 - Z_h^2) w_{2t} \\ &+ \frac{1}{6} (E_h^3 - Z_h^3) w_{3t} \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned}
 P_2 = & (E_h - Z_h) u_1 \cdot \nabla w_1 \\
 & + \frac{1}{2} (E_h^2 - Z_h^2) (u_1 \cdot \nabla w_2 + \hat{\xi} \cdot \nabla w_1 - w_2 \nabla \cdot u_1) \\
 & + \frac{1}{6} (E_h^3 - Z_h^3) [u_1 \cdot \nabla w_3 + 2 \hat{\xi} \cdot \nabla w_2 \\
 & - w_3 (2 \nabla \cdot u_1 + w_2)] \\
 & + \frac{1}{8} (E_h^4 - Z_h^4) (\hat{\xi} \cdot \nabla w_3 - w_3^2)
 \end{aligned} \quad (36)$$

Substituindo a definição dos componentes de velocidade e a pressão nas equações de continuidade e conservação de quantidade de movimento horizontal e calculando as integrais, as seguintes equações governantes são obtidas:

$$\begin{aligned}
 \eta_t + \nabla \cdot \left[ E_h u_1 + \frac{E_h^2}{2} \hat{\xi} \right. \\
 \left. - \mu^2 (S_{13} u_3 + S_{14} u_4 + S_{15} u_5) \right] = O(\mu^4)
 \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned}
 u_{1t} + \frac{E_h}{2} \hat{\xi}_t + \nabla \eta + \varepsilon V_0 - \mu^2 V_1 \\
 - \varepsilon \mu^2 V_2 = O(\mu^4)
 \end{aligned} \quad (38)$$

onde:

$$\begin{aligned}
 V_0 = & (u_1 \cdot \nabla) u_1 + \frac{E_h}{2} [(u_1 \cdot \nabla) \hat{\xi} + (\hat{\xi} \cdot \nabla) u_1 \\
 & - \nabla \cdot u_1 \hat{\xi}] + \frac{E_h^2}{3} \left[ (\hat{\xi} \cdot \nabla) - \frac{1}{2} \nabla \cdot \hat{\xi} \right] \hat{\xi}
 \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned}
 V_1 = & (E_h - B_h) \left\{ \nabla w_{1t} + \frac{1}{2} (E_h + B_h) \nabla w_{2t} \right. \\
 & + \frac{1}{6} (E_h^2 + E_h B_h + B_h^2) \nabla w_{3t} \left. \right\} + w_{1t} \nabla (\varepsilon \eta) \\
 & + \left[ E_h w_{2t} + \frac{1}{2} E_h^2 w_{3t} \right] \nabla E_h
 \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned}
 V_2 = & \frac{1}{E_h} \left( - (u_1 + E_h u_2) [\nabla \cdot (S_{13} u_3) \right. \\
 & + \nabla \cdot (S_{14} u_4) + \nabla \cdot (S_{15} u_5)] \\
 & - (E_h - B_h) \nabla \cdot \left[ E_h u_1 + \frac{E_h^2}{2} u_2 \right] \left[ u_3 \right. \\
 & + \frac{1}{2} (E_h + B_h) u_4 + \frac{1}{6} (E_h^2 + E_h B_h + B_h^2) u_5 \left. \right] \\
 & + \sum_{j=1}^2 \sum_{m=3}^5 \{ S_{jm} [(u_j \cdot \nabla) u_m + (u_m \cdot \nabla) u_j + \nabla \cdot u_m u_j \\
 & + \nabla \cdot u_j u_m] + u_j \cdot \nabla S_{jm} u_m + u_j \cdot \nabla S_{jm} u_m \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( w_1 + E_h w_2 + \frac{E_h^2}{2} w_3 \right) \nabla \cdot \left[ E_h u_1 \right. \\
 & + \frac{E_h^2}{2} u_2 \left. \right] \nabla h - \nabla \cdot \left[ E_h w_1 u_1 \right. \\
 & + \frac{E_h^2}{2} (w_2 u_1 + w_1 u_2) + \frac{E_h^3}{6} (w_3 u_1 + 2 w_2 u_2) \\
 & + \frac{E_h^4}{8} w_3 u_2 \left. \right] \nabla h - w_1^2 \nabla h + \nabla \cdot \left[ \frac{E_h^2}{2} u_1 \cdot \nabla w_1 \right. \\
 & + \frac{E_h^3}{3} (u_1 \cdot \nabla w_2 + u_2 \cdot \nabla w_1 - w_2 \nabla \cdot u_1) \\
 & + \frac{E_h^4}{8} (u_1 \cdot \nabla w_3 + 2 u_2 \cdot \nabla w_2 - 3 w_3 \nabla \cdot u_1) \\
 & \left. - w_3 u_2 \cdot \nabla h \right] + \frac{E_h^5}{10} (u_2 \cdot \nabla w_3 - w_3^2) \left. \right]
 \end{aligned} \quad (41)$$

e:

$$\begin{aligned}
 S_{13} = & \frac{E_h^2}{2} - E_h B_h ; \quad S_{14} = \frac{E_h^3}{6} - \frac{E_h B_h^2}{2} \\
 S_{15} = & \frac{E_h^4}{24} - \frac{E_h B_h^3}{6} ; \quad S_{23} = \frac{E_h^3}{3} - \frac{E_h^2 B_h}{2} \\
 S_{24} = & \frac{E_h^4}{8} - \frac{E_h^2 B_h^2}{4} ; \quad S_{25} = \frac{E_h^5}{30} - \frac{E_h^2 B_h^3}{12}
 \end{aligned} \quad (42)$$

Com a inclusão da vorticidade horizontal, surgem novos termos que são função da magnitude, variações temporais e gradientes espaciais da vorticidade e gradientes espaciais do fundo.

Para o caso de fraca não linearidade,  $O(\mu^2) = O(\varepsilon) \ll 1$ , a pressão se reduz a:

$$\begin{aligned}
 p = & \eta - \frac{z}{\varepsilon} + \mu^2 \left[ z u_{1t} \cdot \nabla h + \left( \frac{z^2}{2} + h z \right) (\nabla \cdot u_{1t} \right. \\
 & \left. + \hat{\xi}_t \cdot \nabla h) + \left( \frac{z^3}{3} + h z^2 + h^2 z \right) \nabla \cdot \hat{\xi}_t \right]
 \end{aligned} \quad (43)$$

e as equações governantes são dadas por:

$$\begin{aligned}
 \eta_t + \nabla \cdot \left[ (\varepsilon \eta + h) u_1 + h \left( \varepsilon \eta + \frac{h}{2} \right) \hat{\xi} \right. \\
 + \mu^2 \left( \left( z_\beta + \frac{h}{2} \right) h \{ \nabla [\nabla \cdot (h u_1)] + \frac{1}{2} \nabla [\nabla \cdot (h^2 \hat{\xi})] \} \right. \\
 + \left( \frac{z_\beta^2}{2} - \frac{h^2}{6} \right) h \{ \nabla (\nabla \cdot u_1) + \nabla [\nabla \cdot (h \hat{\xi})] \} \\
 \left. \left. + \left( \frac{z_\beta^3}{6} - \frac{h^3}{24} \right) h \nabla (\nabla \cdot \hat{\xi}) \right] \right] = O(\varepsilon^2, \varepsilon \mu^2, \mu^4)
 \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned}
& u_{1t} + \nabla\eta + \frac{1}{2}(\varepsilon\eta + h)\hat{\xi}_t \\
& + \mu^2 \left( z_\beta \left\{ \nabla[\nabla \cdot (hu_{1t})] + \frac{1}{2} \nabla[\nabla \cdot (h^2 \hat{\xi}_t)] \right\} \right. \\
& + \frac{z_\beta^2}{2} \left\{ \nabla(\nabla \cdot u_{1t}) + \nabla[\nabla \cdot (h \hat{\xi}_t)] + \frac{z_\beta^3}{6} \nabla(\nabla \cdot \hat{\xi}_t) \right\} \\
& + \varepsilon \left\{ \left[ (u_1 \cdot \nabla) + \frac{h}{2} (\hat{\xi} \cdot \nabla) \right] u_1 \right. \\
& + \left[ \frac{h}{2} (u_1 \cdot \nabla) + \frac{h^2}{3} (\hat{\xi} \cdot \nabla) - \frac{h}{2} (\nabla \cdot u_1) \right. \\
& \left. \left. - \frac{h^2}{6} (\nabla \cdot \hat{\xi}) \hat{\xi} \right] \right\} = O(\varepsilon^2, \varepsilon\mu^2, \mu^4)
\end{aligned} \quad (45)$$

Desprezando a vorticidade horizontal, (41) e (42) se reduzem a:

$$\eta_t + \nabla \cdot [E_h u_1 - \mu^2 (S_{13} u_3 + S_{14} u_4)] = O(\mu^4) \quad (46)$$

$$u_{1t} + \nabla\eta + \varepsilon V_0 - \mu^2 V_1 - \varepsilon\mu^2 V_2 = O(\mu^4) \quad (47)$$

onde:

$$V_0 = (u_1 \cdot \nabla) u_1 \quad (48)$$

$$\begin{aligned}
V_1 = & (E_h - B_h) \left[ \nabla w_{1t} + \frac{1}{2} (E_h + B_h) \nabla w_{2t} \right] \\
& + w_{1t} \nabla(\varepsilon\eta) + E_h w_{2t} \nabla E_h
\end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned}
V_2 = & u_1 \cdot \nabla (u_1 \cdot \nabla h) \varepsilon \nabla \eta - u_1 \cdot \nabla (B_h \nabla \cdot u_1) \nabla h \\
& - u_1 \cdot \nabla B_h [\nabla(u_1 \cdot \nabla h) + B_h \nabla(\nabla \cdot u_1)] \\
& + \frac{E_h}{2} \{ \nabla[u_1 \cdot \nabla(u_1 \cdot \nabla h)] - \nabla \cdot u_1 \nabla(u_1 \cdot \nabla h) \} \\
& + \left( \frac{E_h}{2} - B_h \right) \{ \nabla \cdot u_1 [(\nabla h \cdot \nabla) u_1 + (u_1 \cdot \nabla) \nabla h] \\
& + (u_1 \cdot \nabla) \nabla(u_1 \cdot \nabla h) + [\nabla(u_1 \cdot \nabla h) \cdot \nabla] u_1 \} \\
& + \left( \frac{E_h^2}{6} - \frac{B_h^2}{2} \right) \{ (u_1 \cdot \nabla) \nabla(\nabla \cdot u_1) \\
& + [\nabla(\nabla \cdot u_1) \cdot \nabla] u_1 \} - \frac{E_h^2}{6} \nabla[u_1 \cdot \nabla(\nabla \cdot u_1)] \\
& + \nabla \left\{ \frac{E_h^2}{2} [u_1 \cdot \nabla(\nabla \cdot u_1) - (\nabla \cdot u_1)^2] \right\}
\end{aligned} \quad (50)$$

Os termos  $V_0$  e  $V_2$  em (47) podem ser descritos, alternativamente, como função da vorticidade

de vertical, já que a restrição de irrotacionalidade no plano horizontal não é necessária para a derivação dos modelos de Boussinesq (exceto nos modelos que admitem escoamento potencial). Inclusive, na reintrodução das equações de Boussinesq na ciência moderna, Peregrine (1967) utilizou as equações para estudar um caso com vorticidade vertical, descrevendo a transformação de ondas em uma corrente com cisalhamento horizontal. Deprezando a vorticidade horizontal, (44) e (45) reduzem-se às equações deduzidas por Nwogu (1993).

## EQUAÇÕES PARA ONDAS PROPAGANDO-SE SOBRE CORRENTES COM VORTICIDADE HORIZONTAL CONSTANTE AO LONGO DA VERTICAL

Nas equações desta seção não haverá uma divisão formal das componentes de velocidade devido à corrente e à onda, já que computacionalmente é mais fácil se considerar uma variável de velocidade combinada.

Considera-se um escoamento onde a vorticidade é somente devido à corrente,  $\hat{\xi} = \hat{\xi}^c$ , e uma corrente com cisalhamento vertical linear, onde a velocidade em  $z = z_\beta$  é dada por:

$$u_\beta^c = u_b^c + (z_\beta + h) \hat{\xi} \quad (51)$$

Chega-se a uma nova definição da velocidade horizontal dada por (30) onde agora:

$$u_1 = \tilde{u}_\beta = u_\beta^w + u_b^c \quad (52)$$

que é a componente irrotacional da velocidade definida pela soma da velocidade devido à onda e da parte irrotacional da corrente (neste caso igual à velocidade da corrente no fundo). No caso de  $\hat{\xi} = 0$ , as equações se reduzem àquelas usadas para interação de ondas com correntes irrotacionais.

## TRANSPORTE DE VORTICIDADE

O estudo e modelagem do transporte de vorticidade é fundamental para o entendimento de escoamentos oscilatórios rotacionais. A equação de transporte de vorticidade é dada por:

$$\frac{d\xi'}{dt} = \xi' \cdot D' \quad (53)$$

onde  $D'$  é o tensor taxa de deformação.

De forma a investigar a magnitude relativa dos termos em (53), as mesmas variáveis adimensionais definidas na seção anterior serão usadas, exceto as escalas de vorticidade que permite-se serem diferentes nas direções horizontal e vertical, assim como independentes das escalas de velocidade (o que pode ser justificado no caso de interação onda-corrente). Seja:

$$\xi^x = \frac{1}{V_H} \xi'^x \quad \xi^y = \frac{1}{V_H} \xi'^y \quad \xi^z = \frac{1}{V_V} \xi'^z \quad (54)$$

onde  $V_V$  e  $V_H$  são as escalas vertical e horizontal de vorticidade, respectivamente. Substituindo estas escalas na Equação (53), as seguintes equações adimensionais (válidas para escoamentos tridimensionais) são obtidas:

$$\begin{aligned} & \frac{V_H}{V_V} \left[ \frac{\partial \xi^x}{\partial t} + \varepsilon \left( u \frac{\partial \xi^x}{\partial x} + v \frac{\partial \xi^x}{\partial y} \right) + \frac{\varepsilon}{\mu^2} w \frac{\partial \xi^x}{\partial z} \right] \\ &= \varepsilon \frac{V_H}{V_V} \left[ \xi^x \frac{\partial u}{\partial x} + \xi^y \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \\ &+ \frac{\varepsilon}{\mu} \xi^z \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} & \frac{V_H}{V_V} \left[ \frac{\partial \xi^y}{\partial t} + \varepsilon \left( u \frac{\partial \xi^y}{\partial x} + v \frac{\partial \xi^y}{\partial y} \right) + \frac{\varepsilon}{\mu^2} w \frac{\partial \xi^y}{\partial z} \right] \\ &= \varepsilon \frac{V_H}{V_V} \left[ \xi^x \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \xi^y \frac{\partial v}{\partial y} \right] \\ &+ \frac{\varepsilon}{\mu} \xi^z \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \xi^z}{\partial t} + \varepsilon \left( u \frac{\partial \xi^z}{\partial x} + v \frac{\partial \xi^z}{\partial y} \right) + \frac{\varepsilon}{\mu^2} w \frac{\partial \xi^z}{\partial z} \\ &= \frac{\varepsilon}{\mu} \frac{V_H}{V_V} \left[ \xi^x \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right. \\ &+ \left. \xi^y \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\varepsilon}{\mu^2} \xi^z \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (57)$$

Dois casos são analisados: a)  $V_H/V_V = \mu$  (vorticidade horizontal fraca) e b)  $V_H/V_V = \mu^{-1}$  (vorticidade horizontal forte).

O caso a) é típico de entradas de baías e estuários, onde o cisalhamento lateral é mais forte que as tensões horizontais. Equações (55) a (57), considerando  $O(\varepsilon) = O(\mu^2)$  e retraindo apenas termos na ordem dominante de dispersão, leem:

$$\frac{\partial \xi^x}{\partial t} + w \frac{\partial \xi^x}{\partial z} = \frac{1}{2} \xi^z \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + O(\mu^2) \quad (58)$$

$$\frac{\partial \xi^y}{\partial t} + w \frac{\partial \xi^y}{\partial z} = \frac{1}{2} \xi^z \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + O(\mu^2) \quad (59)$$

$$\frac{\partial \xi^z}{\partial t} + w \frac{\partial \xi^z}{\partial z} = \xi^z \frac{\partial w}{\partial z} + O(\mu^2) \quad (60)$$

O caso b) é típico de escoamentos na zona costeira. Os termos que restam na ordem dominante são diferentes do caso anterior.

$$\frac{\partial \xi^x}{\partial t} + w \frac{\partial \xi^x}{\partial z} = O(\mu^2) \quad (61)$$

$$\frac{\partial \xi^y}{\partial t} + w \frac{\partial \xi^y}{\partial z} = O(\mu^2) \quad (62)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \xi^z}{\partial t} + w \frac{\partial \xi^z}{\partial z} = \left[ \xi^x \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right. \\ &+ \left. \xi^y \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \xi^z \frac{\partial w}{\partial z} + O(\mu^2) \end{aligned} \quad (63)$$

Por definição da vorticidade, a seguinte identidade segue:

$$\frac{V_H}{V_V} \mu \left( \frac{\partial \xi^x}{\partial x} + \frac{\partial \xi^y}{\partial y} \right) + \frac{\partial \xi^z}{\partial z} = 0 \quad (64)$$

Admitindo que a vorticidade é constante ao longo da vertical, e integrando (64) de  $z = -h$  a uma profundidade arbitrária  $z$ , segue que:

$$\xi^z(x, z, t) = \xi_b^z - \frac{V_H}{V_V} \mu(z + h) \left( \frac{\partial \xi^x}{\partial x} + \frac{\partial \xi^y}{\partial y} \right) \quad (65)$$

Esta expressão pode ser comparada com o rotacional do campo de velocidade, dado por (30) e (32) na seção anterior:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{u}_\beta + (z - z_\beta) \nabla \times \hat{\xi} + \hat{\xi} \times \nabla z_\beta \\ - \mu^2 \left\{ \nabla (\mathbf{u}_\beta \cdot \nabla h) + B_h \left[ \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_\beta) - \nabla (\hat{\xi} \cdot \nabla B_h) \right] \right. \\ \left. - \frac{B_h^2}{2} \nabla (\nabla \cdot \hat{\xi}) \right\} \times \nabla z_\beta \end{aligned} \quad (66)$$

Fica evidente que a vorticidade vertical está relacionada à vorticidade horizontal (um resultado trivial em dinâmica de turbulência). Entretanto, admitindo que  $\hat{\xi}$  é zero, a vorticidade vertical, obtida por (66), não é nula.

A situação final a ser considerada é o caso unidimensional horizontal. As Equações (55) e (57) desaparecem e a forma dimensional da Equação (56) se reduz a:

$$\frac{\partial \xi'^y}{\partial t'} + u' \frac{\partial \xi'^y}{\partial x'} + w' \frac{\partial \xi'^y}{\partial z'} = 0 \quad (67)$$

No caso onde a vorticidade é apenas devido à corrente permanente, e ainda constante ao longo da vertical, resta apenas o termo:

$$u' \frac{\partial \xi'^y}{\partial x'} = 0 \quad (68)$$

que mostra que não há variação da vorticidade na direção x para correntes com cisalhamento vertical linear.

## O CASO UNIDIMENSIONAL HORIZONTAL

### Propriedades dispersivas lineares

As propriedades dispersivas lineares do modelo são comparadas com a teoria linear exata deduzida por Dias e Neves (1993) para ondas propagando-se em uma corrente (permanente e uniforme espacialmente) com vorticidade constante,  $\xi_0$ , sobre fundo plano.

A velocidade da corrente em  $z = z_\beta$  é:

$$u_b^c = u_b^c + (z_\beta + h) \xi_0 \quad (69)$$

Usando as definições de velocidade horizontal e vertical e pressão para fundo plano e cor-

rente uniforme espacialmente chega-se às seguintes equações governantes adimensionais:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u_\beta^w}{\partial x} + \varepsilon (u_b^c + h \xi_0) \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ + \mu^2 \left( \alpha + \frac{1}{3} \right) h^3 \frac{\partial^3 u_\beta^w}{\partial x^3} = 0 \end{aligned} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\beta^w}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + \mu^2 \alpha h^2 \frac{\partial^3 u_\beta^w}{\partial x^2 \partial t} + \varepsilon u_b^c \frac{\partial u_\beta^w}{\partial x} \\ + \varepsilon \mu^2 \left[ \alpha h^2 (u_b^c + h \xi_0) \right. \\ \left. - \left( \alpha + \frac{1}{3} \right) h^3 \xi_0 \right] \frac{\partial^3 u_\beta^w}{\partial x^3} = 0 \end{aligned} \quad (71)$$

onde  $\alpha = \beta^2/2 + \beta$ .

Admitindo-se uma onda de pequena amplitude, plana e senoidal, com frequência  $\omega$  e número de onda k, onde a elevação da superfície livre e velocidade podem ser expressas por:

$$u_\beta^w = u_L' e^{i(k'x' - \omega't')} \quad \eta' = a_L' e^{i(k'x' - \omega't')} \quad (72)$$

resulta na seguinte relação de dispersão dimensional:

$$\hat{\omega}'^2 = (gk' - \hat{\omega}'\xi_0') k' h' \frac{[1 - (\alpha + 1/3)(k'h')^2]}{[1 - \alpha(k'h')^2]} \quad (73)$$

onde:

$$\hat{\omega}' = \omega' - k' (u_b^c + h' \xi_0') \quad (74)$$

é a frequência intrínseca. Quando a vorticidade é zero, a Equação (73) se reduz àquela obtida por Nwogu (1993) para dispersão melhorada.

A relação de dispersão linear exata obtida por Dias e Neves (1993) é:

$$\hat{\omega}'^2 = (gk' - \hat{\omega}'\xi_0') \tanh k' h' \quad (75)$$

Expandindo a tangente hiperbólica na forma de uma aproximação racional, tem-se:

$$\hat{\omega}'^2 = (gk' - \hat{\omega}'\xi_0') k' h' \frac{1 + a(k'h')^2}{1 + b(k'h')^2} \quad (76)$$

onde a e b são coeficientes a serem escolhidos, por exemplo os coeficientes da aproximação de Padé

[2,2],  $a = 1/15$  e  $b = 2/5$ . No caso de ordem arbitrária de não linearidade,  $\alpha$ , e, consequentemente,  $\beta$ , podem ser obtidos por minimização do erro entre os polinômios em (73) e (76), e resulta em  $\beta = -0.553$  e  $\alpha = -0.4$ , os mesmos valores encontrados por Witting (1984) para escoamentos com vorticidade horizontal nula. Nwogu (1993) usa outra expressão e encontra  $\beta = -0.531$  e  $\alpha = -0.39$ , valores que resultam em uma relação de dispersão mais precisa do que os valores anteriores.

No caso de fraca não linearidade,  $O(\epsilon) = O(\mu^2) \ll 1$ , a relação de dispersão é dada por:

$$\begin{aligned} & (\omega'^2 - k'h'\omega'\xi'_0) [1 - \alpha(k'h')^2] \\ & - \omega'k'u_b'^c [2 - \alpha(k'h')^2] + k'^2(u_b'^c)^2 \\ & + k'^2u_b'^c h'\xi'_0 = gk'^2h' [1 - (\alpha + 1/3)(k'h')^2] \end{aligned} \quad (77)$$

A Equação (71) pode ser reescrita na forma geral:

$$\begin{aligned} & \omega'^2 p_1(k'h') + \omega'k'u_b'^c p_2(k'h') \\ & + \omega'\xi'_0 p_3(k'h') + k'^2u_b'^c p_4(k'h') \\ & + u_b'^c k'\xi'_0 p_5(k'h') \\ & + \xi_0'^2 p_6(k'h') = gk'^2h' p_7(k'h') \end{aligned} \quad (78)$$

onde:

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 + b(k'h')^2 & p_2 &= -2[1 + b(k'h')^2] \\ p_3 &= -k'h' - (2b - a)(k'h')^3 \\ p_4 &= 1 + b(k'h')^2 \\ p_5 &= kh' + (2b - a)(k'h')^3 \\ p_6 &= (b - a)(k'h')^4 & p_7 &= 1 + a(k'h')^2 \end{aligned} \quad (79)$$

Para o caso fracamente não linear (Equação 77), os coeficientes de (78) são:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1 &= 1 - \alpha(k'h')^2 & \tilde{p}_2 &= -2 + \alpha(k'h')^2 \\ \tilde{p}_3 &= -k'h' + \alpha(k'h')^3 & \tilde{p}_4 &= 1 & \tilde{p}_5 &= k'h' \\ \tilde{p}_6 &= 0 & \tilde{p}_7 &= 1 - (\alpha + 1/3)(k'h')^2 \end{aligned} \quad (80)$$

Desprezando  $\tilde{p}_4, \tilde{p}_5$  e  $\tilde{p}_6$ , onde aparecem termos de  $O(\epsilon^2)$  nas equações adimensionais correspondentes, e termos de  $O(kh)^3$  e minimizando a seguinte expressão:

$$\sum_{k'h'=0}^n \left( \int_{k'h'=0}^{k'h'=3} (p_n - \tilde{p}_n)^2 dk'h' \right)^{1/2} \quad n = 1, 2, 3 \text{ e } 7 \quad (81)$$

os valores obtidos são  $\alpha = -0.4$  e  $\beta = -0.553$ , os mesmos obtidos por Rego e Neves (1997) para o caso de  $u'^c = 0$ .

Na Figura 3, a interseção das duas curvas representa as raízes da relação de dispersão, e consequentemente, o número de onda. Na ausência de correntes, Figura 3a, as raízes são simétricas e correspondem a ondas propagando-se em direções opostas mas com mesmo comprimento de onda. Na presença de uma corrente uniforme ao longo da vertical, Figura 3b, as raízes não são mais simétricas e correspondem a ondas propagando-se sobre correntes na mesma direção ou direção oposta. Na presença de uma corrente ainda mais forte, Figura 3c, a raiz negativa não existe e indica o bloqueio da onda. As Figuras 3d a 3f mostram o que acontece quando a mesma velocidade de corrente no fundo é mantida para diferentes valores de vorticidade, e portanto, velocidade na superfície, é admitido. Em toda a Figura 3, a concordância entre a relação de dispersão exata e do modelo é muito boa já que as ondas estão em águas rasas.

A Figura 4 mostra a velocidade de fase normalizada para o modelo com ordem arbitrária de não linearidade para as diferentes variáveis de profundidades ( $\beta$  diferente). A Figura 5 mostra a diferença entre ordem arbitrária e fraca de não linearidade para  $\beta = -0.39$  (obtido por Nwogu, 1993). À medida que a profundidade relativa,  $kh$ , aumenta, a concordância entre a relação de dispersão exata e a do modelo é menor já que a velocidade da superfície, e, consequentemente, a não linearidade, aumenta.

## Modelo numérico

Um modelo numérico é implementado para as equações fracamente não lineares no plano  $x, z$ . A vorticidade  $\xi'_0$  é admitida constante conforme obtido pela Equação (68). As equações dimensionais são:

$$\begin{aligned} & \eta'_{t'} + [(\eta' + h')\tilde{u}'_\beta]_{x'} + \left( \eta'h' + \frac{h'^2}{2} \right)_{x'} \xi'_0 \\ & + [a_2 h'^2 (\tilde{h}\tilde{u}'_\beta)_{x'x'} + a_1 h'^3 \tilde{u}'_{\beta x'x'}]_{x'} \\ & + \left[ a_2 h'^2 \frac{1}{2} (h'^2)_{x'x'} + a_1 h'^3 h'_{x'x'} \right]_{x'} \xi'_0 = 0 \end{aligned} \quad (82)$$

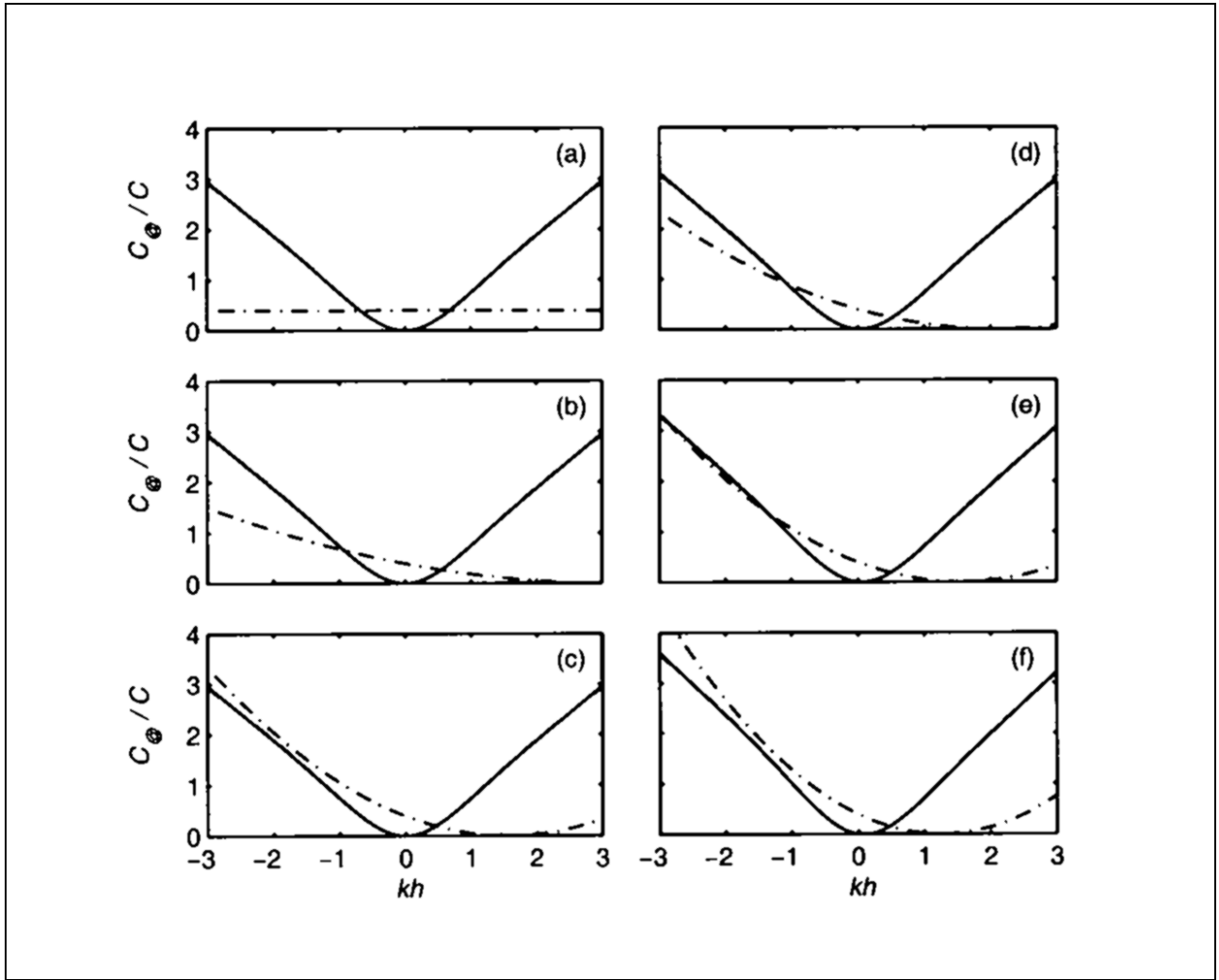


Figura 3. Raízes da relação de dispersão exata e do modelo com ordem arbitrária de não linearidade para uma onda de 10 s sobre fundo constante ( $h' = 10$  m). Para  $\xi'_0 = 0.1/s$  e: a) sem corrente, b) corrente uniforme ao longo de  $z$  com  $u'_{bc} = 2$  m/s e c) corrente uniforme ao longo de  $z$  com  $u'_{bc} = 4$  m/s. Para velocidade no fundo de  $u'_{bc} = 2$  m/s com vorticidade: d)  $\xi'_0 = 0.1$  1/s, e)  $\xi'_0 = 0.2$  1/s e f)  $\xi'_0 = 0.3$  1/s. (- · -) lado esquerdo de (73) e (75), (- -) lado direito de (75), (—) lado direito de (73).  $C_\theta$  é a velocidade de fase calculada usando (75). Nesta figura, as linhas (- · -) e (—) estão praticamente superpostas.

$$\begin{aligned} & \tilde{u}'_{\beta t'} + g\eta'_{x'} + \tilde{u}'_{\beta} \tilde{u}'_{\beta x'x'} + b_2 h' (h' \tilde{u}'_{\beta t'})_{x'x'} \\ & + b_1 h'^2 \tilde{u}'_{\beta t'x'x'} = 0 \end{aligned} \quad (83)$$

onde:

$$E = \left\{ (\eta' + h') \tilde{u}'_{\beta} + h'^2 \left[ a_1 h' \tilde{u}'_{\beta x'x'} + a_2 \tilde{u}'_{\beta x'x'} \right] \right\}_{x'} \quad (87)$$

onde:

$$\begin{aligned} a_1 &= \beta^2 / 2 - 1/6 & a_2 &= \beta + 1/2 \\ b_1 &= \beta^2 / 2 & b_2 &= \beta \end{aligned} \quad (84)$$

Segundo Wei e Kirby (1995), estas equações podem ser reescritas como:

$$\eta'_{t'} = E(\eta', \tilde{u}'_{\beta}) + R(\eta', \xi'_0) \quad (85)$$

$$[U(\tilde{u}'_{\beta})]_{t'} = F(\eta', \tilde{u}'_{\beta}, \xi'_0) \quad (86)$$

$$\begin{aligned} R &= - \left\{ \left[ \eta' h' + \frac{h'^2}{2} \right] \right. \\ & \left. + \frac{a_2}{2} h'^2 (h'^2)_{x'x'} + a_1 h'^3 h'_{x'x'} \right\}_{x'} \xi'_0 \end{aligned} \quad (88)$$

$$U = \tilde{u}'_{\beta} + \left[ b_1 h'^2 \tilde{u}'_{\beta x'x'} + b_2 h' (h' \tilde{u}'_{\beta})_{x'x'} \right] \quad (89)$$

$$F = -g\eta'_{x'} - \tilde{u}'_{\beta} \tilde{u}'_{\beta x'} \quad (90)$$

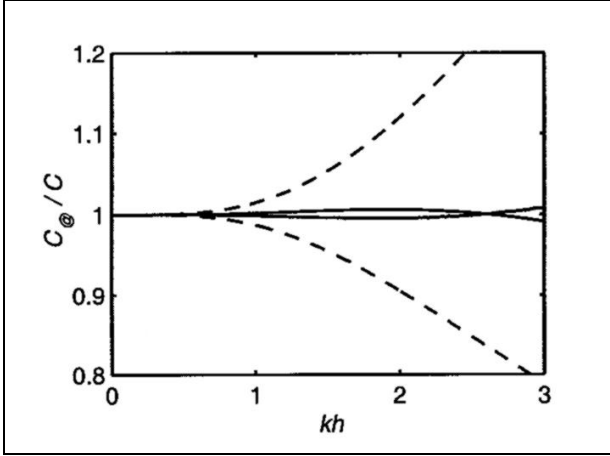


Figura 4. Comparação da velocidade de fase normalizada para o modelo de ordem arbitrária de não linearidade para diferentes valores de  $\alpha$ . — para  $\alpha = -0.39$ ; --- para  $\alpha = -1/3$ .  $C_0$  é a velocidade de fase calculada usando (75);  $u'_{bc} = 0.5$  m/s e  $\xi'_0 = 0.05$  1/s.

Definindo:

$$\bar{E} = E + R \quad (91)$$

$$\bar{F} = F + AX + FX \quad (92)$$

onde:

$$AX = -f_d(x)\tilde{u}'_\beta \quad (93)$$

$$FX = -\frac{g}{C_c^2} \frac{|\tilde{u}'_\beta| \tilde{u}'_\beta}{h'} \quad (94)$$

são termos adicionados para representar a camada dissipativa descrita adiante,  $AX$ , e a dissipação no fundo,  $FX$ , (este termo também pode ser formulado em função do fator de atrito de onda como em Rego, 1999), onde  $C_c$  é o coeficiente de Chézy.

O esquema Adam-Bashforth terceira/quarta ordem é usado para integração no tempo, e os estágios de predição e correção, respectivamente, são dados por:

$$\eta_i^{n+1} = \eta_i^n + \frac{\Delta t}{12} (23\bar{E}_i^n - 16\bar{E}_i^{n-1} + 5\bar{E}_i^{n-2}) \quad (95)$$

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \frac{\Delta t}{12} (23\bar{F}_i^n - 16\bar{F}_i^{n-1} + 5\bar{F}_i^{n-2}) \quad (96)$$

e:

$$\eta_i^{n+1} = \eta_i^n + \frac{\Delta t}{24} (9\bar{E}_i^{n+1} + 19\bar{E}_i^n - 5\bar{E}_i^{n-1} + \bar{E}_i^{n-2}) \quad (97)$$

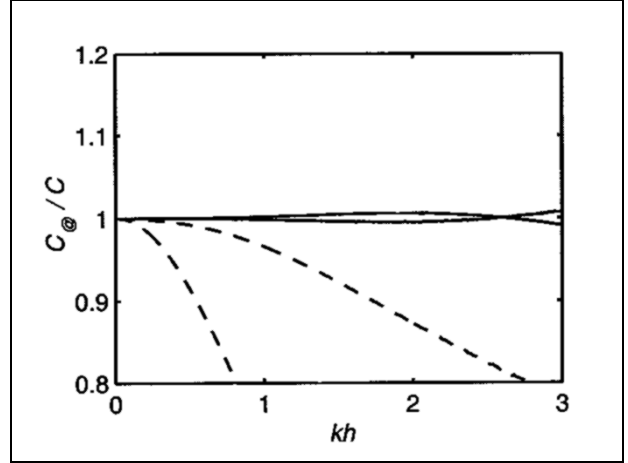


Figura 5. Comparação de velocidade de fase normalizada para o caso de ordem arbitrária de não linearidade (—) e fracamente não linear (---) para  $\beta = -0.531$  ( $\alpha = -0.39$ ).  $C_0$  é a velocidade de fase calculada usando (75);  $u'_{bc} = 0.5$  m/s e  $\xi'_0 = 0.05$  1/s.

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \frac{\Delta t}{24} (9\bar{F}_i^{n+1} + 19\bar{F}_i^n - 5\bar{F}_i^{n-1} + \bar{F}_i^{n-2}) \quad (98)$$

Depois de  $U^{n+1}$  ser calculado usando (96) e (98),  $u^{n+1}$  é determinado por um sistema tridiagonal de equações dado por (89).

O erro local é usado para controlar iterações:

$$\Delta r = \frac{r_i^{n+1} - \hat{r}_i^{(n+1)}}{r_i^{n+1}} \quad (99)$$

onde  $r$  pode representar as variáveis  $\eta$  ou  $u$ , e  $\hat{\phantom{r}}$  denota os resultados prévios e  $\Delta r$  é  $10^{-4}$ .

O método de relaxamento é dado por:

$$\tilde{r}_i^{n+1} = (1 - R_e)r_i^{n+1} + R_e\hat{r}_i^{n+1} \quad (100)$$

onde  $\sim$  indica os resultados ajustados e  $R_e$  é o coeficiente de relaxamento ( $0 < R_e < 1$ ).

O mesmo esquema de discretização espacial apresentado em Wei et al. (1995) é usado onde os termos dispersivos de  $O(\mu^2)$ , são discretizados até  $O(\Delta x^2)$  e os termos de  $O(1)$  são discretizados até  $O(\Delta x^4)$ . As fórmulas usuais de diferenças finitas centradas são usadas.

### Condições de contorno

Condições de contorno numéricas nos contornos incidente e aberto são necessárias para a

simulação da propagação de ondas e correntes. A geração, absorção e transmissão de ondas e correntes são consideradas no caso de um fundo plano e vorticidade constante.

**Contorno incidente** - A solução exata da teoria linear de Dias e Neves (1993) é usada para a obtenção da condição de contorno incidente. Para ondas regulares de pequena amplitude, a elevação da superfície, relativa ao nível de repouso, é admitida da forma:

$$\eta' = \frac{H'}{2} \cos(k'x' - \omega't') \quad (101)$$

e a velocidade horizontal é dada por:

$$u'_\beta = u'_b{}^c + (z'_\beta + h')\xi'_0 + \frac{gk' - \xi'_0\omega'}{\omega'^2} \frac{\cosh[k'(z'_\beta + h')]}{\cosh k'h'} \omega'\eta' \quad (102)$$

onde a frequência intrínseca é dada por (74).

Usando a relação de dispersão dada por (73), a expressão de velocidade para o modelo com ordem arbitrária é obtida:

$$u'_\beta = u'_b{}^c + (z'_\beta + h')\xi'_0 + \frac{1}{k'h'} \frac{\omega'\eta'}{[1 - (\alpha + 1/3)(k'h')^2]} \quad (103)$$

**Contorno aberto** - A condição de radiação em um domínio infinito representa um problema numérico, já que o modelo tem que calcular em um domínio limitado. Os casos onde há somente ondas ou correntes são relativamente simples e bem discutidos na literatura; quando ondas e correntes estão presentes, o modelo numérico deve absorver as ondas e transmitir a corrente. As equações governantes linearizadas para um fundo plano são apresentadas para o tratamento das diferentes formas de contorno aberto.

### Absorção de ondas

Transporte de massa zero em uma parede refletora é satisfeito impondo as seguintes condições:

$$u'_\beta{}^w = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \eta'^w}{\partial x'} = 0 \quad (104)$$

Termos dissipativos são adicionados à equação de conservação de quantidade de movimento para simular o problema de radiação em regiões finitas, como em Israeli e Orszag (1981). A dissipação é introduzida, como em Chen (1997), pela adição de um termo análogo à fricção no fundo à Equação (81):

$$\dots \kappa s(x')u'_\beta \quad (105)$$

onde  $\kappa$  é análogo à viscosidade cinemática. A função  $s(x')$  varia de 0 a 1 (no começo e fim da camada dissipativa, respectivamente) para permitir uma transmissão suave na camada dissipativa, e é dada por:

$$s(x') = \begin{cases} 0 & x' < x'_s \\ \frac{\exp(p_r^N) - 1}{\exp(1) - 1} & x'_s < x' < x'_f \end{cases} \quad (106)$$

onde:

$$p_r = \frac{x' - x'_s}{x'_f - x'_s} \quad (107)$$

$p_r$  é a posição relativa,  $x'_f$  é a coordenada do contorno na malha,  $x'_s$  é a coordenada do início da camada dissipativa e  $N$  é uma constante (2 é usado aqui). A camada dissipativa para ondas tem em torno de dois a três comprimentos de onda.

### Transmissão de correntes

Para o caso de fundo plano e movimento devido apenas a correntes, a condição de radiação pode ser reescrita, em forma adimensional, como:

$$\frac{\partial \eta^c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (c\eta^c) = 0 \quad (108)$$

A equação de continuidade é dada por:

$$\frac{\partial \eta^c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\epsilon\eta^c + h)u_b^c + \frac{(\epsilon\eta^c + h)^2}{2} \xi_0 \right] = O(\mu^2) \quad (109)$$

onde termos de  $O(\mu^2)$  são considerados pequenos para ondas longas. Combinando essas duas equações, segue que:

$$c\eta^c = (\epsilon\eta^c + h)u_b^c + \frac{(\epsilon\eta^c + h)^2}{2} \xi_0 + O(\mu^2) \quad (110)$$

Nota-se um termo adicional devido à vorticidade horizontal em comparação à equação apresentada por Chen (1997) para a condição de radiação no caso de uma corrente constante ao longo da vertical.

### Absorção de ondas e transmissão de correntes

Uma camada dissipativa como descrita em Chen (1997), segundo Larsen e Dancy (1983), foi usada. Um coeficiente dissipativo é usado para atenuar a velocidade, assim como a elevação da superfície, a um valor de referência no contorno (neste caso, admite-se o valor da corrente permanente), da seguinte forma:

$$u'_i = u'^{\text{ref}}_i + (u'^{\text{ref}}_i - u'_i) / C_s(i) \quad (111)$$

O coeficiente dissipativo é dado por:

$$C_s(i) = \alpha_s \gamma_s^{n_x - i} \quad \text{para } i = n_x - L, \dots, n_x \quad (112)$$

onde o comprimento da camada dissipativa,  $L$ , pode variar de 50 a 100 pontos da malha. Os valores de 2.0 e 0.9 são usados para  $\alpha_s$  e  $\gamma_s$ , respectivamente, como recomendado por Chen (1997).

### Experimentos numéricos

Em todos os testes a batimetria consiste de uma barra trapezooidal submersa sobre fundo constante (Figura 6), dado por:

$$h' = \begin{cases} .8 \text{ m} & x' \leq 7 \text{ m}, x' \geq 53 \text{ m} \\ -.02x' + .94 \text{ m} & 7 \text{ m} < x' < 37 \text{ m} \\ .2 \text{ m} & 37 \text{ m} \leq x' \leq 41 \text{ m} \\ .05x' - 1.85 \text{ m} & 41 \text{ m} < x' < 53 \text{ m} \end{cases} \quad (113)$$

como descrito por Chen (1997). Para efeitos de comparação, a mesma distribuição do coeficiente de Chézy é utilizada, e. g.:

$$C_c = \begin{cases} 300 \text{ m}^{1/2}/\text{s} & x' < 37 \text{ m} \text{ e } x' > 55 \text{ m} \\ 30 \text{ m}^{1/2}/\text{s} & 37 \text{ m} \leq x' \leq 55 \text{ m} \end{cases} \quad (114)$$

Os experimentos numéricos são agrupados em duas categorias. A primeira pretende investigar como a corrente influencia os parâmetros de onda.

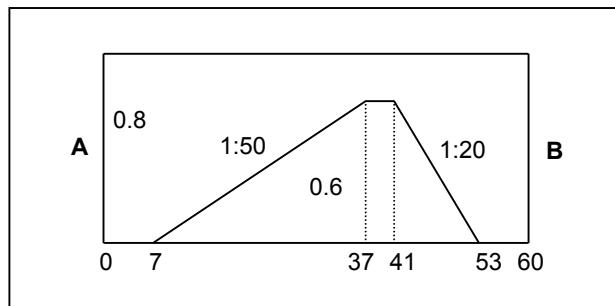


Figura 6. Batimetria modelo segundo Chen (1997).

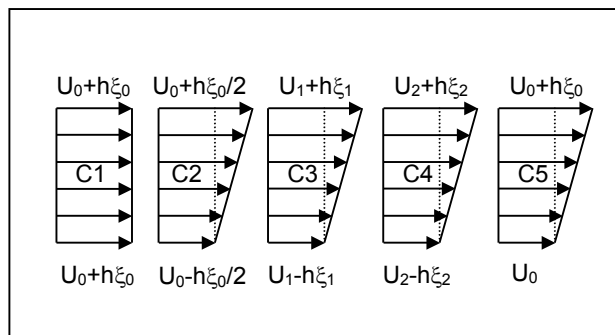


Figura 7. Esquema dos perfis de correntes usadas nos testes numéricos.

Três perfis de velocidade são considerados: uma corrente constante em  $z$  (C1), uma corrente com cisalhamento vertical linear (C2) com o mesmo transporte de massa de C1, e uma corrente (C5) com igual cisalhamento que o caso anterior (C2) mas com a mesma velocidade na superfície que C1. A segunda categoria pretende investigar a influência da magnitude do cisalhamento, para correntes (C3 e C4) com mesmo transporte de massa que C2. Todas as correntes (Figura 7) se propagam na direção oposta à direção da onda. Os espaçamentos em  $t$  e  $x$  são 0.005 s e 0.02 m, respectivamente.

### Propagação de ondas monocromáticas

A Figura 8 mostra os resultados para propagação de ondas monocromáticas com período de 1.2 s e 2.4 s e amplitude de 0.02 m. Os resultados indicam que há concentração de energia em cima da barra e geração de harmônicos daí em diante, para a onda mais longa. Para a onda mais curta, há uma ligeira redução da altura de onda, que é compatível com a redução de densidade de energia de onda nos estágios iniciais de empinamento em águas intermediárias e dissipação de energia. Em ambos os casos, as velocidades sobre a barra são o dobro dos valores iniciais. A pressão é principalmente hidrostática, mas a flutuação dinâmica sobre a barra é maior no caso da onda de 2.4 s.

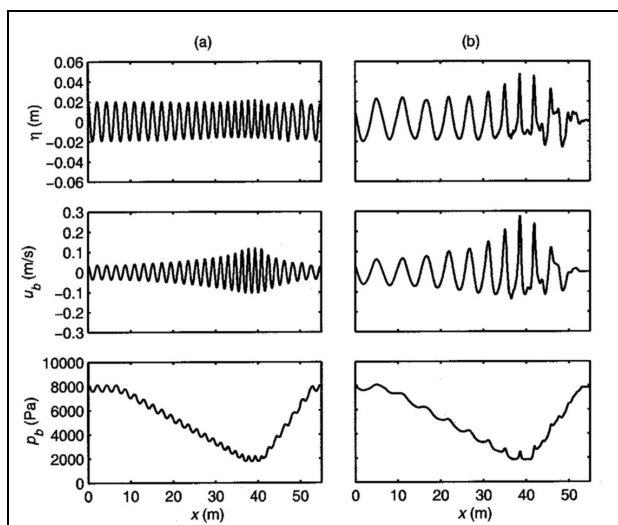


Figura 8. Resultados do modelo para elevação da superfície, velocidade no fundo e pressão no fundo para ondas monocromáticas com períodos: a)  $T' = 1.2$  s e b)  $T' = 2.4$  s.

### Geração de correntes permanentes

A condição inicial é dada por:

$$\eta'(i) = \eta' \quad i = 1, 2, \dots, nx \quad (115)$$

$$u_b^c(i) = \frac{Q'}{h'(i) + \eta'} - \frac{h'(i) + \eta'}{2} \xi_0 \quad i = 1, 2, \dots, nx \quad (116)$$

A equação de Bernoulli é usada para verificar os resultados do modelo. Para isto, introduz-se a função corrente, que no plano  $x, z$ , é dada por:

$$u' = -\frac{\partial \psi}{\partial z'} \quad w' = \frac{\partial \psi}{\partial x'} \quad (117)$$

onde a equação governante é:

$$\nabla^2 \psi = f(\psi) \quad \text{onde} \quad f(\psi) = -\xi' y' \quad (118)$$

A equação de Bernoulli, como dada em Neves (1987), lê:

$$gz' + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial x'} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial z'} \right)^2 \right] + \int_{\psi_b}^{\psi} f(s) ds = B \quad \text{em} \quad z' = \eta' \quad (119)$$

onde  $B$  é constante em todo o fluido,  $f(s)$  é uma função arbitrária que descreve a distribuição da

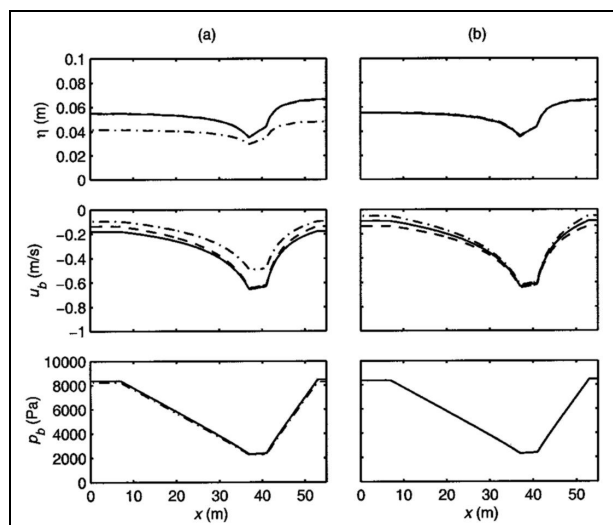


Figura 9. Resultados do modelo elevação da superfície, velocidade no fundo e pressão no fundo para correntes a) C1 (-), C2 (- -) e C5 (- · -) e b) C2 (- -), C3 (-) e C4 (- · -).

vorticidade ao longo das linhas de correntes, e \* indica a linha de corrente na qual a expressão está sendo calculada. Para vorticidade constante, a equação de Bernoulli no fundo e na superfície lêem, respectivamente:

$$\frac{p'_b}{\rho} - gh' + \frac{1}{2} (u_b'^2 + w_b'^2) = B' \quad \text{em} \quad z' = -h' \quad (120)$$

$$g\eta' + \frac{1}{2} (u_s'^2 + w_s'^2) - \psi_\eta \xi_0' = B' \quad \text{em} \quad z' = \eta' \quad (121)$$

Com a velocidade na superfície definida por (69) em  $z'_\beta = \eta'$ , a função corrente no fundo e na superfície livre é dada por:

$$\psi(x', -h') = \psi_b = 0 \quad (122)$$

$$\psi(x', \eta') = \psi_\eta = u_b'(h' + \eta') + \frac{(h' + \eta')^2}{2} \xi_0' \quad (123)$$

Quando se desprezam os efeitos dispersivos na Equação (121), todos os termos com vorticidade se cancelam, resultando em:

$$g\eta' + \frac{1}{2} u_b'^2 = B' \quad (124)$$

Derivando a Equação de Bernoulli (121) em relação a  $x$ , e usando a condição de contorno na superfície livre, a equação de conservação de quan-

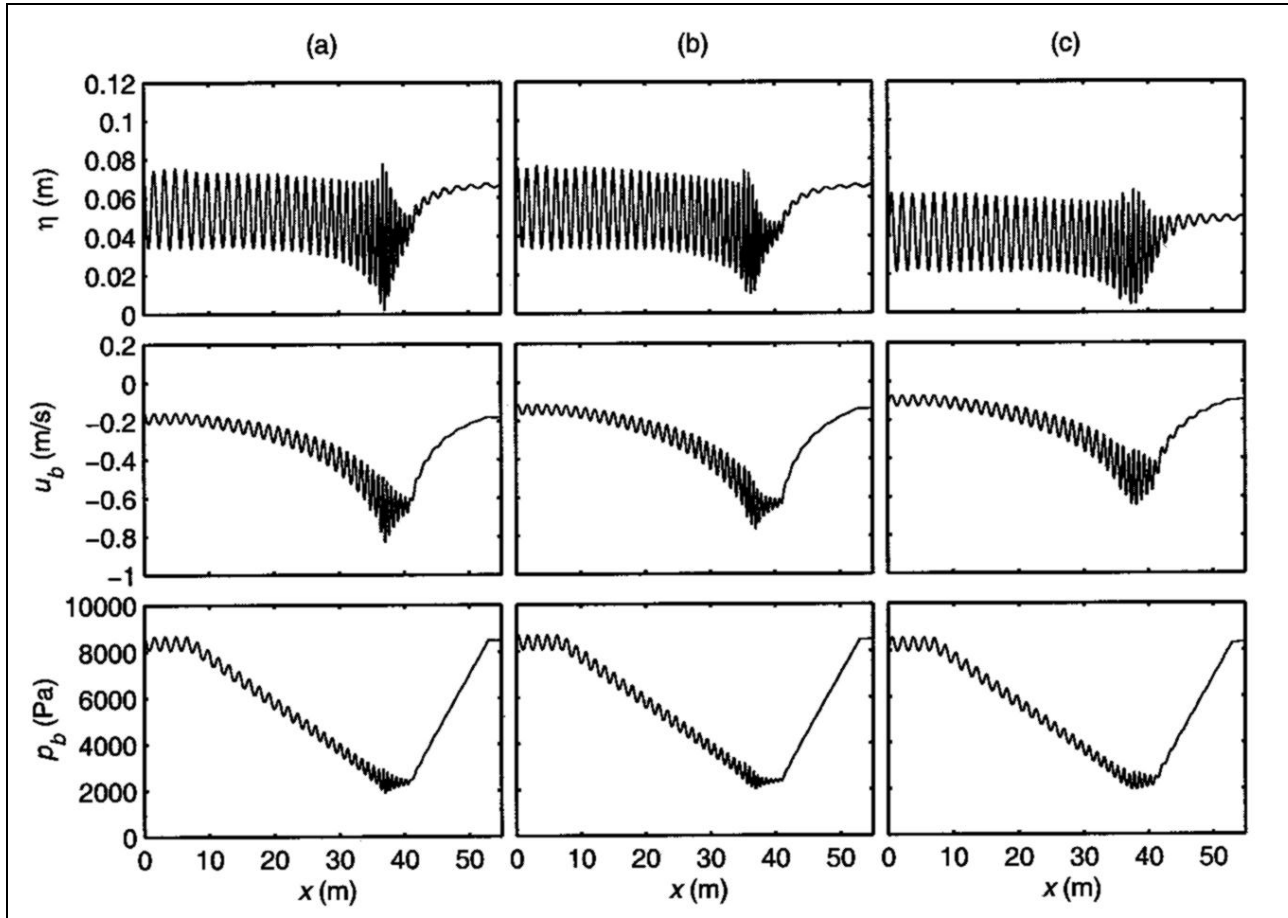


Figura 10. Resultados do modelo para elevação da superfície, velocidade no fundo e pressão no fundo para onda de 1.2 s nas correntes: a) C1, b) C2 e c) C5.

Tabela 1. Parâmetros iniciais para correntes permanentes em  $x' = 60$  m ( $h' = 0.8$  m).

-	$u_b^c$ (m/s)	$\xi_0$ (1/s)	$u_s^c$ (m/s)	$\eta^c$ (m)	$B'$	$Q'$ (m <sup>2</sup> /s)
C1	-0.1770	0.0	-0.1770	0.0667	0.670	-0.1534
C2	-0.1340	-0.1	-0.2206	0.0664	0.660	-0.1536
C3	-0.0910	-0.2	-0.2642	0.0661	0.653	-0.1538
C4	-0.0480	-0.3	-0.3078	0.0659	0.648	-0.1540
C5	-0.0920	-0.1	-0.1769	0.0490	0.480	-0.1141

Tabela 2. Parâmetros de onda em  $x' = 0$  m ( $h' = 0.8$  m).

-	$u_b^c$ (m/s)	$\xi_0$ (1/s)	$\eta^c$ (m)	$u_s^c$ (m/s)	$k'$ (1/m) $T'=1.2$ s	$l'$ (m) $T'=1.2$ s	$k'$ (1/m) $T'=2.4$ s	$l'$ (m) $T'=2.4$ s
-	0.0000	0.0	0.0000	0.0000	2.8663	2.1921	1.0319	6.0892
C1	-0.1798	0.0	0.0548	-0.1798	3.5233	1.7833	1.1312	5.5546
C2	-0.1377	-0.1	0.0551	-0.2232	3.6411	1.7256	1.1349	5.5362
C3	-0.0957	-0.2	0.0553	-0.2668	3.7747	1.6646	1.1386	5.5184
C4	-0.0536	-0.3	0.0556	-0.3103	3.9262	1.6003	1.1420	5.5019
C5	-0.0950	-0.1	0.0412	-0.1791	3.4339	1.8298	1.1088	5.6669

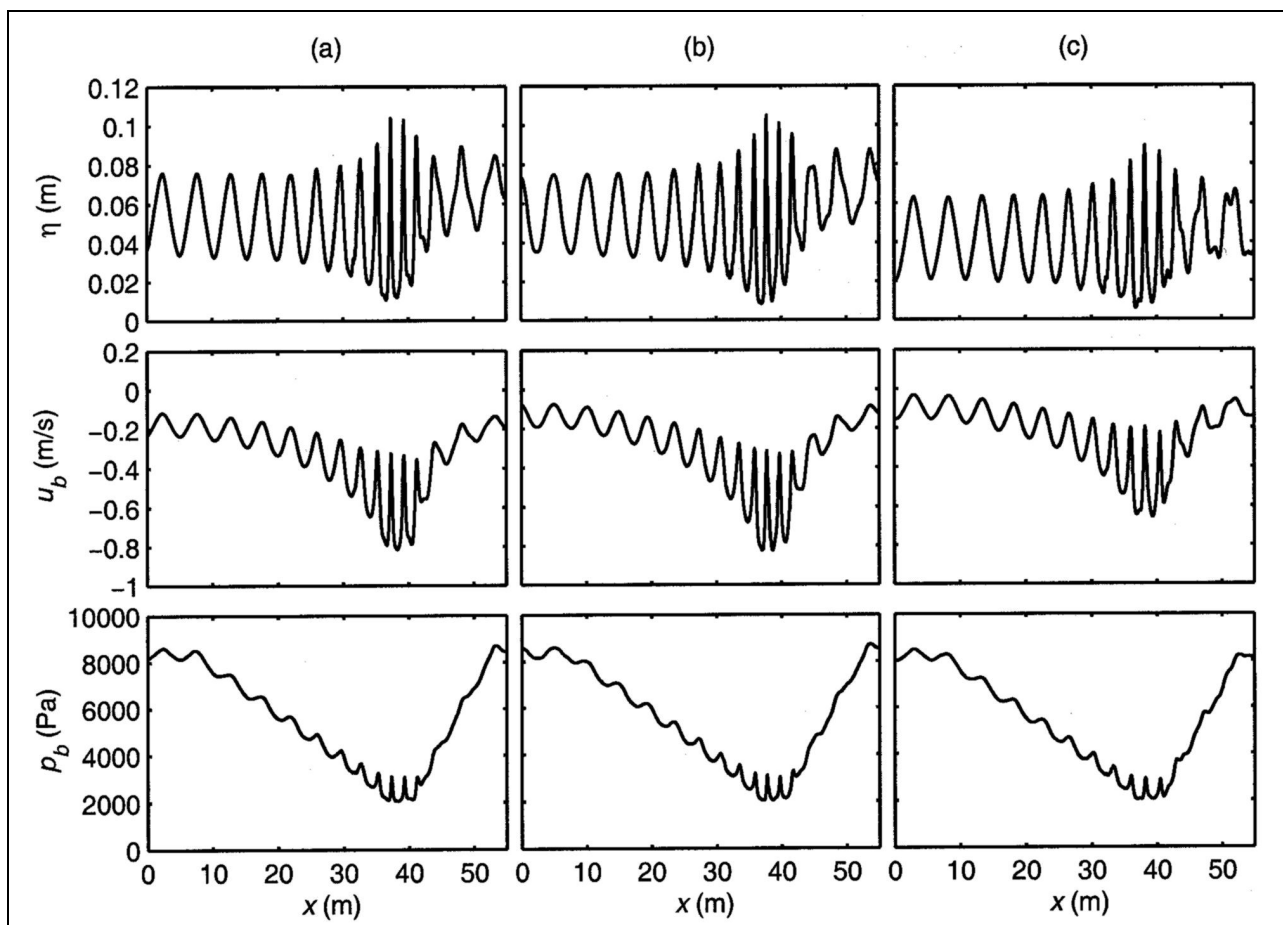


Figura 11. Resultados do modelo para elevação da superfície, velocidade no fundo e pressão no fundo para onda de 2.4 s nas correntes: a) C1, b) C2 e c) C5.

tidade de movimento é obtida, e em variáveis adimensionais lê:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \eta}{\partial x} + \varepsilon u_b \frac{\partial u_b}{\partial x} + \varepsilon^3 \mu^2 \left\{ \left[ (u_b + h\xi_0) \left( \frac{\partial u_b}{\partial x} \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \xi_0 \frac{\partial h}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} + (u_b + h\xi_0)^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right] \frac{\partial \eta}{\partial x} \right. \\
 & \left. + \varepsilon \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\eta \xi_0 u_b + h \xi_0) \right] \frac{\partial \eta}{\partial x} \right. \\
 & \left. + 2\eta \xi_0 (u_b + h\xi_0) \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right] \frac{\partial \eta}{\partial x} \\
 & \left. + \varepsilon^2 \eta \xi_0^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \eta \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right] \right\} = 0
 \end{aligned} \quad (125)$$

Na aproximação fracamente não linear, esta equação é a mesma que (83) para escoamentos permanentes. A constante de Bernoulli provou ser

um parâmetro fácil de calcular e útil no controle dos resultados numéricos.

A Tabela 1 apresenta os valores da velocidade da corrente no fundo,  $u'_{cb}$ , e na superfície,  $u'_{cs}$ , a vorticidade horizontal,  $\xi'_0$ , transporte de massa,  $Q'$ , e a constante de Bernoulli,  $B'$ , para os cinco casos estudados. A Figura 9 mostra os resultados para elevação da superfície, velocidade no fundo e pressão no fundo para as correntes C1, C2 e C5 (a) e as correntes C2, C3 e C4 (b).

### Ondas monocromáticas propagando-se sobre correntes

Depois que a solução para a corrente permanente é determinada, os resultados são usados como condição inicial e ondas são introduzidas no contorno incidente usando a aproximação da teoria linear dada na seção "O Caso Unidimensional Horizontal - Condições de Contorno". As Figuras 10 e 11 mostram as propriedades do escoamento para

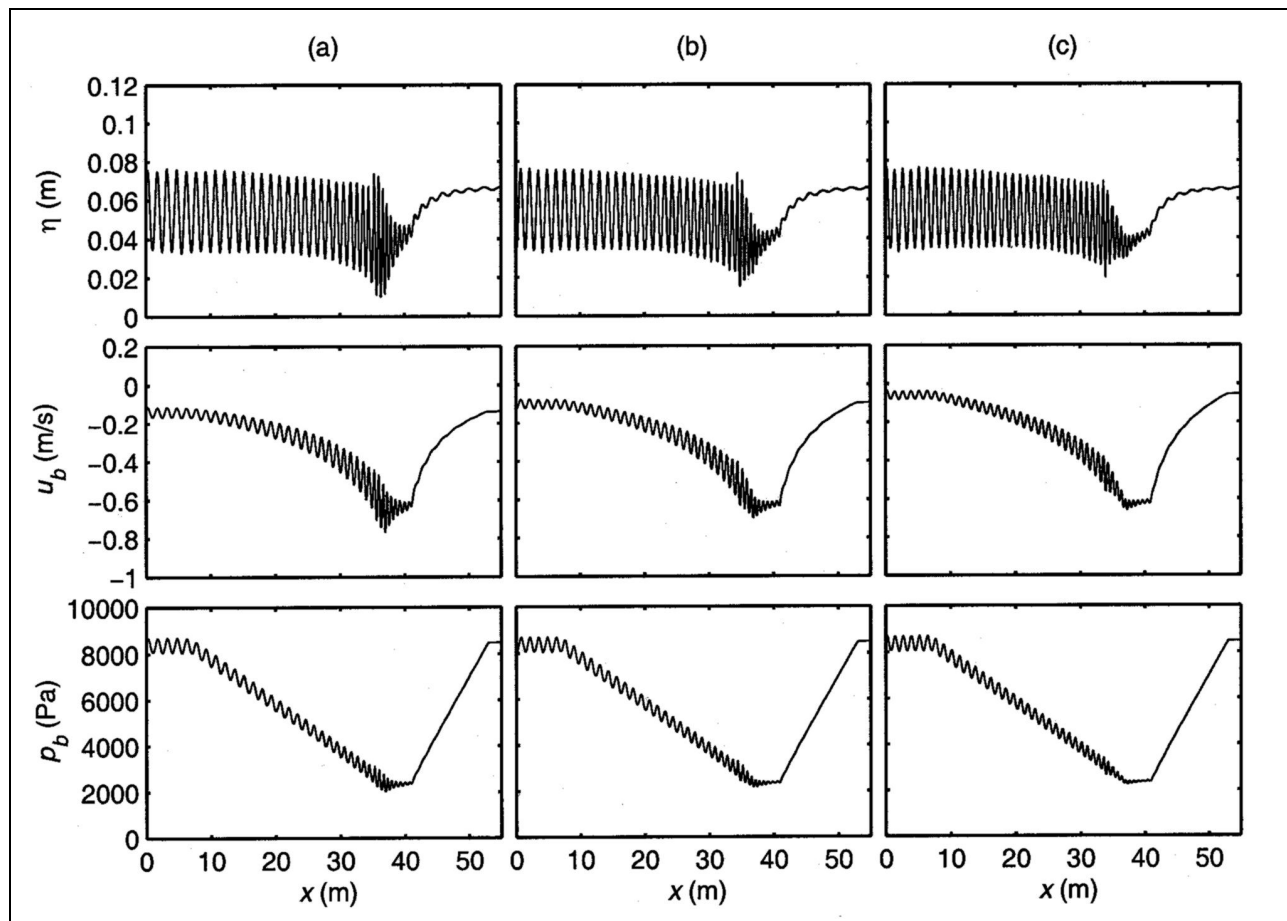


Figura 12. Resultados do modelo para elevação da superfície, velocidade no fundo e pressão no fundo para onda de 1.2 s nas correntes: a) C2, b) C3 e c) C4.

ondas de 1.2 e 2.4 s, respectivamente, propagando-se nas correntes C1, C2 e C5. As Figuras 12 e 13 mostram o mesmo para C2, C3 e C4 e ondas de 1.2 s e 2.4 s, respectivamente. A velocidade que é mostrada nas Figuras 10 a 13 corresponde à componente irrotacional da velocidade,  $u'_b$ .

O efeito dinâmico mais forte ocorre para a onda de 2.4 s, assim como observado no caso da ausência de correntes. Para a onda de 1.2 s propagando-se na corrente C1, Figura 10a, o ponto de maior amplitude é um pouco diferente daquele achado por Chen (1997). Isto é esperado já que no caso dele, permite-se que a velocidade seja da ordem da celeridade da onda, enquanto as equações usadas aqui são fracamente não lineares. Comparando os resultados da onda de 1.2 s propagando-se nas correntes C2, C3 e C4, o ponto de maior amplitude desloca-se lentamente para cima já que as velocidades da corrente na superfície ficam maiores. A Tabela 2 mostra o efeito da vorticidade no comprimento de onda, usando a relação de dispersão do modelo. Os efeitos da corrente são mais

notáveis na onda mais curta já que a velocidade de grupo é menor. O efeito da vorticidade no comprimento de onda fica evidente (C2, C3 e C4), assim como a magnitude da velocidade da corrente na superfície (C1 e C5). A presença da corrente afeta os perfis de velocidade, mudando a pressão dinâmica.

## CONCLUSÕES

Equações governantes para a propagação de ondas não lineares e fracamente dispersivas  $O(\mu^2)$  foram deduzidas para escoamentos com vorticidade horizontal constante ao longo de  $z$ . O relaxamento da condição de irrotacionalidade na direção horizontal foi motivado pela observação de que escoamentos na zona costeira apresentam tensões cisalhantes tanto no fundo como na superfície livre. Portanto, foi a intenção mostrar uma teoria tipo Boussinesq numa perspectiva mais ampla.

A influência da vorticidade no movimento ondulatório em si pode ser acessado pela equações

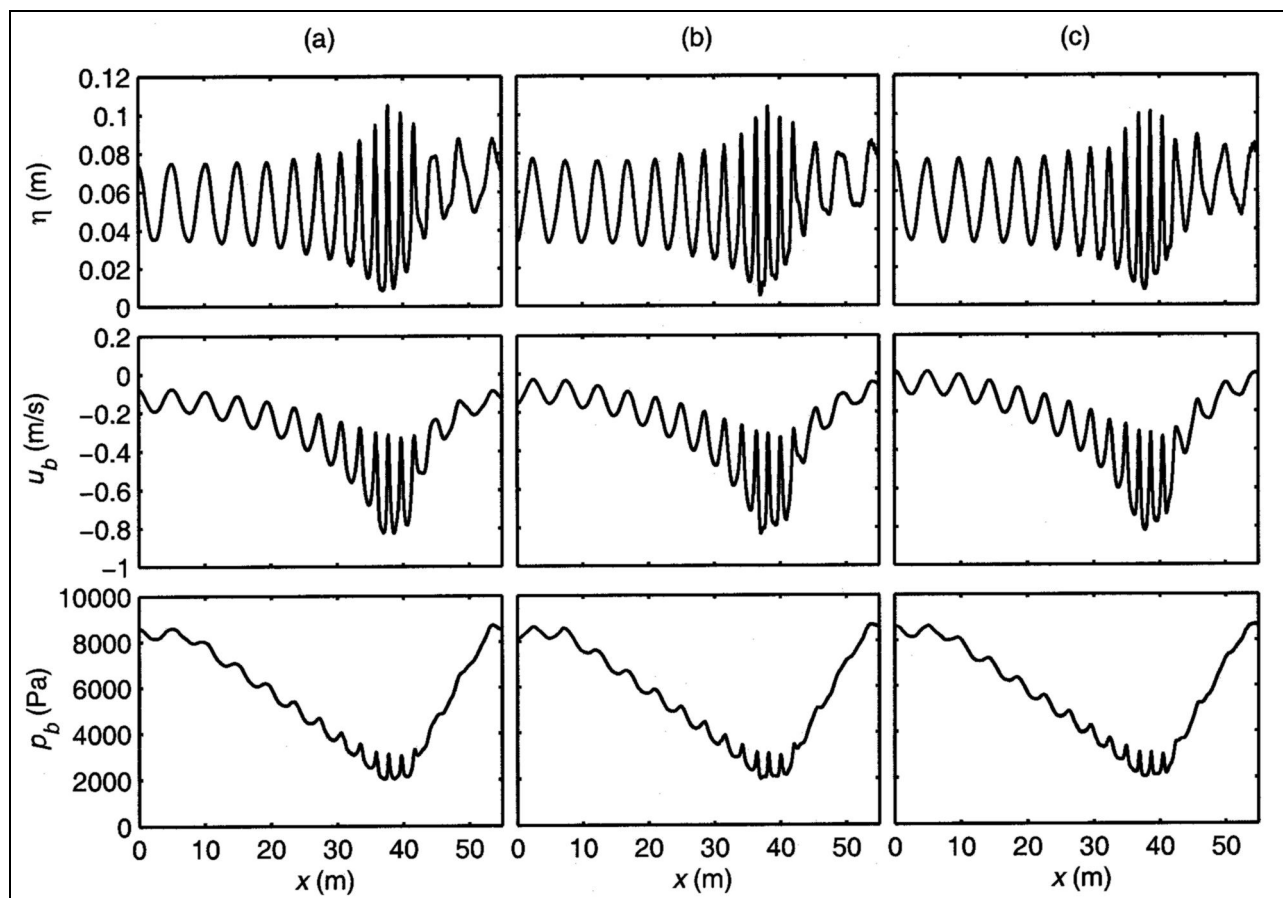


Figura 13. Resultados do modelo para elevação da superfície, velocidade no fundo e pressão no fundo para onda de 2.4 s nas correntes: a) C2, b) C3 e c) C4.

deduzidas na seção “Equações Estendidas para Ondas Não Lineares e Fracamente Dispersivas em Escoamentos com Vorticidade Horizontal”. Estas equações reduzem-se às equações estendidas tipo Boussinesq quando a vorticidade é nula. O método apresentado pode ser uma primeira aproximação para outras formas de distribuição de vorticidade ao longo da profundidade.

As expressões para a distribuição de pressão ao longo da direção vertical na aproximação fracamente não linear é formalmente a mesma para casos irrotacionais ou rotacionais, exceto para o caso de vorticidade variável no tempo. Isso motivou uma investigação teórica maior sobre o transporte de vorticidade em modelos bidimensionais na horizontal. As equações foram deduzidas para diferentes razões entre a vorticidade horizontal ( $V_H$ ) e vertical ( $V_V$ ): fraca ( $\ll 1$ ), O (1) e forte ( $\gg 1$ ). Parece evidente que o modelo completo deve ser melhor investigado para se entender plenamente os escoamentos em águas rasas.

A influência da vorticidade horizontal no escoamento é investigado para escoamentos bidi-

mensionais na vertical através da simulação da transformação de ondas na presença de correntes sem e com cisalhamento vertical (onde a vorticidade é considerada permanente e uniforme). Para efeitos numéricos, a constante de Bernoulli provou ser um parâmetro útil para testar a convergência do modelo.

Resultados do modelo mostraram que a inclusão de vorticidade modifica parâmetros como velocidade e pressão. Além disso, a inclusão de vorticidade modifica formalmente a forma da relação de dispersão mudando o comprimento de onda quando comparado ao caso de ondas interagindo com correntes constantes ao longo da vertical. A diferença entre as relações de dispersão dos modelos com ordem arbitrária e fraca de não linearidade indica que o primeiro deve ser usado no futuro.

## AGRADECIMENTOS

Valeria S. Rego recebeu apoio financeiro da Fundação Capes, Brasil.

## REFERÊNCIAS

- CHEN, Q. (1997). *The study of wave blocking and current effects on nonlinear interactions of shallow water waves using advanced Boussinesq models*. Tese de Doutorado, Old Dominion University.
- DIAS, A. M. e NEVES, C. F. (1993). *A determinação de altura de onda na presença de correntes*. X Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos, Gramado, ABRH, p. 446 - 455.
- DINGEMANS, M. W. (1997). Water wave propagation over uneven bottoms. *World Scientific*.
- HEDGES, T. S. & LEE, B. W. (1992) The equivalent uniform current in wave-current computations. *Coastal Engng* 16, p. 301 - 311.
- ISRAELI, M. & ORZAG, S. A. (1981). Approximation of radiation boundary condition. *J. Comput. Phys.* 41, p. 115 - 135.
- KIRBY, J. T. & CHEN, T.-M. (1989). Surface waves on vertically sheared flows: approximate dispersion relations. *J. Geophys. Res.* 94, p. 1013 - 1027.
- KIRBY, J. T. (1997). Nonlinear, dispersive long waves in water of variable depth. In: *Gravity waves on water of variable depth* (ed. J. N. Hunt), Computational Mechanics Publications, 10, p. 55 - 125.
- LARSEN, J. & DANCY, H. (1983). Open boundaries in short wave simulations - a new approach. *Coastal Engng* 7, p. 285 - 297.
- NEVES, C. F. (1987). *A particular rotational wave theory*. Tese de doutorado, University of Florida.
- NWOGU, O. (1993). Alternate form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation. *J. Waterway, Port, Coastal Ocean Engng* 119, p. 618 - 638.
- PEREGRINE, D. H. (1967). Long waves on a beach. *J. Fluid Mech.* 27, p. 815 - 827.
- PEREGRINE, D. H. (1976). Interaction of water waves and currents. *Adv. Appl. Math.* 16, p. 9 - 117.
- REGO, V. S. (1999). *Um modelo de ondas tipo Boussinesq para escoamentos com cisalhamento vertical*. Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- REGO, V. S. & NEVES, C. F. (1997). A Boussinesq-type wave model with vertical shear. *Proc. WAVES'97: 3rd Intl Symp. Ocean Wave Measurement Analysis*, Virginia Beach, ASCE, p. 446 - 460.
- SKYNER, D. J. & EASSON, W. J. (1998). Wave kinematics and surface parameters of steep waves traveling on sheared currents. *J. Waterway, Port, Coastal Ocean Engng* 124, p. 1 - 6.
- WEI, G. & KIRBY, J. T. (1995). A time-dependent numerical code for extended Boussinesq equations. *J. Waterway, Port, Coastal Ocean Engng* 121, p. 251 - 261.
- WEI, G.; KIRBY, J. T.; GRILLI, S. T. & SUBRAMANYA, R. (1995). A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. Part 1. Highly non-linear unsteady waves. *J. Fluid Mech.* 294, p. 71 - 92.
- WITTING, J. M. (1984). A unified model for the evolution of nonlinear water waves. *J. Comp. Phys.* 56, p. 203 - 236.
- YOON, S. B. & LIU, P. L.-F. (1989). Interactions of currents and weakly nonlinear water waves in shallow water. *J. Fluid Mech.* 205, p. 397 - 419.

## *Nonlinear and Dispersive Waves in Flows with Horizontal Vorticity*

### ABSTRACT

*Equations are derived describing the propagation of nonlinear and weakly dispersive waves in flows with horizontal vorticity. A pre-defined velocity field is assumed in which horizontal vorticity is uniform over depth. For zero horizontal vorticity, the new equations are reduced to the fully nonlinear Boussinesq-type equations of second order (improved) dispersion. The effect of vorticity on the flow is demonstrated by simulating waves riding on currents with and without linear vertical shear for flows in the  $x, z$  plane. Model results for uniform over depth currents are compared to vertically sheared currents with (a) same mass transport but different vorticity and (b) same velocity at the surface. Introduction of horizontal vorticity formally modifies the dispersion relation.*

*Keywords: waves propagation; horizontal vorticity.*