

Uma Introdução às Técnicas Lagrangeanas: Uma Aplicação do Método SPH a Problemas de Engenharia

Joel Roberto Guimarães Vasco, Geraldo de Freitas Maciel, Carlos Roberto Minussi

UNESP – SP

joel@dec.feis.unesp.br, maciel@dec.feis.unesp.br, minussi@dee.feis.unesp.br

Recebido: 09/02/10 - revisado: 31/01/11 - aceito: 16/03/11

RESUMO

Métodos numéricos baseados no paradigma lagrangeano já estão consolidados do ponto de vista da comunidade científica internacional, tendo em vista os refinamentos realizados ao longo das três décadas desde sua criação. No entanto, no que tange à aplicação dessa filosofia no cenário nacional, nota-se um desenvolvimento incipiente, a despeito das vantagens que essas novas técnicas apresentam. Sendo assim, essa comunicação científica tem o objetivo de, num primeiro momento, introduzir os conceitos básicos e equacionamento acerca das técnicas numéricas lagrangeanas, dando ênfase ao método SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics). Na sequência, aplica-se o SPH a alguns problemas clássicos da Engenharia, tratando exclusivamente de escoamentos de fluidos ideais. Dentre esses, especial atenção é dada aos problemas de impacto hidrodinâmico de um bloco indeformável em um canal de águas tranquilas.

Palavras-chave: técnicas lagrangeanas, métodos numéricos, SPH, impacto hidrodinâmico

INTRODUÇÃO E MOTIVAÇÃO

A interação entre fluido e estrutura é, sem dúvida, um fenômeno complexo, pois congrega duas áreas em que a busca pela solução de certos problemas, envolvendo equações fortemente não-lineares, ainda figura como desafio aos pesquisadores. Ainda que complexa, a interação fluido-estrutura deve ser melhor investigada, pois reveste-se de importância significativamente prática para indústrias aeroespacial, civil, naval, mecânica, nuclear e muitas outras.

A geração de ondas causada pelo impacto entre sólido e fluido, por exemplo, é um ramo dentro da grande área de interação fluido-estrutura. Neste caso, foca-se principalmente a dinâmica adquirida pelo fluido causada pela transferência de quantidade de movimento do sólido. Esse é o caso das ondas de Kelvin, ou *ship waves*, que aparecem no deslocamento de embarcações ao longo de corpos de água. Ondas também são geradas pelo impacto da estrutura do casco de embarcações na superfície da água (*slamming*), principalmente nas de alta velocidade. Sabe-se também da preocupação permanente da comunidade científica na previsão e controle da geração de ondas por impacto de massas sólidas em meio líquido, principalmente em regime de

águas rasas (deslizamento de terra ou rocha em lagos de barragem, por exemplo).

No entanto, sendo por natureza um fenômeno de difícil formulação analítica e, como consequência, de difícil obtenção de uma solução, aplicam-se métodos numéricos tradicionais ao problema de impacto hidrodinâmico. Por métodos tradicionais chamam-se, aqui, os métodos numéricos que necessitam da discretização do domínio. Frente à limitação de representação de domínios de geometrias complexas e/ou descontinuidades, aplicam-se algumas técnicas, como a reestruturação de malha ou malhas adaptativas. Desta forma é possível tratar as descontinuidades do domínio, mas, em contrapartida, aumentam consideravelmente o tempo de processamento além de atrelar a confiabilidade da solução obtida ao algoritmo de reestruturação de malha.

Novos métodos numéricos, desvincilhados do paradigma de discretização do domínio, vêm ganhando força nos últimos anos, principalmente pela capacidade em representar fenômenos altamente não-lineares e a naturalidade com a qual tratam descontinuidades. Estes métodos são conhecidos como Métodos de Partículas.

Os Métodos de Partículas podem ser definidos, de uma maneira geral, como métodos numéricos de solução de um problema físico que não necessitam de discretização do domínio a ser simulado

(*meshfree*). O domínio é representado por um conjunto de partículas, cuja dinâmica é determinada de acordo com as equações de balanço (conservação da massa e quantidade de movimento), escritas na forma Lagrangeana. Dentre os Métodos de Partículas, destacam-se o SPH (*Smoothed Particle Hydrodynamics*) e o MPS (*Moving Particle Semi-implicit Method*).

Frente à possibilidade de abandonar a discretização de domínios de geometrias cada vez mais complexas e ao desenvolvimento recente, eventos e publicações internacionais acerca dos Métodos de Partículas vêm aumentando significativamente. Esse fato reforça e elucida o interesse da comunidade científica internacional na aplicação dos Métodos de Partículas aos problemas de Engenharia e sua potencialidade.

Sendo assim, esta comunicação científica tem o objetivo de, num primeiro momento, introduzir os conceitos básicos e equacionamento acerca das técnicas numéricas lagrangeanas, dando ênfase ao método SPH. Na sequência, aplica-se o SPH a alguns problemas clássicos da Engenharia, tratando exclusivamente de escoamentos de fluidos ideais. Dentre esses, especial atenção é dada aos problemas de impacto hidrodinâmico de um bloco indeformável em um canal de águas tranquilas.

IMPACTO HIDRODINÂMICO

Os problemas de impacto hidrodinâmico são extensamente estudados há mais de um século, por representar situações práticas na Engenharia. Faz-se aqui uma breve revisão das contribuições à resolução numérica do impacto hidrodinâmico, citando algumas técnicas utilizadas.

Certamente, uma das técnicas tradicionais mais utilizadas na solução de problemas de impacto hidrodinâmico é o Método das Diferenças Finitas (MDF; Smith, 1984), ou uma de suas variações, como o MVF (Método dos Volumes Finitos). Cabe ainda lembrar o método VOF (*Volume of fluid*), técnica muito utilizada na dinâmica dos fluidos computacional para determinar a posição da superfície livre. Kleefsman et al. (2005) lançam mão da técnica associada ao MVF para determinar a superfície livre, regida pela equação de Navier-Stokes, para simular problemas de impacto hidrodinâmico, como a entrada de água no convés, analisado como um problema tipo ruptura de barragem com presença de obstáculo posterior, e o *slamming* de um diedro e cilindro rígidos incidindo sobre meio líquido em repouso. Cheng e Arai (2002) analisam o efeito do

sloshing tridimensionalmente em seu modelo numérico em diferenças finitas juntamente com a técnica *Surf* (determinação da posição superfície livre).

Maciel (1991) analisa a queda de elementos sólidos indeformáveis e fragmentados, tanto experimental quanto analiticamente, simulando o fenômeno de avalanches nos grandes lagos europeus. O autor reproduz a energia adquirida pelo fluido em termos da altura do *soliton* gerado, analisando as teorias de Saint-Venant, Boussinesq e Serre. Nascimento (2001) usa um modelo numérico (MVF) com base nas equações de Serre para estimar a energia da onda formada pela incidência de um bloco, considerado indeformável, que desliza em um plano inclinado e incide num meio líquido em repouso. Mais recentemente, Souza (2007) perfaz o mesmo caminho, agora com material fragmentado (granular) e equipamentos de elevada precisão, tanto na determinação do campo orbital quanto nas alturas de onda.

Mitra e Sinhamahapatra (2005) usam o MEF (Método dos Elementos Finitos) para descrever o comportamento da superfície livre submetida ao *sloshing* em um tanque retangular, usando uma formulação em termos da pressão. Bereznitski (2003) utiliza a formulação MEF tanto para representar a estrutura quanto o fluido em seu estudo sobre a influência da hidroelasticidade nos impactos hidrodinâmicos.

Tanizawa (1998) utiliza a formulação MEC (Método dos Elementos de Contorno) no domínio fluido em seu modelo totalmente não-linear, com equações que se baseiam na velocidade e aceleração, em problemas de impacto hidrodinâmico em superfícies elásticas.

Atualmente, vários problemas são resolvidos utilizando os Métodos de Partículas com resultados satisfatórios. Lachamp (2003) escreve o tensor de tensões das equações de Navier-Stokes em termos da formulação SPH, tratando assim escoamentos de fluidos não-newtonianos. Utilizando este desenvolvimento, Laigle et al. (2007) quantificam o efeito de obstáculos sobre o escoamento de fluidos não-newtonianos, sugerindo novos valores de majoração para projetos de defensas.

Monaghan e Kos (1999) analisam a propagação e quebra de ondas solitárias em praias com geometrias definidas. Monaghan et al. (2003), por sua vez, prevêem a energia da onda gerada pela incidência de um bloco indeformável em um canal de ondas em repouso. Esses autores não avaliam diretamente a onda gerada pelo impacto, mas sim a onda refletida pela parede no fim do canal.

Shao (2006) usa uma variante do SPH (que descarta a necessidade de uma equação de estado para a pressão) para analisar a quebra da onda e o galgamento em barragens, incluindo efeitos turbulentos em sua modelagem.

O MÉTODO SPH

O método SPH foi concebido inicialmente para resolver problemas astrofísicos no espaço tridimensional (Lucy, 1977; Gingold e Monaghan, 1977). No entanto, a simplicidade com que fenômenos complexos são modelados faz do SPH uma ferramenta de solução interessante, tendo sido estudada extensivamente e estendida para diversos problemas e áreas de atuação (Vila, 1998).

O significado da sigla SPH exprime a filosofia do método. O primeiro termo *Smoothed* representa a suavização ou medianização segundo o peso das variáveis na vizinhança da partícula, visando principalmente à estabilidade do método. O termo *Particle* refere-se à utilização de partículas para discretização do domínio físico. O terceiro termo *Hydrodynamics* representa o nicho de atuação do método. Assim, a combinação da adaptabilidade, natureza particulada e lagrangeana leva o método SPH a ser aplicado em diferentes áreas da engenharia e ciência. De certa maneira, o termo *Hydrodynamics* pode ser interpretado como mecânica de forma geral. Em algumas literaturas (Kum et al., Posch et al. *apud* Liu e Liu, 2003) esse método é chamado de *Smoothed Particle Mechanics* (SPM).

Fundamentos do método SPH

Do ponto de vista computacional, representa-se o fluido como um conjunto de partículas evoluindo com a velocidade do escoamento. Cada partícula representa um ponto de interpolação no qual todas as propriedades do fluido são conhecidas. Exprimindo, então, ϕ como um campo variável qualquer (escalar, vetorial ou tensorial), a seguinte igualdade é verificada:

$$\phi(\vec{r}) = \int \phi(\vec{r}^*) \delta(\vec{r} - \vec{r}^*) d\vec{r}^* \quad (1)$$

onde \vec{r} é o vetor posição e $\delta(\vec{r} - \vec{r}^*)$ é a função impulso ou delta de Dirac. Pode-se, admitindo certo nível de aproximação, substituir a função delta de Dirac por uma função W , que satisfaça as seguintes condições:

$$\int W(|\vec{r} - \vec{r}^*|, h) d\vec{r}^* = 1 \quad (2)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(|\vec{r} - \vec{r}^*|, h) = \delta(\vec{r} - \vec{r}^*) \quad (3)$$

Adotando as aproximações sugeridas na equação 2 e substituindo na equação 1, resulta:

$$\phi(\vec{r}) \approx \int \phi(\vec{r}^*) W(|\vec{r} - \vec{r}^*|, h) d\vec{r}^* \quad (4)$$

onde o parâmetro h é o comprimento de suavização (*smoothing length*) da função W , que é chamada de kernel ou núcleo de suavização (*smoothing kernel*). O núcleo de suavização, no SPH, tem a responsabilidade de interpolar uma grandeza qualquer entre partículas, limitada pela máxima distância $2h$, como pode ser ilustrado na Figura 1. Essa função tem o mesmo papel dos esquemas de discretização em diferenças finitas (central, *upwind*, etc.). Mais adiante, serão mostradas as principais funções utilizadas como núcleo de suavização.

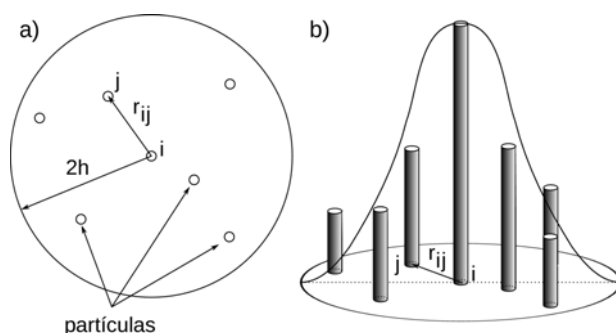


Figura 1 – a) Representação esquemática das partículas dentro do raio de interação $2h$, e b) sua respectiva parcela de contribuição.

Escrita na forma da equação 4, o campo $\phi(\vec{r})$ pode ser considerado como sendo uma regularização do campo ϕ original. Substituindo a integral da equação 4 pela somatória em todas as partículas do domínio, tem-se:

$$\langle \phi(\vec{r}) \rangle = \sum_j \phi_j \frac{m_j}{\rho_j} W(|\vec{r} - \vec{r}_j|, h) \quad (5)$$

onde m_j representa a massa da partícula j e ρ_j representa a massa específica da partícula j . O valor da função ϕ em \vec{r}_j é denotado por ϕ_j . De modo a facilitar

tar a notação, utiliza-se, $W_{ij} = W(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|, h)$ e, da mesma forma, $\phi_{ij} = \phi_i - \phi_j$ e $\bar{\phi}_{ij} = (\phi_i + \phi_j)/2$.

De acordo com a equação 5, pode-se representar qualquer campo variável em termos da formulação particulada. Sendo assim, para que as partículas simulem o comportamento do fluido desejado, basta escrever as equações de balanço (conservação da massa e quantidade de movimento), na forma Lagrangeana. Uma vez obtidas essas equações, pode-se proceder à resolução do sistema.

No entanto, algumas particularidades do método SPH ainda precisam ser melhor elucidadas, como por exemplo a interpolação via núcleo de suavização, comportamento das fronteiras rígidas do domínio (condições de contorno) e leis de estado para pressão. Esses e outros tópicos de interesse serão abordados na sequência.

Núcleo de suavização W

O núcleo de suavização W deve satisfazer às restrições impostas pelas equações 2 e 3. Existem, portanto, várias escolhas, sendo a regularização gaussiana a primeira categoria de núcleo aplicada (normalizada para uma dimensão, Gingold e Monaghan, 1977).

$$W_G\left(\frac{|\vec{r}_{ij}|}{h}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\left(\frac{|\vec{r}_{ij}|}{h}\right)^2\right), \quad (6)$$

onde o índice G em W_G representa o núcleo gaussiano. Para facilitar a notação, comumente, faz-se $s = |\vec{r}_{ij}|/h$.

Existem vantagens na adoção do núcleo gaussiano, sendo uma delas obtida pelo comportamento da função exponencial, no sentido que derivadas do núcleo podem ser escritas em função do próprio núcleo:

$$\frac{dW_G}{ds} = -2sW_G \quad (7)$$

Além disso, Morris (1996) aponta que a transformada de Fourier do núcleo gaussiano é gaussiano e que há boa estabilidade do método, como um todo, quando o núcleo gaussiano é utilizado. No entanto, a falta de suporte compacto faz com que todas as partículas do domínio influenciem umas às outras, mesmo que as contribuições sejam pequenas (para partículas afastadas).

Um outro tipo de núcleo bastante utilizado são as funções *splines*, sendo a cúbica dada por:

$$W_C(s) = \frac{\sigma}{h^v} \begin{cases} \frac{2}{3} - s^2 + \frac{s^3}{2}, & \text{se } 0 < s \leq 1 \\ \frac{(2-s)^3}{6}, & \text{se } 1 < s \leq 2 \\ 0, & \text{se } s > 2 \end{cases} \quad (8)$$

onde v a dimensão do domínio simulado e σ é escolhido para satisfazer a equação 2 (cujos valores são $2/3$, $10/(7\pi)$ e $1/\pi$ para 1D, 2D e 3D, respectivamente).

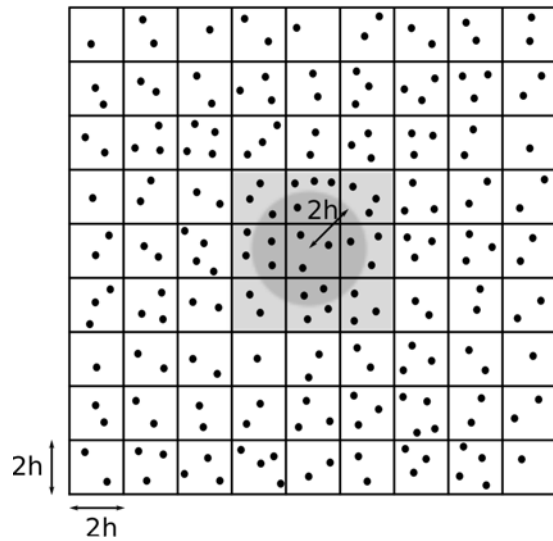


Figura 2 – Subdivisão do domínio para agilizar a busca dos vizinhos.

Como pode ser visto na equação 8, uma das maiores vantagens na utilização do núcleo regido pela *spline* cúbica é que a função é exatamente nula para $s > 2$, ou seja, para uma distância superior a $2h$. Essa propriedade é o suporte compacto, que reduz drasticamente o tempo computacional, já que a contribuição das partículas é limitada a um raio $2h$. No entanto, em algumas aplicações, pode-se notar acentuados efeitos dispersivos (Morris, 1996).

Utiliza-se, neste trabalho, o núcleo do tipo *splines*, regido pela equação 8. O ganho computacional resultante do suporte compacto do núcleo vem ao custo de estabelecer a vizinhança da partícula considerada. Como apenas partículas próximas influenciam umas às outras, é preciso tratar e identificar essas partículas. Ainda sob a ótica de otimiza-

ção computacional, não há ganho significativo em usar o núcleo regido por *splines* se é necessário varrer todas as partículas para verificar se a distância até a partícula considerada é menor que $2h$. Para contornar esse inconveniente, Morris (1996) apresenta um algoritmo de busca de vizinhos, baseado na subdivisão do domínio em células quadradas, de lado $2h$. Conhecendo-se, de antemão, quais partículas pertencem a cada célula (através de uma lista de ligação), é possível restringir a pesquisa das partículas vizinhas apenas às células adjacentes (células pintadas na Figura 2). Este foi o artifício utilizado neste trabalho.

A Figura 3 ilustra os núcleos gaussiano e *spline* cúbico.

Comprimento de suavização

Após escolhida a função que representará o núcleo de suavização W , deve-se também escolher o valor para o comprimento de suavização h , que está intimamente relacionado à resolução numérica desejada. Se o escoamento simulado não apresenta regiões com grande variação de massa específica, o comprimento h pode-se manter constante. Contudo, para simular choques ou impactos, onde há variação súbita da massa específica localmente, é preciso variar h de acordo, de tal forma que o número de partículas vizinhas se mantenha próximo de um valor constante.

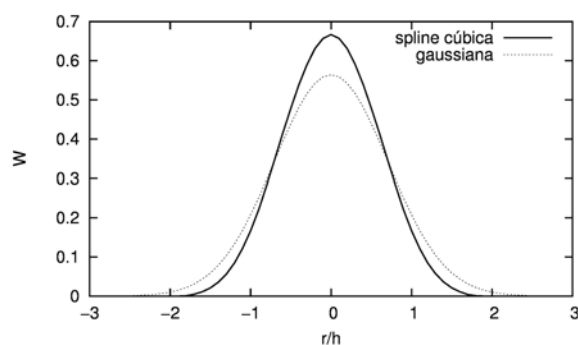


Figura 3 – Núcleo de suavização dos tipos *spline* cúbico e gaussiano.

Normalmente, toma-se h como uma proporção do espaçamento inicial das partículas (Δx). Em problemas bidimensionais, é usual estabelecer $h = 1,2\Delta x$. Será utilizado esse valor de h na maioria dos problemas simulados, a não ser que outro valor seja explicitamente informado.

Como é desejada a simulação de impacto hidrodinâmico, utiliza-se a equação a seguir (Lachamp, 2003), que relaciona a variação de h com o divergente da velocidade:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\rho} h \nabla \cdot \bar{u} \quad (9)$$

sendo d/dt a derivada total.

Equação da quantidade de movimento

Como o escopo desse trabalho restringe-se aos escoamentos de fluidos ideais, tem-se a seguinte equação para quantidade de movimento:

$$\frac{d\bar{u}_i}{dt} = - \frac{(\nabla p)_i}{\rho_i} \quad (10)$$

que nada mais é do que a equação de Euler sem a força de campo (ou massa) (campo gravitacional). Para discretizar a equação 10, deve-se representar o gradiente de um escalar na formulação SPH (eq. 5). Sendo assim, o gradiente de uma função escalar é dado pela equação (Monaghan, 1992):

$$\langle \nabla f(\vec{r}) \rangle_i = \frac{1}{\rho_i} \sum_j m_j (f_j - f_i) \nabla_i W_{ij} \quad (11)$$

Aplicando a equação 11 à equação da quantidade de movimento, resulta:

$$\frac{d\bar{u}_i}{dt} = - \sum_j m_j \left(\frac{p_i + p_j}{\rho_i \rho_j} \right) \nabla_i W_{ij} \quad (12)$$

A expressão 12 conserva a quantidade de movimento linear e angular de forma exata. Essa propriedade foi obtida a partir de uma manipulação algébrica do gradiente. Existem outras maneiras de reescrever o gradiente que conservam a quantidade de movimento, e podem ser consultadas em Morris (1996) e Lachamp (2003).

Deslocamento das partículas

As partículas são deslocadas de acordo com:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \bar{u}_i \quad (13)$$

Existem métodos que melhoram a estabilidade da equação 13. Um desses métodos é o XSPH, que adiciona o seguinte termo à equação 13:

$$\Delta \bar{u}_i = \varepsilon \sum_j m_j \frac{\bar{u}_{ij}}{\bar{\rho}_{ij}} W_{ij} \quad (14)$$

onde ε é um parâmetro que varia entre 0 e 1 (usa-se comumente $\varepsilon = 0,5$). Segundo Monaghan e Kos (1999), essa correção mantém as partículas mais ordenadas, além de prevenir penetração em casos de escoamentos de alta velocidade. Lachamp (2003) ressalta que o termo corretor sugerido (equação 14) não introduz dissipação viscosa suplementar, aumentando ligeiramente, todavia, a dispersão do sistema.

Equação da continuidade

A equação da continuidade (equação 15):

$$\frac{dp}{dt} = -\rho \nabla \cdot \bar{u} \quad (15)$$

escrita em termos de partículas, reduz-se basicamente ao tratamento do divergente da velocidade. O divergente, em termos da formulação SPH, fica:

$$\rho_i \langle \nabla \cdot \bar{u} \rangle_i = \sum_j m_j \bar{u}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (16)$$

Como já visto, pode-se obter a aproximação desejada aplicando diretamente o conceito do SPH ao divergente (equação 16), que resulta em:

$$\rho_i = \sum_j m_j W_{ij} \quad (17)$$

A equação 17 conserva exatamente a massa total, uma vez que o número de partículas e a massa de cada partícula são constantes ao longo da simulação. Mas, principalmente em problemas com superfície livre, nota-se um decaimento acentuado na massa específica nas proximidades da superfície livre, o que resulta em comportamentos indesejáveis nessa região. Para contornar esses inconvenientes, opta-se por um rearranjo na formulação do divergente (Monaghan, 1992):

$$\nabla \cdot \bar{u} = \frac{1}{\rho} (\nabla \cdot (\rho \bar{u}) - \bar{u} \cdot \nabla \rho) \quad (18)$$

Aplicando a equação 18 à equação da continuidade (equação 15), resulta:

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_j m_j \bar{u}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (19)$$

Com a equação 19, o problema de queda repentina na massa específica é contornado, pois a massa específica pode ser atribuída a cada partícula, e a variação dp/dt só ocorrerá se houver aproximação ou afastamento das partículas. Podem-se aplicar correções e/ou suavizações à massa específica de tempos em tempos na simulação, para contornar o fato da equação 19 não conservar a massa total exatamente. Por isso, neste trabalho, a cada 0,01s de tempo de simulação, faz-se uma medianização da massa específica local de cada partícula (procedimento similar ao adotado por Laigle et al., 2007).

Leis de estado para a pressão

A modelagem da pressão é um ponto delicado da técnica SPH aplicada a fluidos incompressíveis, devido à falta de controle explícito da massa específica local. Como o SPH converge bem para fluidos compressíveis, aproxima-se o caso incompressível por um fluido pseudo-compressível através de uma equação de estado para a pressão. Essa equação de estado é da forma $p = p(\rho)$ e, além de fechar o sistema de equações a ser resolvido, mantém a característica essencialmente explícita do SPH. Outras técnicas, como o MPS (e também o ISPH, ou SPH Incompressível), dispensam a utilização de uma equação de estado, pois apostam na solução implícita da equação da pressão (equação do tipo Poisson), gerando, naturalmente, um cenário de incompressibilidade.

Cabe lembrar que a aproximação para o caso incompressível está intimamente ligada à escolha da celeridade do som da simulação. Isto porque, em escoamentos com baixo número de Mach (M), as variações de massa específica são proporcionais a M^2 , sendo o número de Mach dado pela equação 20:

$$M = \frac{|\bar{u}|}{c} \quad (20)$$

onde c é a celeridade do som no fluido. Normalmente usa-se a celeridade do som igual a dez vezes o valor da maior velocidade da partícula durante toda a simulação.

Em outras palavras, restringindo-se as velocidades no fluido para que o número de Mach seja da ordem de $O(10^{-1})$, garante-se que as variações de massa específica sejam na ordem de 1% (Monaghan e Kajtar, 2009). Normalmente, a celeridade do som utilizada na simulação segue esse procedimento, isso porque a utilização do valor físico da celeridade do som implicaria em um tempo de processamento muito maior, sem, no entanto, qualquer ganho de precisão significativo.

Existem diversas propostas para a equação de estado. Uma delas é a equação utilizada neste trabalho e conhecida como equação de Tait, sendo a relação entre pressão e massa específica dada por:

$$p_i = \frac{c^2 \rho_0}{7} \left[\left(\frac{\rho_i}{\rho_0} \right)^7 - 1 \right] \quad (21)$$

sendo ρ_0 uma massa específica inicial ou de referência.

Viscosidade artificial

Observam-se, em problemas de escoamento regidos pela equação de Euler, oscilações que não correspondem à física, ocasionadas por uma difusão numérica de pequena ordem. Assim como em outros métodos, adiciona-se à equação de quantidade de movimento um termo para anular essas oscilações, correspondendo à conhecida viscosidade numérica. No SPH, vários termos de correção já foram propostos, mas aquele que é mais largamente utilizado é :

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{-\alpha \bar{c}_{ij} \mu_{ij} + \beta \mu_{ij}^2}{\bar{\rho}_{ij}}, & \text{se } \bar{\mathbf{u}}_{ij} \cdot \bar{\mathbf{r}}_{ij} < 0 \\ 0, & \text{se } \bar{\mathbf{u}}_{ij} \cdot \bar{\mathbf{r}}_{ij} \geq 0 \end{cases} \quad (22)$$

com:

$$\mu_{ij} = \frac{h \bar{\mathbf{u}}_{ij} \cdot \bar{\mathbf{r}}_{ij}}{|\bar{\mathbf{r}}_{ij}|^2 + 0,01h^2} \quad (23)$$

onde α e β são constantes. Os valores típicos de α e β em simulações com escoamentos é 0,01 e 0, respectivamente (Monaghan e Kos, 1999).

Introduzindo o termo Π_{ij} (equação 22) na equação de quantidade de movimento (equação 12), resulta:

$$\frac{d\bar{\mathbf{u}}_i}{dt} = - \sum_j m_j \left(\frac{p_i + p_j}{\rho_i \rho_j} + \Pi_{ij} \right) \nabla_i \mathbf{W}_{ij} \quad (24)$$

Pode-se perceber, pela equação 24, o motivo da denominação de pressão viscosa ou pressão artificial para o termo Π_{ij} .

Condições de contorno

Originalmente, o SPH foi concebido para tratar de problemas no domínio astrofísico, portanto em problemas cuja condição de fronteira é dita fronteira aberta. No SPH, ou em qualquer método Lagrangeano sem malha, não há necessidade de estabelecer certas condições de contorno. Por exemplo, não é necessário estabelecer a condição dinâmica ou cinemática na superfície livre. Essas condições estão, de certa forma, incorporadas à formulação do método (Oger et al., 2007).

Entretanto, na grande maioria dos problemas em Engenharia, lida-se com condições de contorno mais restritivas (impermeabilidade de paredes, condição de aderência, etc). Tais condições de contorno não são satisfeitas automaticamente pelas equações do método. Dessa forma, o tratamento das fronteiras recebe atenção especial e seguem basicamente duas vertentes: a adoção das partículas fantasma (*ghost particles*) ou fronteiras reativas (*boundary forces*).

No caso das partículas fantasma, quando uma partícula aproxima-se da fronteira, há o espelhamento da partícula, criando uma partícula fictícia com a mesma distância normal à parede. Essa partícula fictícia, ou partícula fantasma, possui as mesmas características da partícula real, entretanto o sentido de grandezas tensoriais como a velocidade (tensor de ordem 1) acompanham a condição de contorno da fronteira (mesmo sentido para o caso deslizamento livre e sentidos invertidos para o caso de não deslizamento). Esse artifício aumenta o número de vizinhos da partícula próxima à parede, evitando que a partícula passe através da fronteira (Figura 4).

O caso das fronteiras reativas será tratado com detalhes na sequência, já que foi o artifício usado para tratamento das fronteiras neste trabalho.

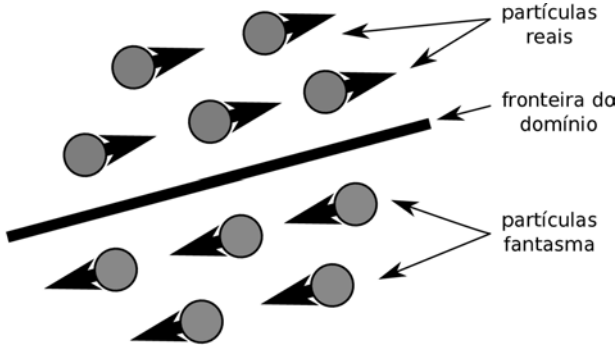


Figura 4 – Representação de uma fronteira no domínio com partículas fantasma (adaptado de Laigle et al., 2007, para uma condição de não-deslizamento).

Fronteiras reativas

No caso de fronteiras reativas, utiliza-se o conceito de atração e repulsão molecular (Monaghan e Kos, 1999). Dessa forma, a fronteira é representada por uma linha de partículas reais que exercem uma força normal a qualquer partícula que entrar em seu raio de vizinhança (Figura 5).

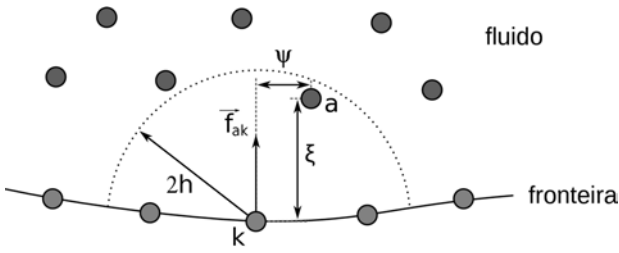


Figura 5 – Representação de uma fronteira no domínio com fronteiras reativas.

Embora ainda não se saiba a força ótima exercida pela fronteira, algumas aproximações dão bons resultados. Monaghan e Kos (1999), por exemplo, descrevem a força exercida pela parede (\vec{f}_p) como sendo:

$$\vec{f}_p = R(\psi)P(\xi)\vec{n} \quad (25)$$

onde $R(\psi)$ é dado por:

$$R(\psi) = \begin{cases} B \frac{1}{\sqrt{\psi/2\Delta p_f}} \left(1 - \frac{\psi}{2\Delta p_f}\right), & \text{se } \psi < 1 \\ 0, & \text{se } \psi \geq 1 \end{cases} \quad (26)$$

ψ é a distância tangencial à fronteira, ξ é a distância normal à fronteira, Δp_f é o espaçamento entre as partículas da fronteira e B é dado pela equação 27:

$$B = \frac{1}{h} (0,01c^2 + c\beta_0 \vec{u}_{ij} \cdot \vec{n}_j) \quad (27)$$

onde β_0 vale 1 se as partículas estão se aproximando, e caso contrário, vale zero, e \vec{n}_j é o vetor normal à fronteira na coordenada da partícula j .

Já a contribuição $P(\xi)$ é expressa pela equação 28:

$$P(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi\xi}{\Delta p_f}\right)\right), & \text{se } \xi < \Delta p_f \\ 0, & \text{se } \xi \geq \Delta p_f \end{cases} \quad (28)$$

Seguindo a mesma idéia, ou seja, a construção de um modelo da força exercida pela fronteira baseado na equação 25, Monaghan et al. (2003) utilizaram as seguintes equações para $R(\psi)$ e $P(\xi)$:

$$R(\psi) = \begin{cases} 1 - \frac{\psi}{\Delta p_f}, & \text{se } 0 < \psi < \Delta p_f \\ 0, & \text{se } \psi \geq \Delta p_f \end{cases} \quad (29)$$

e

$$P(\xi) = \begin{cases} \frac{2}{3}\beta_1, & \text{se } 0 < \xi/h < 2/3 \\ \beta_1 \left(2\frac{\xi}{h} - \frac{3}{2}\left(\frac{\xi}{h}\right)^2\right), & \text{se } 2/3 < \xi/h < 1 \\ \frac{1}{2}\beta_1 \left(2 - \frac{\xi}{h}\right)^2, & \text{se } 1 < \xi/h < 2 \\ 0, & \text{se } \xi/h \geq 2 \end{cases} \quad (30)$$

onde $\beta_1 = 0,02c^2/\xi$. Uma nota importante é o tratamento do escoamento nos cantos da fronteira. Monaghan et al. (2003) modificam o vetor normal se a partícula fluida está na região entre as normais das paredes que compõe o canto. O vetor normal, nesse caso, será dado pelo vetor unitário que liga o canto à partícula fluida. Desse modo, o escoamento nos cantos se dá de forma suave.

Preferiu-se, neste trabalho, as equações apontadas por Monaghan et al. (2003), principalmente por que existem certas evidências de que uma função integrável é preferível em detrimento a uma função não-integrável.

Modelagem de um corpo rígido

Com uma formulação para parede reativa, Monaghan et al. (2003) estenderam seus resultados para modelar a dinâmica de um corpo rígido e sua interação com o fluido em termos da formulação SPH. Os autores consideram, portanto, o corpo rígido composto por partículas de fronteira, funcionando exatamente como uma fronteira reativa. A principal diferença é que o corpo rígido obedece a equações adicionais, que são da dinâmica do centro de massa e de rotação em torno do centro de massa. A equação da dinâmica do corpo de centro \vec{C} e massa M :

$$M \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} \quad (31)$$

onde \vec{V} é a velocidade do centro de massa e \vec{F} é a força total atuante. Já para a rotação em torno do centro de massa, tem-se:

$$I \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \vec{\tau} \quad (32)$$

onde I é o momento de inércia em relação ao eixo perpendicular ao plano do movimento, $\vec{\Omega}$ é a velocidade angular e $\vec{\tau}$ é o torque total atuando no corpo.

Escrevem-se, então, as equações 31 e 32 em termos da partícula de fronteira k , na formulação SPH. Esse desenvolvimento gera um termo adicional a ser inserido na equação de conservação da quantidade de movimento, referente à influência da fronteira no escoamento, como segue:

$$\frac{d\vec{u}_i}{dt} = -\sum_j m_j \left(\frac{p_i + p_j}{\rho_i \rho_j} + \Pi_{ij} \right) \nabla_i W_{ij} + \sum_k \vec{f}_{ak} + \vec{g} \quad (33)$$

onde o índice "a" representa as partículas fluidas vizinhas à partícula de fronteira k e a força \vec{f}_{ak} é dada por:

$$\vec{f}_{ak} = \frac{m_k}{m_k + m_a} \vec{f}_p(\psi, \xi) \quad (34)$$

Uma vez determinadas as forças e, consequentemente, as velocidades \vec{V} e $\vec{\Omega}$, faz-se a mudança de posição das partículas do corpo rígido da forma:

$$\frac{d\vec{r}_k}{dt} = \vec{V} + \vec{\Omega} \times (\vec{r}_k - \vec{C}) \quad (35)$$

Passo de tempo

Como se trata de um método puramente explícito, cuidados devem ser tomados na escolha do passo de tempo Δt para garantir a boa convergência do SPH. Como em outros métodos explícitos, recorre-se à restrição CFL, que impõe limites às velocidades das partículas. Neste trabalho utiliza-se a seguinte formulação:

$$\Delta t = \min(\Delta t_{va}, \Delta t_p, \Delta t_f) \quad (36)$$

com:

$$\Delta t_{va} = \min_i \text{CFL} \frac{h_i}{c + 0,6(\alpha c + \beta \mu_{ij})} \quad (37)$$

$$\Delta t_p = \min_i \frac{\zeta}{0,10c} \quad (38)$$

$$\Delta t_f = \min_i \text{CFL} \sqrt{\frac{h_i}{|\vec{f}_i|}} \quad (39)$$

onde \vec{f}_i representa a força por unidade de massa atuante na partícula i , e CFL varia no intervalo fechado $[0; 1]$.

Evolução temporal

Considerando, inicialmente, que o sistema de equações do SPH pode ser escrito na forma:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{U}_i \quad (40)$$

$$\frac{d\vec{u}_i}{dt} = \vec{\mathfrak{S}}_i \quad (41)$$

$$\frac{dp_i}{dt} = \mathfrak{R}_i \quad (42)$$

onde \vec{U} , $\vec{\mathfrak{S}}$, e \mathfrak{R} são os segundos-membros das equações 13, 33 e 19, respectivamente.

Para solucionar esse sistema de equações explícitas, pode ser aplicado qualquer método de integração de equações diferenciais de primeira ordem, como o *Leap-Frog* ou Preditor-Corretor (Smith, 1984), desde que a máxima ordem do erro do método seja $O(\Delta h^2)$, onde Δh é o incremento do método. A limitação com relação à ordem do erro se dá, principalmente, pelo erro intrínseco do SPH. Sabe-se, por expansão em série de Taylor, que o SPH possui um erro da ordem de $O(h^2)$, portanto não há razão para utilizar métodos de integração de ordem superior a $O(\Delta h^2)$.

Utiliza-se, nesse trabalho, o método Preditor-Corretor (ou Euler Melhorado; Smith, 1984), cujos passos podem ser sumarizados como:

- Calcular $\vec{U}_i, \vec{\mathfrak{S}}_i$ e \mathfrak{R}_i para todas as partículas, no instante atual (t);
- Calcular $\vec{U}_i, \vec{\mathfrak{S}}_i$ e \mathfrak{R}_i para todas as partículas, no instante intermediário ($t + \Delta t/2$);
- Os valores em $t + \Delta t$ serão dados pela equação do método:

$$\frac{d\vec{r}_i^{t+\Delta t}}{dt} = \frac{d\vec{r}_i^t}{dt} + \frac{1}{4}\Delta t(\vec{U}_i^t + \vec{U}_i^{t+\Delta t/2}) \quad (43)$$

$$\frac{d\vec{u}_i^{t+\Delta t}}{dt} = \frac{d\vec{u}_i^t}{dt} + \frac{1}{4}\Delta t(\vec{\mathfrak{S}}_i^t + \vec{\mathfrak{S}}_i^{t+\Delta t/2}) \quad (44)$$

$$\frac{dp_i^{t+\Delta t}}{dt} = \frac{dp_i^t}{dt} + \frac{1}{4}\Delta t(\mathfrak{R}_i^t + \mathfrak{R}_i^{t+\Delta t/2}) \quad (45)$$

onde o passo do método Δh foi fixado como $\Delta t/2$.

Síntese

Durante a maior parte das seções anteriores, os principais aspectos do método SPH foram elucidados. Desse modo, faz-se um resumo ilustrativo dos passos necessários para a resolução de um problema regido pelas equações apresentadas:

- Definir as condições iniciais do problema (posição das partículas, velocidade, massa específica, celeridade do som da simulação, etc.);
- Calcular:
 - O passo de tempo Δt (equação 36);
 - A pressão de todas as partículas fluidas (equação 21);
 - A vizinhança de cada partícula fluida (raio $2h$);
 - As forças por unidade de massa para todas as partículas (segundo membro da equação 33);
 - As variações de massa específica das partículas fluidas (segundo membro da equação 19);
 - As variações do comprimento de suavização das partículas fluidas (segundo membro da equação 9);
 - A translação das partículas fluidas (segundo termo da equação 13 e correção para superfície livre dada pela equação 14) e sólidas (segundo membro da equação 35);
 - A solução do sistema de equações por meio de um método de integração numérica;
 - As novas grandezas são atualizadas (posição das partículas, velocidade, comprimento de suavização, etc.);
- Repetir até que um determinado tempo de simulação desejado seja atingido.

TESTES DE VALIDAÇÃO

De modo a validar o código próprio ora apresentado, apresentam-se testes clássicos da literatura para escoamentos ideais em superfície livre. Nessa etapa, serão avaliados problemas clássicos na Engenharia, como os casos de ruptura de barragens (*dam break*) e a geração de ondas por meio de bateador (*wavemaker*). Além disso, serão também avaliados alguns casos de impacto hidrodinâmico, retratados pela queda de um bloco indeformável em um canal de águas tranquilas. Especial atenção será dada à transferência de energia entre sólido e fluido, através da medição da altura da onda gerada.

Os resultados obtidos numericamente serão confrontados com teóricos ou experimentais, quando disponíveis.

Ruptura de barragens

Problemas de ruptura de barragem têm grande interesse do ponto de vista de Engenharia, mas por ser do ponto de vista matemático um problema altamente não-linear, soluções analíticas muitas vezes não podem ser obtidas. Então, ensaios experimentais são realizados, como aqueles feitos por Martin e Moyce (1952). Esses autores utilizaram um reservatório de dimensão $5,72 \times 5,72 \times 12,7$ cm³, onde a altura e a largura do fluido retido foram alteradas, para que diversas relações geométricas pudessem ser obtidas. A Figura 6 mostra um croqui esquemático com as dimensões do reservatório usado pelos autores.

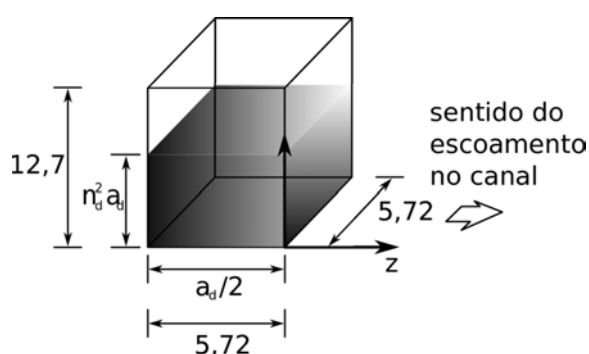


Figura 6 – Dimensões e principais variáveis do reservatório usado para ensaios do tipo ruptura de barragem (unidades em cm).

Adota-se a mesma adimensionalização usada pelos autores para retratar a evolução do fluido no canal:

- $Z = z/a_d$ é o numero adimensional para o alcance da frente, onde a_d é o dobro da base do fluido retido (uma vez que o ensaio aproveita a simetria do problema) e z é o alcance da frente, medido a partir do eixo de simetria, no instante inicial;
- $T = n_d t (g/a_d)^{1/2}$ é o tempo adimensional, sendo g a intensidade da força gravitacional, $n_d^2 a_d$ é a altura do fluido retido e t o tempo de ensaio.

Para o caso $n_d^2 = 1$ e $a_d = 5,72$ cm, tem-se a respectiva simulação SPH, contando com 1488 partículas para representação do fluido e fronteiras do problema. A Figura 7a mostra a comparação dos resultados obtidos com os resultados experimentais de Martin e Moyce (1952). Já na Figura 7b, faz-se a

mesma comparação, mas com $a_d = 11,43$ cm e contando com uma simulação com 1584 partículas.

Para o caso $n_d^2 = 2$, foram também ensaiadas duas composições geométricas: $a_d = 5,72$ cm e $a_d = 2,86$ cm. Os resultados, com a respectiva simulação numérica, são mostrados nas Figuras 8a e 8b.

Nas Figuras 7 e 8, os resultados numéricos foram normalizados, seguindo o mesmo procedimento adotado por Martin e Moyce (1952). Os autores justificaram a utilização da normalização dos dados mediante a incapacidade do aparato experimental na determinação precisa do tempo inicial do ensaio. Em termos práticos, esse procedimento apenas translada a envoltória obtida para o alcance da frente, ajustando o tempo inicial.

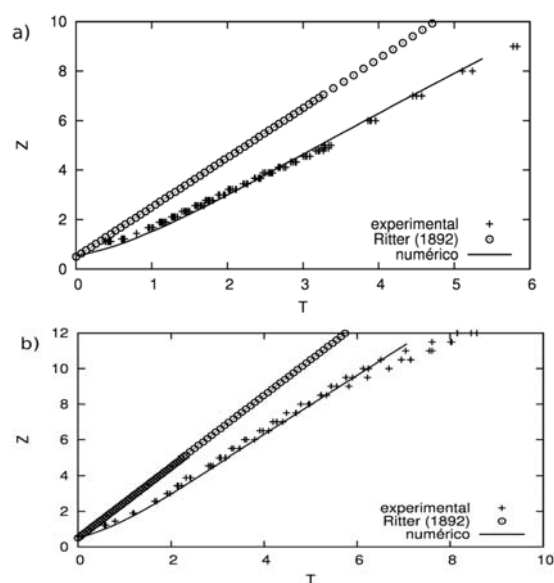


Figura 7 – Avanço da frente: comparação entre resultados teórico (Ritter, 1892), numérico e experimental, com a) $n_d^2 = 1$ e $a_d = 5,72$ cm e b) $n_d^2 = 1$ e $a_d = 11,43$ cm.

É possível notar, em algumas figuras, uma mudança de declividade na tendência dos resultados experimentais. Esse fato pode ser explicado pela influência dos aspectos viscosos do escoamento, uma vez que as dimensões características do ensaio e notadamente da frente da ruptura são relativamente pequenas. No entanto, a análise de fluido ideal restringe-se à etapa inercial da ruptura, evidenciada nos primeiros momentos do fenômeno. Nesta região, principalmente nos casos em que a frente de ruptura possui maior altura relativa (Figuras 7a e 7b), há concordância entre resultados experimentais e numéricos. Essas verificações comprovam a

validade do modelo para ruptura de barragem em fluido ideal.

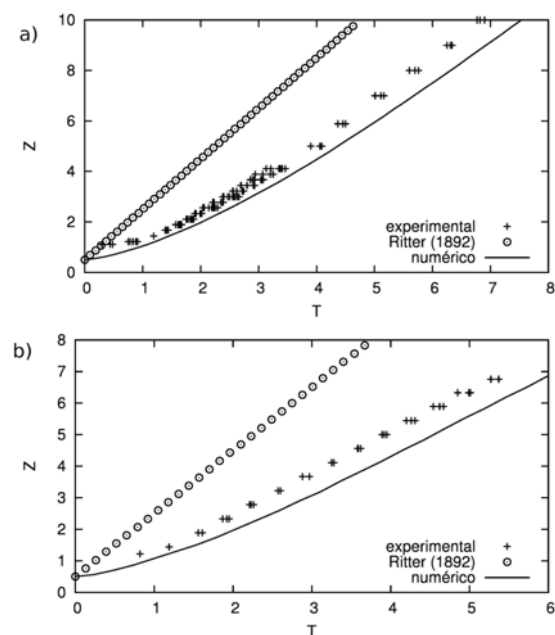


Figura 8 – Avanço da frente: comparação entre resultados teórico (Ritter, 1892), numérico e experimental, com a) $n_d^2 = 2$ e $a_d = 5,72$ cm (simulação com 2808 partículas) e b) $n_d^2 = 2$ e $a_d = 2,86$ cm (simulação com 1404 partículas).

Geração de ondas

Nessa simulação, pretende-se verificar a formulação da fronteira, a partir da geração de ondas em canal. As ondas são formadas pelo movimento oscilatório de um gerador (tipo pistão), localizado em uma extremidade do canal. Na outra extremidade, opta-se pela presença de uma praia, com declividade de 30° , sendo responsável pela diminuição dos efeitos da onda refletida. De plano, podem-se observar os elementos da simulação através da Figura 9.

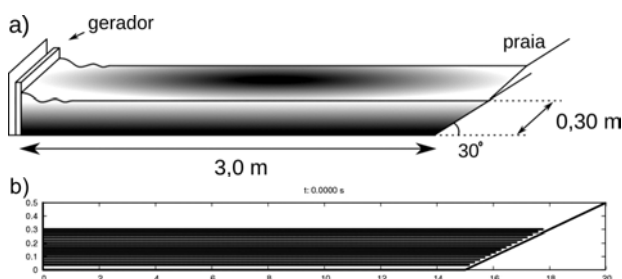


Figura 9 – a) Croqui do aparato e b) partículas distribuídas para simulação

A comparação teórico-numérica parte da equação de dispersão das ondas, que relaciona a frequência do gerador com o comprimento de onda:

$$w_g^2 = gk_0 \tanh(k_0 h_0) \quad (46)$$

onde w_g é a frequência do gerador de ondas, k_0 é o número de onda (relacionado diretamente com o comprimento de onda L , sendo $L = 2\pi/k_0$) e h_0 é a profundidade normal.

Foram simuladas cinco frequências diferentes do gerador, e o comprimento de onda numérico foi medido a partir das imagens geradas na etapa de pós-processamento. Os demais dados relevantes foram: $h_0 = 0,15$ m, $\alpha = 0,01$, $\beta = 0$, $c = 10$ m/s e número de partículas $N = 5865$.

A Figura 10 mostra a comparação entre os resultados obtidos.

Justificam-se os erros na comparação teórico-numérica tendo como base a profundidade relativa (h_0/L) e declividade (H/L) das ondas geradas. O valor de h_0/L está próximo do limite entre águas intermediárias e águas rasas. Sabe-se que a teoria de pequena amplitude, base para obtenção da equação 46, representa bem as ondas em regime de águas profundas, não repetindo o mesmo grau de sucesso para ondas em regime de águas rasas.

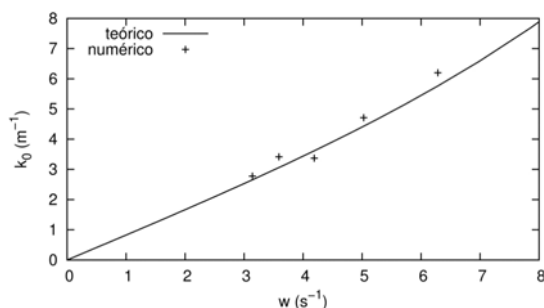


Figura 10 – Comparação teórico-numérica para a onda gerada pelo batedor

Além disso, os valores de declividade figuram entre 1,5 e 8%, considerados altos para comparação com a teoria linear. Todavia, a configuração necessária para simular um caso perto do ideal seria desvantajosa do ponto de vista numérico, pois demandaria uma quantidade maior de partículas (aumento considerável da lâmina normal). Normalmente, considerando apenas um núcleo (processamento não paralelizado), limita-se a simulação em 20000 partículas.

Ainda dentro das simulações de geração de ondas em canais, de acordo com o equacionamento apresentado em Dean e Dalrymple (1991), a relação entre altura de onda e deslocamento do gerador (H/S), para o tipo pistão, é:

$$\frac{H}{S} = \frac{2(\cosh(2k_p h_0) - 1)}{\sinh(2k_p h_0) + 2k_p h_0} \quad (47)$$

onde k_p é o número de onda e h_0 é a profundidade normal.

De modo a verificar a precisão do SPH, é realizada uma nova simulação, em outra configuração, com: $h_0 = 0,3\text{m}$, $\alpha = 0,01$, $\beta = 0$, $c = 10\text{m/s}$ e número de partículas $N = 15814$.

A Figura 11 mostra o resultado da comparação teórico-numérica. Vale observar que o número de onda da simulação foi obtido através de imagens (medição direta da distância entre duas cristas sucessivas).

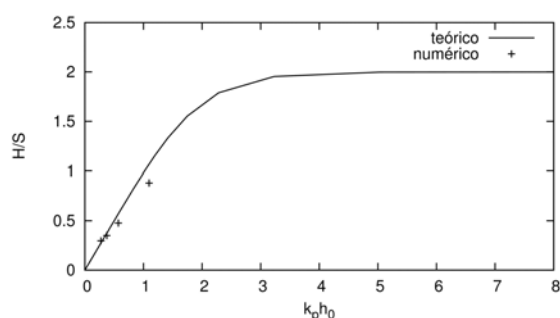


Figura 11 – Comparação teórico-numérica para a onda gerada pelo batedor

Para o ponto próximo a $(H/S; k_0 h_0) = (1; 1)$ na Figura 11, mudou-se a profundidade normal para 1,5m e diminuindo a resolução, mantendo o número de partículas e demais parâmetros praticamente iguais. Nota-se que a penalização na resolução influencia diretamente a acurácia dos resultados numéricos, e que devido a essa limitação, não foi possível a obtenção de mais pontos em outras regiões do gráfico.

No entanto, para a região em que a resolução é adequada, os resultados são próximos da proposição teórica (Dean e Dalrymple, 1991) e dentro da margem de erro esperada em projetos de Engenharia.

Impacto hidrodinâmico

Problemas de impacto hidrodinâmico aparecem com frequência em vários cenários na Engenharia, como, por exemplo, no impacto da estrutura do casco de embarcações na superfície da água ou o desmoronamento de massa sólidas em lagos. Aproveitando as características lagrangeanas da formulação SPH, será quantificada, nesta seção, a onda gerada pelo impacto de uma massa sólida indeformável em um canal de ondas. Nessa simulação, foi possível verificar a formulação adotada para sólidos com deslocamentos livres.

A validação foi efetuada comparando os resultados numéricos, oriundos do código, com os resultados experimentais e numéricos obtidos por Monaghan et al. (2003). Estes autores estudaram a influência do impacto de um bloco indeformável por meio da medição da altura da onda refletida pela parede do fim do canal. O aparato experimental contou com um canal de ondas de 40 cm de largura, 40 cm de altura e 7 m de comprimento. O bloco indeformável utilizado pelos autores possui uma forma de paralelepípedo com 38,5 cm de largura por 10,7 cm de altura por 30 cm de comprimento, e uma massa de 37,7 kg.

Monaghan et al. (2003) tentaram estabelecer uma relação entre as características físicas e geométricas do bloco incidente com a altura da onda refletida, considerando válida a suposição de que a onda refletida se comporta como uma onda solitária de Kortweg-de Vries, cuja sobrelevação (η) é dada por:

$$\eta = \frac{A}{\cosh^2\left(\frac{x}{\sqrt{4h_0^3/3A}}\right)} \quad (48)$$

Nascimento (2001), em campanha realizada no Laboratório de Hidráulica da FEIS/Unesp, também realizou ensaios de impacto hidrodinâmico para verificar a influência de parâmetros geométricos de um bloco indeformável na energia da onda. No entanto, Nascimento (2001) restringiu-se a perfis de onda solitária, adotando a aproximação do Sistema Serre.

Monaghan et al. (2003), diferentemente da aproximação adotada neste trabalho, incluíram pequenos ajustes na vizinhança das partículas no impacto para coincidir a dinâmica do bloco numérico com o experimental. Além disso, no aparato experimental utilizado por Monaghan et al. (2003), o

bloco indeformável viaja em rampa de baixa declividade (10°), não passa por mudança de declividade (permanece sobre a rampa, em posição de equilíbrio), sendo a onda formada quase que unicamente devida ao mecanismo de transferência de energia. Fatores como mudança da topografia de fundo podem ser eliminados, simplificando a análise, principalmente do ponto de vista numérico.

A Figura 12 mostra uma sequência de imagens obtida da simulação numérica. Pode-se perceber a formação do *splash* e a dificuldade na simulação de tais problemas. Já a Figura 13 mostra a relação entre o número de Froude no impacto (Fr_{imp}) do bloco e a respectiva onda gerada adimensionalizada, para cinco velocidades de impacto (V_{imp}) diferentes. Cabe ressaltar que a velocidade de impacto utilizada nesse trabalho é a velocidade do bloco indeformável quando seu centro de gravidade intercepta o plano formado pela superfície livre em repouso.

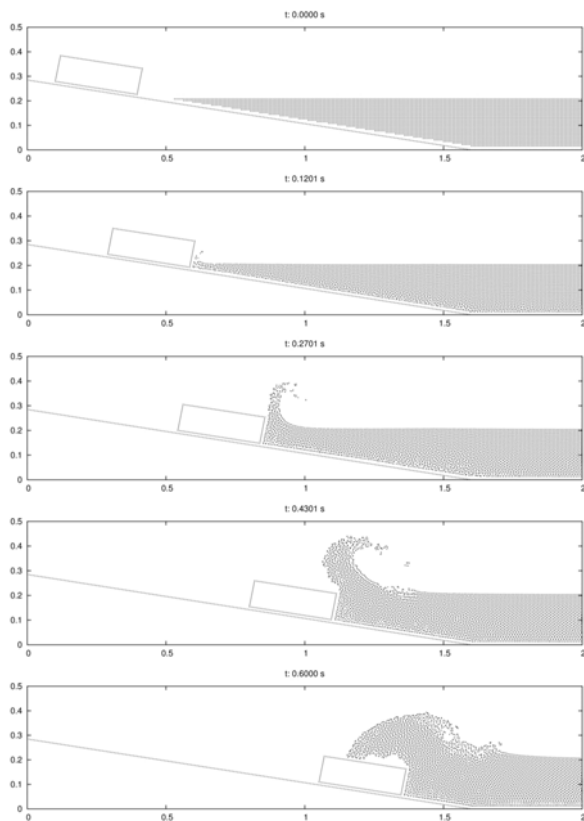


Figura 12 – Impacto hidrodinâmico, cujas características são as mesmas de Monaghan et al. (2003)

Pode-se perceber, pela Figura 13 que a alteração da vizinhança no impacto não melhora a acurácia da solução, elucidado pelos resultados numéricos obtidos nesse trabalho.

rácia da solução, elucidado pelos resultados numéricos obtidos nesse trabalho.

DISCUSSÃO E CONCLUSÕES

Propôs-se, nesta comunicação científica, fornecer os aspectos básicos dos métodos lagrangeanos, com ênfase ao SPH. Uma breve, porém fundamentada, análise foi empreendida, ilustrando os principais pontos delicados dessa técnica, tão usada pela comunidade científica internacional e pouco explorada no cenário brasileiro.

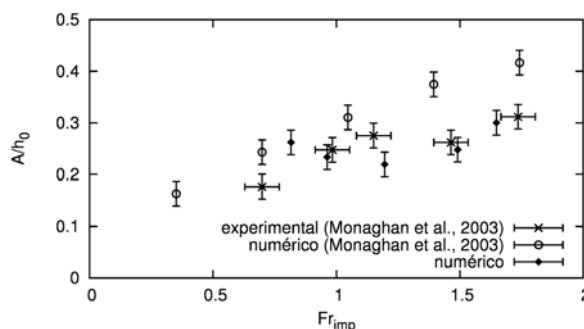


Figura 13 – Comparação teórico, numérico e experimental para a onda gerada pelo impacto hidrodinâmico

O equacionamento do método também é apresentado, fornecendo inclusive ferramentas para tratar problemas com sólidos indeformáveis, como é o caso de problemas de impacto hidrodinâmico.

De modo a validar o equacionamento proposto, problemas clássicos da Engenharia são tratados, como a ruptura de barragens e a geração de ondas através de um batedor de ondas. O impacto hidrodinâmico também é analisado, através de uma comparação com resultados experimentais e numéricos de Monaghan et al. (2003).

De plano, em consonância com os resultados ora apresentados, pode-se apontar o SPH como uma técnica promissora e que deve ser melhor investigada, principalmente no que tange à solução de problemas não-lineares e/ou descontínuos, ou que apresentam uma deformabilidade excessiva do domínio de simulação.

AGRADECIMENTOS

À FAPESP - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, pela bolsa de doutorado (em andamento) do primeiro autor.

REFERÊNCIAS

- BEREZNITSKI A., "Local hydroelastic response of ship structures under impact loads from water". Tese de Doutorado, Delft University of Technology, São Petersburgo, Rússia, 2003.
- CHENG L. Y. e ARAI M., "A numerical treatment of the boundary condition for stable assessment of hydrodynamic impact pressure". In Proceedings of OMA2002: 21st International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, Oslo, Noruega, 2002.
- DEAN R. G. e DALRYMPLE R. A., "Water wave mechanics for engineers and scientists". World Scientific Publishing, Singapore, 1991.
- GINGOLD R. A. e MONAGHAN J. J., "Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars". Royal Astronomic Society, 181:375–389, 1977.
- KLEEFMAN K. M. T., FEKKEN G., VELDMAN A. E. P., IWANOWSKI B. e BUCHNER B., "A volume-of-fluid based simulation method for wave impact problems". Journal of Computational Physics, 206:363–393, 2005.
- LACHAMP P., "Modélisation numérique de l'effet d'un obstacle sur les écoulements de fluides à seuil par la méthode SPH". Tese de Doutorado, Université Joseph Fourier, Grenoble, França, 2003.
- LAIGLE D., LACHAMP P. e NAIM M., "SPH-based numerical investigation of mudflow and other complex fluid flow interactions with structures". Computational Geosciences, Maio 2007.
- LIU G. R. e LIU M. B., "Smoothed Particle Hydrodynamics: a meshfree particle method". World Scientific, 2003.
- LUCY L. B., "A numerical approach to the testing of the fission hypothesis". The Astronomical Journal, 82:1013–1024, 1977.
- MACIEL G. F., "Contribution expérimentale et théorique à l'étude des ondes produites par des glissements solides dans des retenues de barrages". Tese de Doutorado, Université Joseph Fourier, Grenoble, França, 1991.
- MARTIN J. C. e MOYCE W. J., "Part IV. an experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane". Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 244(882):312–324, Março 1952.
- MITRA S. e SINHAMAHAPATRA K. P., "Coupled slosh dynamics of liquid filled containers using pressure based finite element method". In Exploring Innovation in Education and Research, Tainan, Taiwan, 2005.
- MONAGHAN J. J., "Smoothed particle hydrodynamics". Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 30:543–574, 1992.
- MONAGHAN J. J. e KOS. A., "Solitary waves on a cretan beach". Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, 125(3):145-154, Maio/Junho 1999.
- MONAGHAN J. J., KOS A. e ISSA N., "Fluid motion generated by impact". Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, 129(6):250–259, Nov/Dez 2003.
- MONAGHAN J. J. e KAJTAR J. B., "SPH particle boundary forces for arbitrary boundaries". Journal of Computer Physics Communications, 180:1811-1820, 2009.
- MORRIS J. P., "Analysis of Smoothed Particle Hydrodynamics with Applications". Tese de Doutorado, Monash University, Julho 1996.
- NASCIMENTO M. F., "Aproximação das equações da "classe Boussinesq" no processo de geração de onda na interface sólido-líquido: uma abordagem numérico-experimental com compromisso de Engenharia". Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - FEIS/Unesp, Ilha Solteira, 2001.
- OGER G. et al., "An improved SPH method: Towards higher order convergence". Journal of Computational Physics, 225:1472–1492, 2007.
- RITTER A., "The Propagation of Water Waves", Ver Deutsch Ingenieure Zeitschr, Berlin, 36, part 2, no 33, 947-954, 1892.
- SHAO S., "Incompressible SPH simulation of wave breaking and overtopping with turbulence modeling". International Journal for Numerical Methods in Fluids, 50:597–621, 2006.
- SMITH G. D., "Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods", Clarendon Press, Oxford, 1984.
- SOUZA A. L. O., "Métodos analíticos, numéricos e experimentais para o cálculo de ondas de impacto em meios líquidos". Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - FEIS/Unesp, Ilha Solteira, 2007.
- VILA J. P., "Méthodes particulières régularisées - développements récents et nouvelles applications". In Proceedings ESAIM – 29^{ème} Congres D'Analyse Numérique, volume 3, pages 131–146, 1998.

A brief introduction to Lagrangean Techniques: an Application of SPH to Engineering Problems

ABSTRACT

Lagrangean numerical methods are consolidated from the point of view of the international scientific community, due to the refinements made over the three decades since they were created. However, with regard to their application by the Brazilian scientific community, an incipient development can be seen, despite the advantages presented by those new techniques. Therefore, the aim of this paper is, first, to introduce basic concepts and equations on the numerical Lagrangean techniques, emphasizing the SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) method. Next, the SPH is applied to some classical engineering problems, dealing exclusively with ideal fluid flow. Among these, the problems of the hydrodynamic impact of a rigid body in a channel are highlighted.

Key-words: *Lagrangean techniques, numerical methods, SPH, hydrodynamic impact.*