

## Aplicação de Programa de Cálculo de Propagação de Onda nas Praias de Itanhaém, SP

Guilherme da Costa Silva e Paolo Alfredini

Depto. de Eng. Hidráulica e Sanitária - Escola Politécnica/USP - Av. Prof. Lúcio Martins Rodrigues, 120 - Cidade Universitária 05508-900 São Paulo, SP - guilherme.silva@poli.usp.br e alfredin@usp.br

Recebido: 05/05/00 - revisão: 08/01/01 - aceito: 23/07/01

### RESUMO

Com o objetivo de obter uma ferramenta numérica útil para estudos de engenharia costeira desenvolvido pelo Laboratório de Hidráulica da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, procedeu-se ao aprimoramento de um programa de cálculo de refração de onda monocromática proposto há alguns anos pelo Vice-Almirante Dr. Alberto dos Santos (Franco, 1984), baseado no método apresentado por Albernethy e Gilbert (1975). Acrescentou-se ao programa original mais informações a respeito das deformações de ondas, como a inclusão da Teoria de Onda Solitária nos processos de cálculo de celeridade e o cálculo da arrebentação da onda.

Como resultado final é possível visualizar a linha de arrebentação para cada onda e os correspondentes parâmetros característicos de altura e rumo de propagação. Além disso, foram introduzidas às saídas as frentes de onda. Quando associadas às ortogonais, constituem um excelente instrumento de trabalho para confrontar os traçados das frentes teóricas com os reais como, por exemplo, de fotografias aéreas.

Outro aprimoramento realizado no programa original foi introduzir a associação das alturas das ondas, que variam devido ao empolamento e refração, nos cálculos de irradiação para o largo de ondas medidas numa dada localidade com profundidades de águas intermediárias. Esta associação da altura com o rumo de propagação permite o aproveitamento de dados de agitação de uma região para utilização noutra suficientemente próxima.

O desenvolvimento conseguido foi aplicado a um estudo de caso de descrição do clima ondulatório da região costeira de Itanhaém (SP), visando a aplicação ao projeto de obra de melhoria da navegação na Barra do Rio Itanhaém.

**Palavras-chave:** onda; propagação; costeira.

### INTRODUÇÃO

As ondas constituem o principal agente modelador da costa pelo transporte de sedimentos que promovem, bem como produzem muitas das forças às quais as estruturas marítimas ou lacustres estão submetidas. Ao se propagarem em direção à costa, margens ou obstáculos sofrem deformações devido à redução de profundidade.

A estimativa do cálculo de transporte de sedimentos produzido ao longo da costa pelas ondas na arrebentação nos fornece importante parcela da caracterização do balanço sedimentar de um trecho da praia. A estimativa deste balanço é um instrumento de avaliação morfodinâmica da costa que permite, de forma objetiva, planejar intervenções estruturais ou medidas não estruturais que interfiram sobre a morfodinâmica costeira. Para isto é essencial determinar as características das ondas na arrebentação.

Na concepção e no projeto das obras marítimas as deformações das ondas são frequentemente estudadas com a finalidade de se avaliar as condições de tranquilização de uma baía portuária ou determinar as características de ondas de projeto, de modo a prever os esforços ou a estabilidade das obras de acostagem. A importância no estudo decorre principalmente de que os fenômenos de deformação das ondas, como o da refração devida à variação de profundidade, determinam a altura das ondas e o grau de agitação nas bacias portuárias. Estes parâmetros influenciam substancialmente o projeto e os esforços nas obras acostáveis.

Portanto, os efeitos dos processos físicos envolvidos com as ondas de superfície são de grande importância para projetos de obras marítimas e lacustres, como arranjos gerais de obras portuárias constituídas por quebra-mares e/ou espigões, condições de navegação em canais, defesa dos litorais e de margens, emissários submarinos,

plataformas *offshore*, etc., bem como para engenharia naval. O conhecimento das deformações produzidas pela batimetria sobre a agitação das ondas de oscilação providas de águas profundas, à medida que o trem de ondas atinge a região em que o movimento ondulatório toma contato com o fundo, é primordial para o planejamento destas obras.

Nestas obras portuárias ou de engenharia oceânica é importante saber o rumo e a altura da onda em determinado ponto, como resultado da refração de uma onda que ao largo tem direção, altura e período definidos. No entanto, muitas vezes teremos a necessidade de resolver o problema inversamente, isto é, determinar a direção e altura da onda ao largo, em função da direção, do período e da altura da onda que atinge um ponto desejado.

Diante deste panorama procurou-se implementar um programa que apresente as deformações de refração, empolamento e arrebentação da agitação monocromática num trecho costeiro de interesse, fornecendo uma maior abrangência e flexibilidade para aplicação em engenharia costeira. Para tanto, buscou-se o aprimoramento de um programa de cálculo de refração de onda monocromática proposto há alguns anos pelo Vice-Almirante Dr. Alberto dos Santos (Franco, 1984), baseado no método apresentado por Albernethy e Gilbert (1975). Esta ferramenta, otimizada operacionalmente a fornecer tais informações com maior rapidez e precisão, poderá, por exemplo, subsidiar o cálculo de transporte de sedimentos litorâneo longitudinal na zona de arrebentação e estimar o rumo resultante deste.

## FUNDAMENTOS TEÓRICOS

As características das ondas são alteradas devido à diminuição da profundidade, como a redução da celeridade e a variação da altura. Um dos efeitos mais importantes provocados por esta variação de profundidade é o da refração de ondas, cujo conhecimento é necessário para se determinar as mudanças destas características nas condições de águas intermediárias.

Serão discutidas inicialmente algumas relações fundamentais que provocarão modificações na altura da onda à medida que esta se aproxima da costa (coeficientes de empolamento e de refração) e, posteriormente, o fenômeno de refração propriamente dita e a solução numérica adotada para o cálculo.

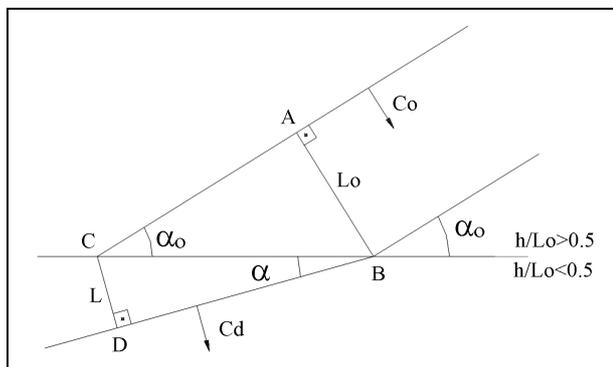


Figura 1. Refração de onda na transição de água-profunda para água intermediária.

### Mudança do rumo de propagação

Quando a frente da onda que se propaga em direção à costa não atinge simultaneamente uma determinada profundidade temos uma modificação na condição de sua frente e dos demais parâmetros característicos da onda. Assim, uma determinada frente de onda, que num instante encontra-se em profundidades diferentes, terá num instante seguinte uma celeridade menor nas profundidades menores e maior nas profundidades maiores. Este fenômeno faz com que a frente de onda tenha a tendência a atingir a praia paralelamente às curvas batimétricas.

A celeridade das ondas não muda significativamente em águas intermediárias para justificar uso de teorias de ordem superior denominadas teorias de amplitude finita. Desta forma, para os cálculos das velocidades de propagação da onda, o programa REFRONDA baseou-se na teoria de pequena amplitude ou linear representada pela Equação (1):

$$C = \frac{g \cdot T}{2 \cdot \pi} \operatorname{tgh} \left( \frac{2 \cdot \pi \cdot h}{L} \right) \quad (1)$$

sendo L o comprimento da onda; T o período da onda; h a profundidade local; e g a aceleração da gravidade.

O fenômeno pode ser melhor visualizado considerando a passagem da onda na linha de transição de águas profundas para águas intermediárias, conforme a Figura 1. A Ilustração mostra um ponto da frente de onda propagando-se em água profunda, com celeridade  $C_0$  e período T, de A para B distanciado de  $L_0$ . Outro ponto na frente propaga-se com celeridade  $C_d$  e mesmo período T, de C

para D distanciado de L, menor que o segmento AB pois sua celeridade é menor que C<sub>o</sub> (C<sub>d</sub> < C<sub>o</sub>). Em ambos os casos a distância das ortogonais AB e CD são medidas a partir da normal da frente AC e DB. A hipotenusa destes triângulos retos pode ser equacionada conforme abaixo:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_o} = \frac{L}{L_o} = \frac{C_d}{C_o} = \operatorname{tgh}\left(\frac{2.\pi.h}{L}\right) \quad (2)$$

A Equação (2) mostra a mudança angular da direção de onda devido à mudança de profundidade, que é a mesma relação aplicada à refração de luz, conhecida como Lei de Snell.

### Equação das ortogonais

Suponha-se que no instante t uma frente de onda ao largo seja definida pela reta FF<sub>1</sub> (Figura 2a) e imagine-se que, a partir dos pontos A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub>, A<sub>3</sub>, etc., as celeridades sejam respectivamente, c<sub>1</sub>, c<sub>2</sub>, c<sub>3</sub>, etc. A construção de Huyghens permite obter a frente de onda no instante t+Δt, traçando com os centros em A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub>, A<sub>3</sub>, etc., arcos de circunferência com raios iguais a c<sub>1</sub>Δt, c<sub>2</sub>Δt, c<sub>3</sub>Δt, etc., e em seguida traçando uma curva F'F'<sub>1</sub> que tangencie essas circunferências. Essa envoltória curva é a nova forma da frente de onda.

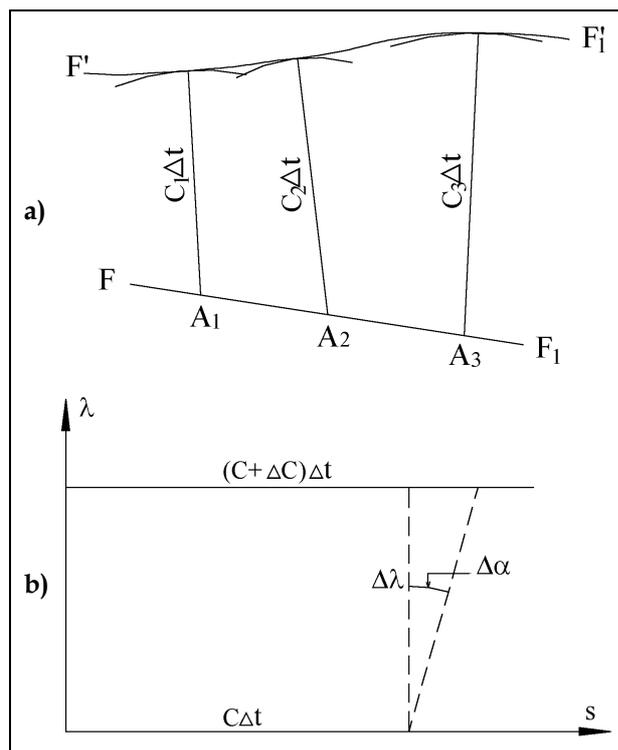


Figura 2. Propagação de uma onda.

A determinação da equação de uma ortogonal é facilmente deduzida com base na figura, na qual s corresponde à ortogonal e λ à crista de onda:

$$\Delta \alpha = -\frac{\Delta c \Delta t}{\Delta \lambda} \quad (3)$$

e, no limite, quando Δλ tende a zero, tem-se:

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{Dc}{D\lambda} \quad (4)$$

Derivando em relação a um arco qualquer, podemos transformar a Equação (4) em:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{D\alpha}{Ds} \frac{ds}{dt} = -\frac{Dc}{D\lambda} \Rightarrow \frac{D\alpha}{Ds} = -\frac{1}{c} \frac{Dc}{D\lambda} \quad (5)$$

A Equação (5) poderá ser posta sob a forma vetorial, assim a equação das ortogonais poderá ser descrita como:

$$\frac{D\alpha}{Ds} = -\vec{N} \cdot \frac{\nabla c}{c} \quad (6)$$

onde  $\vec{N}$  é um vetor unitário normal à ortogonal num ponto qualquer (Figura 3).

### Mudança da altura da onda

A altura da onda é alterada quando esta se aproxima da costa. Esta modificação é devida ao efeito dos coeficientes de empolamento e refração.

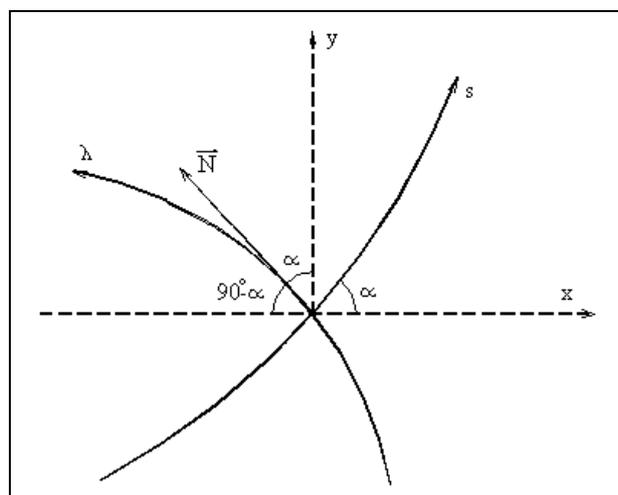


Figura 3. Detalhe da ortogonal.

Considerando primeiramente uma onda aproximando-se normalmente à costa, ou seja, sem considerar refração de onda, a potência transmitida por unidade de comprimento de frente de onda é:

$$\bar{P} = \frac{\rho \cdot g \cdot H^2}{8} C_g \quad (7)$$

onde  $\rho$  é a massa específica do líquido;  $C_g$  a celeridade de grupo;  $H$  a altura da onda; e  $g$  a aceleração da gravidade.

Admite-se também que a potência transmitida pela onda permaneça constante ao longo do tempo e do espaço. Isto implica que não há perda de energia através da viscosidade ou formação de turbilhão e que não há reflexão para o mar. Esta última restrição limita a aplicação nas profundidades próximas às de águas rasas.

Portanto:

$$\frac{\rho \cdot g \cdot H_0^2}{8} C_{g0} = \frac{\rho \cdot g \cdot H^2}{8} C_g \quad (8)$$

onde o índice zero corresponde às condições em águas profundas. Deste modo:

$$\frac{H}{H_0} = \sqrt{\frac{C_{g0}}{C_g}} = K_e \quad (9)$$

onde  $K_e$  é denominado coeficiente de empolamento.

Considerando-se agora um trem de ondas aproximando-se uniformemente obliquamente à costa supondo contornos do leito paralelo à costa. Duas ortogonais, espaçadas a uma distância de  $b_0$  em águas profundas, irão se propagar na mesma direção à linha da costa (Figura 4). Desde modo elas irão ter um deslocamento  $b_s$  ao longo da linha limite de águas profundas e intermediárias. Contudo, devido à mudança de direção de cada ortogonal (e da crista de onda), a distância entre elas irá aumentar enquanto estiverem se propagando após este limite. Então:

$$b_s = b / \text{sen} \alpha = b_0 / \text{sen} \alpha_0 \quad (10)$$

ou:

$$b/b_0 = \text{cos} \alpha / \text{cos} \alpha_0 \quad (11)$$

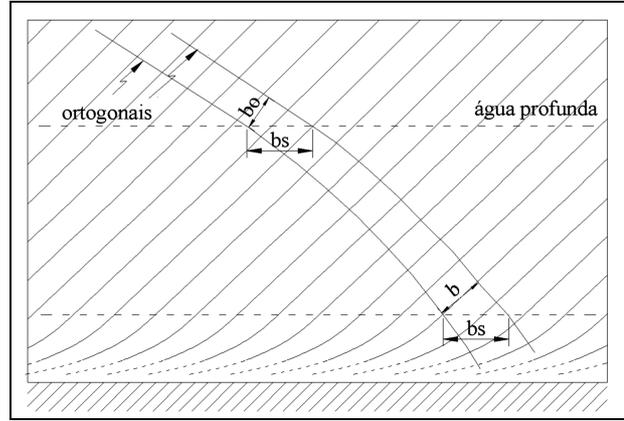


Figura 4. Espaçamento entre as ortogonais incidindo obliquamente sobre um plano inclinado uniforme.

Adotando constante a potência transmitida entre duas ortogonais (Equação 9) e com base na Equação (10), obtemos a seguinte relação:

$$\frac{H}{H_0} = \left( \frac{C_{g0}}{C_g} \right)^{1/2} \left( \frac{b_0}{b} \right)^{1/2} = \left( \frac{C_{g0}}{C_g} \right)^{1/2} \left( \frac{\text{cos} \alpha_0}{\text{cos} \alpha} \right)^{1/2} = K_e \cdot K_r \quad (12)$$

onde  $K_r$  é conhecido como *coeficiente de refração*.

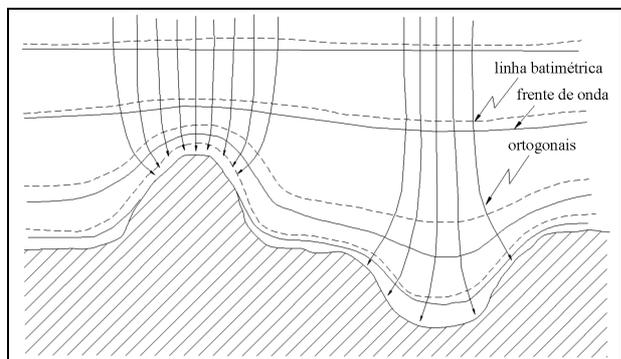
Será definido aqui o coeficiente de separação das ortogonais.

$$K_r = \left( \frac{b_0}{b} \right)^{1/2} = \left( \frac{1}{\beta} \right)^{1/2} \quad (13)$$

sendo  $\beta = \left( \frac{b}{b_0} \right)^{1/2}$ .

Portanto, a variação dos coeficientes de empolamento e refração provocará uma mudança na altura da onda quando esta se propaga para a costa.

Onde o contorno do leito não é paralelo, ou sofre curvaturas, o espaçamento entre as ortogonais de ondas mudarão, alterando então a energia por unidade de comprimento de frente e consequentemente a altura da onda. Portanto, a altura da onda pode ser alterada pelo fenômeno de refração, bem como as mudanças da direção de propagação. Duas características que podem ser encontradas na costa são: a projeção desta em direção ao mar ou uma reentrância da costa. Conforme mostra a Figura 5, formam-se concentrações de ortogonais, associadas à proeminência da costa e uma dispersão de energia da onda nas reentrâncias. Desta maneira, quando o coeficiente de refração ( $K_r$ ) for menor que a



**Figura 5. Refração de ondas em função do contorno da costa.**

unidade tem-se uma dispersão de energia e quando  $K_r$  for maior que a unidade tem-se uma concentração de energia.

Este fato foi observado nos estudos de refração de onda próximo à foz do rio Itanhaém.

Deve-se salientar que a aplicação direta da lei de Snell é restrita aos casos onde as curvas batimétricas são retilíneas e paralelas, fato que pode ser facilmente deduzido a partir da Equação (5).

Definindo os operadores relativos ao comprimento do arco de ortogonal e da crista da onda respectivamente:

$$\frac{D\alpha}{Ds} = \cos\alpha \cdot \frac{d\alpha}{dx} + \sin\alpha \cdot \frac{d\alpha}{dy} \quad (14)$$

$$\frac{Dc}{D\lambda} = -\sin\alpha \cdot \frac{dc}{dx} + \cos\alpha \cdot \frac{dc}{dy} \quad (15)$$

No caso de isóbatas paralelas à costa,  $d(*)/dx = 0$  e a Equação (5) resulta em:

$$\sin\alpha \cdot \frac{d\alpha}{dy} = -\frac{1}{c} \cos\alpha \cdot \frac{dc}{dy} \Rightarrow \quad (16)$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{d\alpha}{dy} = -\frac{d(\ln c)}{dy} \Rightarrow \quad (17)$$

$$\Rightarrow \frac{d(\ln(\cos\alpha))}{dy} = -\frac{d(\ln c)}{dy} \Rightarrow \quad (18)$$

$$\frac{c}{c_o} = \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_o} = \frac{\sin(\pi/2 - \alpha)}{\sin(\pi/2 - \alpha_o)} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_o} \quad (19)$$

Portanto, a aplicação pura e simples da lei de Snell para batimetrias complexas pode levar a

erros grosseiros, devendo ser utilizada com certa prudência.

## Arrebentação

Ao atingir profundidades reduzidas, a onda tende a diminuir o comprimento e aumentar ao mesmo tempo a altura, chegando a uma condição de instabilidade ou arrebentação. Basicamente pode-se considerar que a arrebentação ocorre quando a onda atinge uma forma limite na qual as velocidades horizontais das partículas da frente igualam-se à celeridade da onda. O fenômeno é influenciado pela declividade do fundo, esbeltez da onda e correntes de retorno provocadas pela onda anterior que rompeu.

O critério introduzido no programa para se determinar o ponto de arrebentação, fato importante para estimar o transporte de sedimentos ao longo da costa, foi o de McCowan, ou seja, quando a altura da onda ( $H_s$ ) propagando-se em águas rasas como onda solitária corresponder a 0,78 da profundidade ( $h_s$ ), segundo o índice de arrebentação:

$$\gamma_{\max} = \frac{H_s}{h_s} = 0,78 \quad (20)$$

## Teoria da Onda Solitária

Aplicando-se a lei de Snell diretamente entre o largo e a arrebentação, tem-se:

$$\frac{\sin\alpha_o}{C_o} = \frac{\sin\alpha_b}{C_b} \quad (21)$$

O ponto a ser discutido é qual valor se deve tomar para a velocidade  $C_b$  de propagação junto da arrebentação. Se a onda for considerada como sinusoidal, a celeridade junto da arrebentação será  $C_b = \sqrt{g \cdot h_b}$ , enquanto que pela Teoria da Onda Solitária é  $C_b = \sqrt{g \cdot (h_s + H)}$ , onde  $H$  é a altura da onda,  $h$  é a profundidade local e  $g$  a aceleração da gravidade. Para a onda limite  $\gamma = 0,78$ , a celeridade na arrebentação corresponde à  $C_b = 1,34\sqrt{g \cdot h_b}$ . Nesta circunstância, a teoria da onda solitária conduz a ângulos  $\alpha_b$  maiores do que os correspondentes à onda sinusoidal ( $\alpha'_b$ ).

Pela lei de Snell temos:

$$\text{sen}\alpha_b = \text{sen}\alpha'_b \cdot 1,34$$

e, uma vez que  $\alpha_b$  e  $\alpha'_b$  são em geral pequenos:

$$\alpha_b \approx \alpha'_b \cdot 1,34.$$

Demonstrada, então, a variação angular considerando a teoria de onda solitária, a seguir será discutido o limite de aplicação da teoria das ondas solitárias no caso da arrebentação oblíqua.

Considerando inicialmente uma onda de características ao largo  $H_o$ ,  $L_o$  e  $\alpha_o$  e admitindo que ela se propaga com características de uma onda de pequena amplitude até à profundidade  $h_s$ , com altura  $H_s$ . O problema consiste em determinar o valor  $h_s$  para o qual uma onda solitária de altura  $H_s$  transmite, a essa profundidade, a mesma energia que a onda dada ao largo.

A energia, correspondente a uma faixa  $b_o$  transmitida pela onda sinusoidal ao largo é dada por:

$$E_o = \frac{1}{16} \rho \cdot g \cdot H_o^2 \cdot L_o \cdot b_o \quad (22)$$

E a energia, correspondente a uma faixa  $b_s$ , transmitida pela onda solitária à profundidade  $h_s$  é dada por:

$$E_s = \frac{8}{3 \cdot \sqrt{3}} \rho \cdot g \cdot H_s^{3/2} \cdot h_s^{3/2} \cdot b_s \quad (23)$$

Levando-se em consideração que:

$$\begin{aligned} \frac{\text{sen}\alpha_o}{\text{sen}\alpha_s} &= \frac{C_o}{C_s} && \text{lei de Snell;} \\ \frac{\text{sen}\alpha_o}{\text{sen}\alpha_s} &= \frac{b_o}{b_s} && \text{considerações geométricas;} \\ C_o &= \frac{g}{2 \cdot \pi} \cdot T && \text{velocidade da onda sinusoidal} \\ &&& \text{ao largo;} \\ L_o &= \frac{g}{2 \cdot \pi} \cdot T^2 && \text{comprimento de onda ao largo;} \\ \delta_o &= \frac{H_o}{L_o} && \text{esbeltez ao largo;} \\ \frac{H_s}{H_o} &= \frac{H_s}{H_o} \sqrt{\frac{b_o}{b_s}} && \text{onde } \frac{H_s}{H_o} \text{ é o empolamento;} \\ \gamma_s &= \frac{H_s}{h_s} && \text{índice de arrebentação pela Teoria de Onda Solitária;} \end{aligned}$$

e igualando-se as Equações (22) e (23), obtém-se as seguintes expressões:

$$\sqrt{\gamma_s} = 24,61 \cdot \left( \frac{H_s}{H_o} \right)^2 \cdot \frac{h_s}{L_o} \quad (24)$$

$$\delta_o = \frac{h_s}{L_o} \cdot \frac{H_o'}{H_s} \cdot \sqrt{\frac{\cos\alpha_s}{\cos\alpha_o}} \cdot \gamma_s \quad (25)$$

Substituindo (24) em (25), vem:

$$\delta_o = 24,61^2 \cdot \left( \frac{h_s}{L_o} \right)^3 \cdot \left( \frac{H_s}{H_o} \right)^3 \cdot \sqrt{\frac{\cos\alpha_s}{\cos\alpha_o}} \quad (26)$$

onde a relação  $\cos\alpha_s/\cos\alpha_o$  pode ser escrita, de acordo com a lei de Snell, como:

$$\frac{\cos\alpha_s}{\cos\alpha_o} = \frac{\sqrt{1 - \text{sen}^2\alpha_o \cdot \left( \frac{C_s}{C_o} \right)^2}}{\cos\alpha_o} \quad (27)$$

Portanto, para se determinar o limite de aplicação da teoria de onda solitária, ou seja, a profundidade  $h_s$ , basta saber o rumo de propagação da onda ao largo, sua esbeltez, comprimento de onda ao largo e o coeficiente de empolamento.

$$h_s = \left( \frac{\delta_o \cdot L_o^3}{K_e^3 \cdot 24,61^2} \sqrt{\frac{\cos\alpha_o}{\cos\alpha_s}} \right)^{1/3} \quad (28)$$

onde  $K_e$  é o coeficiente de empolamento,  $L_o$  é comprimento de onda ao largo,  $\delta_o$  é a esbeltez ao largo e os ângulos  $\alpha_o$  e  $\alpha_s$  serão obtidos a partir do rumo da onda ao largo e próximo à arrebentação, onde há uma mudança para aplicação da onda solitária.

A introdução deste limite de  $h_s$  no programa permite calcular então a velocidade de propagação junto à arrebentação sem desprezar a altura da onda. Assim, para profundidades menores que  $h_s$ , determinada pela Equação (28), a celeridade será dada pela equação:

$$C_b = \sqrt{g \cdot (h_s + H)} \quad (29)$$

## SOLUÇÃO NUMÉRICA DO CÁLCULO DE REFRAÇÃO DE ONDAS DE OSCILAÇÃO MONOCROMÁTICAS

O estudo de refração de ondas consiste em resolver dois problemas. O primeiro é a determinação da altura das ondas, que é determinado quando os coeficientes de empolamento e de refração são conhecidos. O segundo problema é a mudança de rumo das ortogonais, isto é a determinação da mudança de rumo das frentes sobre diferentes curvas batimétricas, resolvido por meio da lei de Snell.

Uma solução numérica para estes problemas foi desenvolvida pelo Vice-Almirante Dr. Alberto dos Santos Franco (Franco, 1984). O algoritmo do *software* formulado por ele e fornecido ao Laboratório de Hidráulica da Universidade de São Paulo serviu de base para os cálculos de Refração de Ondas de Oscilação Monocromáticas.

Uma rede formada por triângulos equiláteros e associados a um sistema de eixos oblíquos é sobreposta à carta náutica. Através de algoritmos de interpolação determina-se, em cada vértice de triângulo, as profundidades, obtendo por conseguinte as celeridades nestes mesmos vértices.

A partir daí, a solução do problema de refração consiste em calcular as trajetórias das ortogonais através da rede de triângulos. As coordenadas das interseções dessas trajetórias com os lados dos triângulos definirão essas ortogonais com necessária precisão. Basta, para isto, que os triângulos da malha tenham um lado razoavelmente pequeno para que, dentro deles, as celeridades possam ser interpoladas linearmente.

Assim, o método numérico baseia-se em resolver o seguinte: dadas as celeridades nos três vértices do triângulo (Figura 6) e coordenadas conhecidas para o ponto A, em que a ortogonal entra no triângulo ( $\xi_a$  e  $\eta_a$ , coordenadas no sistema local oblíquo de cada célula), o parâmetro  $\beta_a$  (*coeficiente de separação das ortogonais*) e o ângulo  $\psi_a$  que a ortogonal faz com o lado do triângulo, calculam-se os valores de  $\xi_b$ ,  $\eta_b$ ,  $\beta_b$  e  $\psi_b$  correspondentes ao ponto B, em que a ortogonal deixa o triângulo. A trajetória da ortogonal é facilmente determinada pois esta descreve um arco de circunferência cuja curvatura é quase nula, portanto uma linha praticamente reta, desde que as celeridades nos três vértices do triângulo sejam aproximadamente iguais. Desta forma, conhecidas as coordenadas no ponto A e o centro da circunferência (C) determinam-se as coordenadas do ponto B.

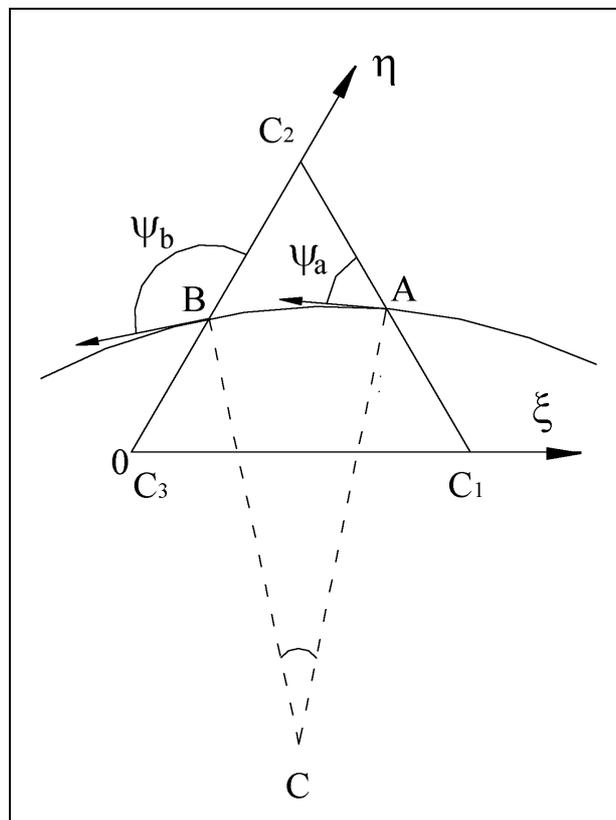


Figura 6. Célula triangular.

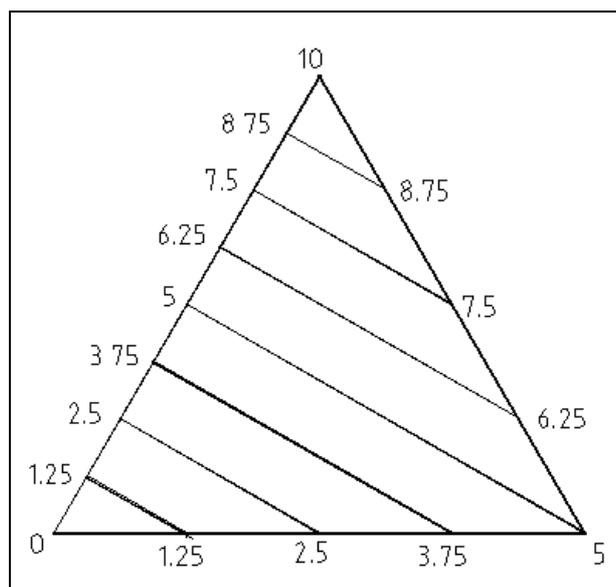


Figura 7. Linha de isovalores.

A partir da Equação (6), será provado que o percurso da ortogonal em cada célula triangular obedece à mesma lei de refração de Snell e que o trecho da ortogonal na célula triangular descreve um arco de circunferência.

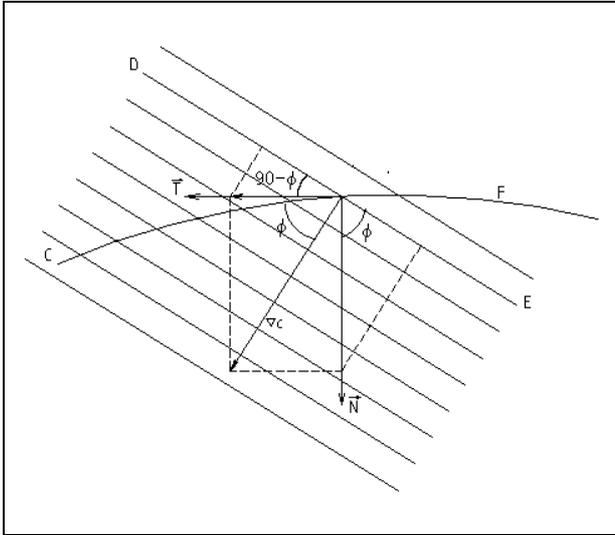


Figura 8.  $|\nabla c|$  e isovalores de  $c$ .

Se os lados dos triângulos forem suficientemente pequenos, as celeridades calculadas nos vértices das células podem ser interpolação linearmente para qualquer ponto da mesma. Imaginado que nos três vértices do triângulo os valores de uma função pontual qualquer sejam tais que suas diferenças para um dos valores atinjam, respectivamente, 0, 5 e 10, então, considerando que esses valores variam linearmente ao longo dos lados do triângulo, as linhas de isovalores serão todas paralelas. Traçando essas paralelas com um mesmo intervalo percebe-se que o gradiente desse campo, perpendicular às linhas de isovalores, terá direção e módulo constante.

Primeiramente será provado que o percurso da ortogonal no campo das celeridades acima descrito, e que prevalece em cada célula triangular, obedece à lei de refração de Snell.

A Figura 6 mostra o arco  $\widehat{FC}$  de uma ortogonal atravessando um triângulo e os vetores unitários  $\vec{T}$  e  $\vec{N}$ , respectivamente tangente e normal a  $\widehat{FC}$  em P, e o ângulo  $\phi$  formado pela tangente com o vetor gradiente  $\nabla c$ . O objetivo é mostrar que a relação  $\text{sen } \phi / c$  é constante. Derivando esta expressão em relação à ortogonal  $s$ , obtemos:

$$\frac{D}{Ds} \left( \frac{\text{sen } \phi}{c} \right) = \frac{c \cos \phi \frac{D\phi}{Ds} - \text{sen } \phi \frac{Dc}{Ds}}{c^2} \quad (30)$$

Como a derivada de  $\phi$  em relação a  $s$  é equivalente a  $D\alpha/Ds$ , expressa por (6), e como:

$$\frac{Dc}{Ds} = \vec{T} \cdot \nabla c$$

conclui-se que:

$$\frac{D}{Ds} \left( \frac{\text{sen } \phi}{c} \right) = - \frac{(\vec{N} \cdot \nabla c) \cos \phi - (\vec{T} \cdot \nabla c) \text{sen } \phi}{c^2} \quad (31)$$

Mas,  $\vec{N} \cdot \nabla c$  e  $\vec{T} \cdot \nabla c$  são as componentes do vetor gradiente  $\nabla c$  segundo a normal e a tangente a  $\widehat{FC}$  e o numerador da última expressão (31) é a soma das projeções dessas componentes sobre DE que, como mostra a Figura 6, é nula. Assim sendo, fica demonstrada a constância da relação  $\text{sen } \phi / c$ . Em tais circunstâncias, se A é o ponto de cruzamento da ortogonal com o lado de entrada em um triângulo e B é o seu cruzamento com o lado de saída e se  $\phi_a$  e  $\phi_b$  são os ângulos já definidos, nesses pontos a expressão  $\text{sen } \phi / c$  pode ser escrita como:

$$\frac{c_a}{c_b} = \frac{\text{sen } \phi_a}{\text{sen } \phi_b} \quad (32)$$

que é exatamente a lei de Snell.

Em seguida será demonstrado que o trecho de ortogonal em cada célula triangular pode ser assimilado a um arco de circunferência.

De (6) tiramos:

$$\frac{D^2 \alpha}{Ds^2} = - \frac{1}{c} \frac{D\vec{N}}{Ds} \cdot \nabla c - \frac{1}{c^2} \vec{N} \cdot \nabla c \cdot \frac{Dc}{Ds} \quad (33)$$

Levando esta expressão à Equação (31), obtemos:

$$\frac{D^2 \alpha}{Ds^2} = - \frac{\vec{N} (\vec{T} \cdot \nabla c) \nabla c - \vec{N} \cdot (\vec{T} \cdot \nabla c) \nabla c}{c^2} = 0 \quad (34)$$

o que permite concluir que  $D\alpha/Ds$  é constante, isto é, no interior do triângulo a curvatura da ortogonal é constante, o que significa que nessa região a ortogonal é representada por um arco de circunferência.

Além disso,  $D\alpha/Ds = 1/Rs$ , sendo o  $R_s$  o raio da circunferência mencionada, logo de (6) tiramos:

$$c = -(\vec{N} \cdot \nabla c) R_s \quad (35)$$

Como  $\vec{N}\nabla c$  é a componente do gradiente de  $c$  na direção de  $\vec{N}$ , a celeridade no centro da circunferência  $cc$  será:

$$c_c = c + (\vec{N}\nabla c)Rs = 0 \tag{36}$$

para todas as direções.

Conclui-se então que a celeridade no centro da circunferência é nula.

### Descrição da malha triangular

A primeira dificuldade a vencer é a distribuição irregular das sondagens e a ausência de uma função contínua  $Z(x,y)$  que defina a topografia submarina de tal forma que se conheça o valor de  $z$  para quaisquer valores de  $x$  e  $y$ . Tal dificuldade pode ser contornada ajustando uma superfície, pelo Método dos Mínimos Quadrados, um polinômio estendido até o grau que se considere suficiente para representar adequadamente esta superfície.

Outra opção é a sugerida por Diniz da Gama (apud Franco, 1984), a qual baseia-se em interpolar a profundidade  $Z(x,y)$  para um ponto qualquer da área selecionada, onde conhecemos as profundidades nos pontos  $Z_i (x_i,y_i)$  ao seu redor. Para isso basta calcular a profundidade  $Z$  mediante uma média entre as profundidades  $Z_i$  conhecidas com um peso proporcional ao inverso do quadrado de distância destes pontos ao que se deseja determinar. Corresponde portando a uma média ponderada:

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^P \left( \frac{Z_i}{D_i^2} \right)}{\sum_{j=1}^P \left( \frac{1}{D_j^2} \right)} \tag{37}$$

onde  $D_i^2 = (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2$  é o quadrado da distância do ponto desejado  $(x,y)$  aos demais  $P$  pontos  $(x_i,y_i)$  de profundidades  $Z_i (x_i,y_i)$  conhecidas. Com o processo numérico é inviável calcular todos os valores de  $Z(x,y)$ , para uma área selecionada. Assim, somos obrigados a escolher pontos uniformemente distribuídos, para os quais interpolaremos tais valores.

Uma solução adotada por Albernethy e Gilbert (1975, não publicado - apud Franco, 1984) é a escolha de pontos distribuídos em vértices de uma rede de triângulos equiláteros (Figura 9), asso-

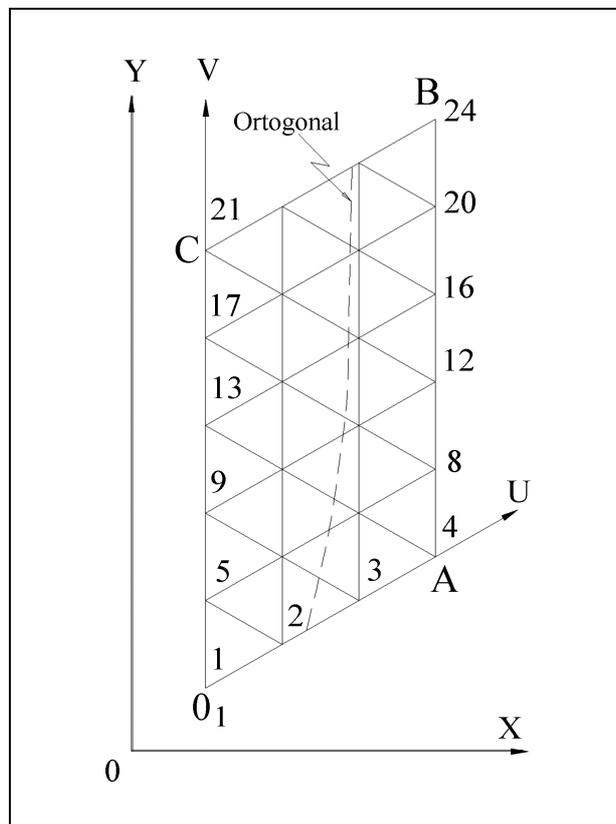


Figura 9. A rede de triângulos.

ciada a um sistema de eixos oblíquos, formando um ângulo de  $60^\circ$ . Tal sistema está relacionado a outro ortogonal, tal que o eixo de ordenadas  $OY$  seja paralelo a  $O_1V$ , do sistema oblíquo.

Designando por  $x_o$  e  $y_o$  as coordenadas retangulares de  $O_1$ , a matriz de coordenadas dos vértices dos triângulos de lados igual a  $l$  será:

$$\begin{aligned} x_{ij} &= l(I - 1) \cdot \cos 30^\circ + x_o \\ x_{ij} &= l(I - 1) \cdot \sen 30^\circ + y_o + (J - 1)l \end{aligned} \tag{38}$$

onde  $I$  e  $J$  são respectivamente, os números de ordem dos vértices segundo  $O_1U$  e  $O_1V$ .

Na Figura 9 observa-se que o número máximo de vértices na direção  $O_1U$  do sistema oblíquo é de 4, que designamos como  $I_{max}$  ( $I_{max} = 4$ ). Já na direção  $O_1V$  o máximo de vértices é de 6, da mesma forma designada como  $J_{max}$  ( $J_{max} = 6$ ).

As fórmulas para a representação matemática de fundo são de fácil programação, mas quando há descontinuidades ponderáveis e quando é baixa a densidade de sondagens disponíveis, os resultados deixam a desejar.

### O código REFRONDA (Franco, 1984)

Em Franco (1984) está descrito todo o detalhamento do cálculo efetuado pelo código fonte do programa REFRONDA com a utilização da rede de triângulos tais como: equação das ortogonais, trajetória da ortogonal dentro da célula triangular, cálculo da ortogonal na célula, equação de separação das ortogonais, cálculo de  $\beta$ , cálculo do instante em que as ortogonais cruzam os lados de saída, cálculo da celeridade de grupo.

### Cálculo da celeridade

A celeridade em cada vértice do triângulo é calculada com base na Equação (1).

$$C = \frac{g \cdot T}{2\pi} \operatorname{tgh}\left(\frac{2\pi \cdot h}{L}\right) \quad (39)$$

Junto à arrebenção, foi introduzida a teoria de onda solitária. Assim, sua celeridade é dada por:

$$C_b = \sqrt{g \cdot (h_s + H)}$$

onde  $h_s$  é a profundidade limite de aplicação da teoria das ondas solitárias no caso da arrebenção oblíqua. Este limite é dado pela Equação (28).

O programa originalmente calculava apenas o coeficiente de separação  $\beta$ . Foi também introduzido, para se determinar o limite de aplicação da teoria de onda solitária ( $h_s$ ), os cálculos dos coeficientes de empolamento ( $K_e$ ) e de refração ( $K_r$ ), dados respectivamente pelas Equações (9) e (13).

### Frentes das ondas

O algoritmo original para o cálculo de refração de onda tem como um dos parâmetros de saída o instante  $t_b$ , que corresponde ao tempo que a ortogonal cruza o lado de saída da malha triangular.

O intervalo de tempo que leva um ponto qualquer da onda ir de A a B é dado por:

$$t_{bB} - t_{bA} = \int_A^B \frac{ds}{C} \quad (40)$$

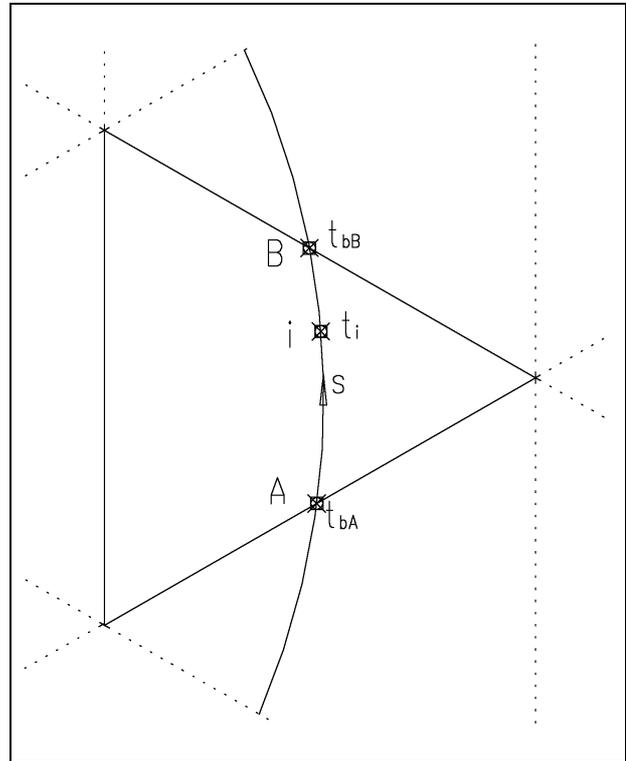


Figura 10. Tempo que a ortogonal cruza uma célula da malha.

sendo “s” o segmento da ortogonal dentro do triângulo e “C” a celeridade. Inicialmente adota-se um valor qualquer para tempo  $t_{bA}$ . Assim, o tempo  $t_{bB}$ , que corresponde ao tempo que a ortogonal sai da célula triangular corresponderá à:

$$t_{bB} = t_{bA} - \int_A^B \frac{ds}{C} \quad (41)$$

Para o próximo passo, será efetuado a transposição  $t_{bA} = t_{bB}$  e o cálculo é reiniciado.

O traçado geométrico das cristas de ondas baseou-se neste intervalo de tempo calculado. Com o tempo  $t_b$  de cada ortogonal e as coordenadas dos pontos em que ela cruza o triângulo é possível interpolar as coordenadas de um ponto intermediário aos dois com um tempo  $t_i$  arbitrário:

$$t_i = L/C$$

sendo L o comprimento de onda e C a celeridade.

A partir dos diversos pontos “i” (com os mesmos tempos  $t_i$ ), é possível traçar a linha de crista da onda, conforme visto na Figura 11.

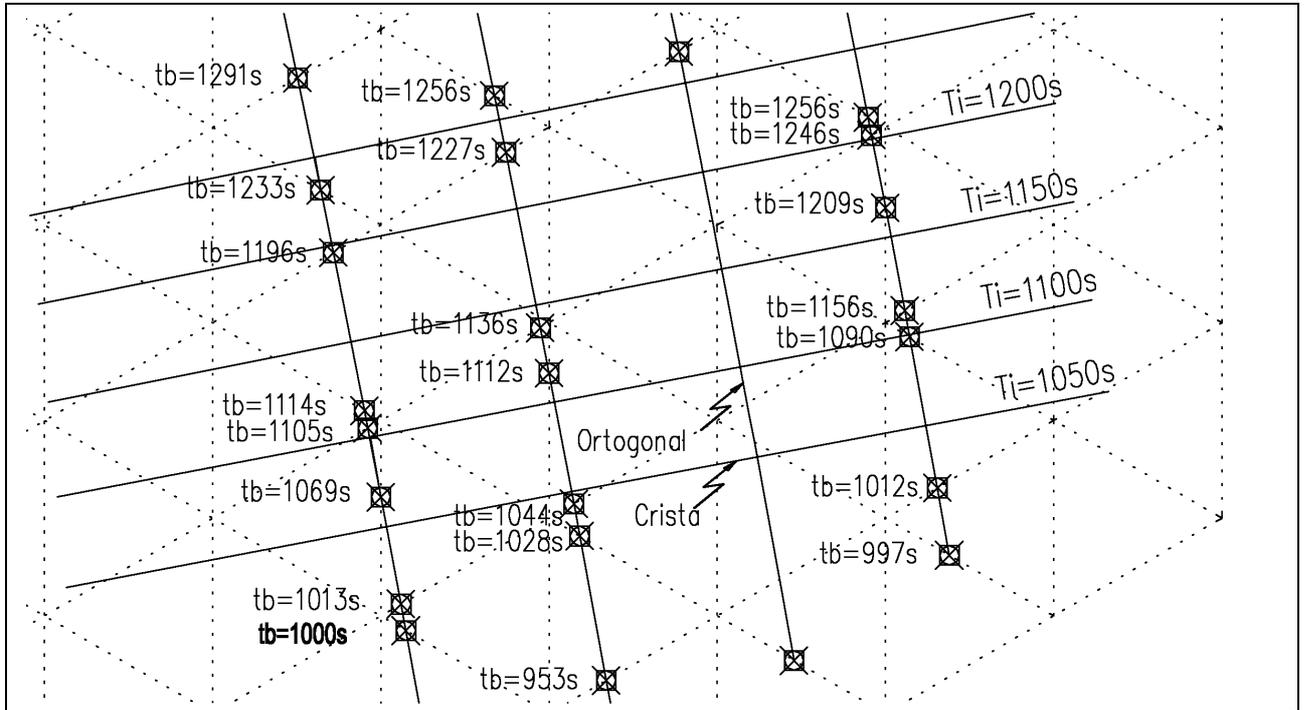


Figura 11. Exemplo do traçado geométrico das cristas.

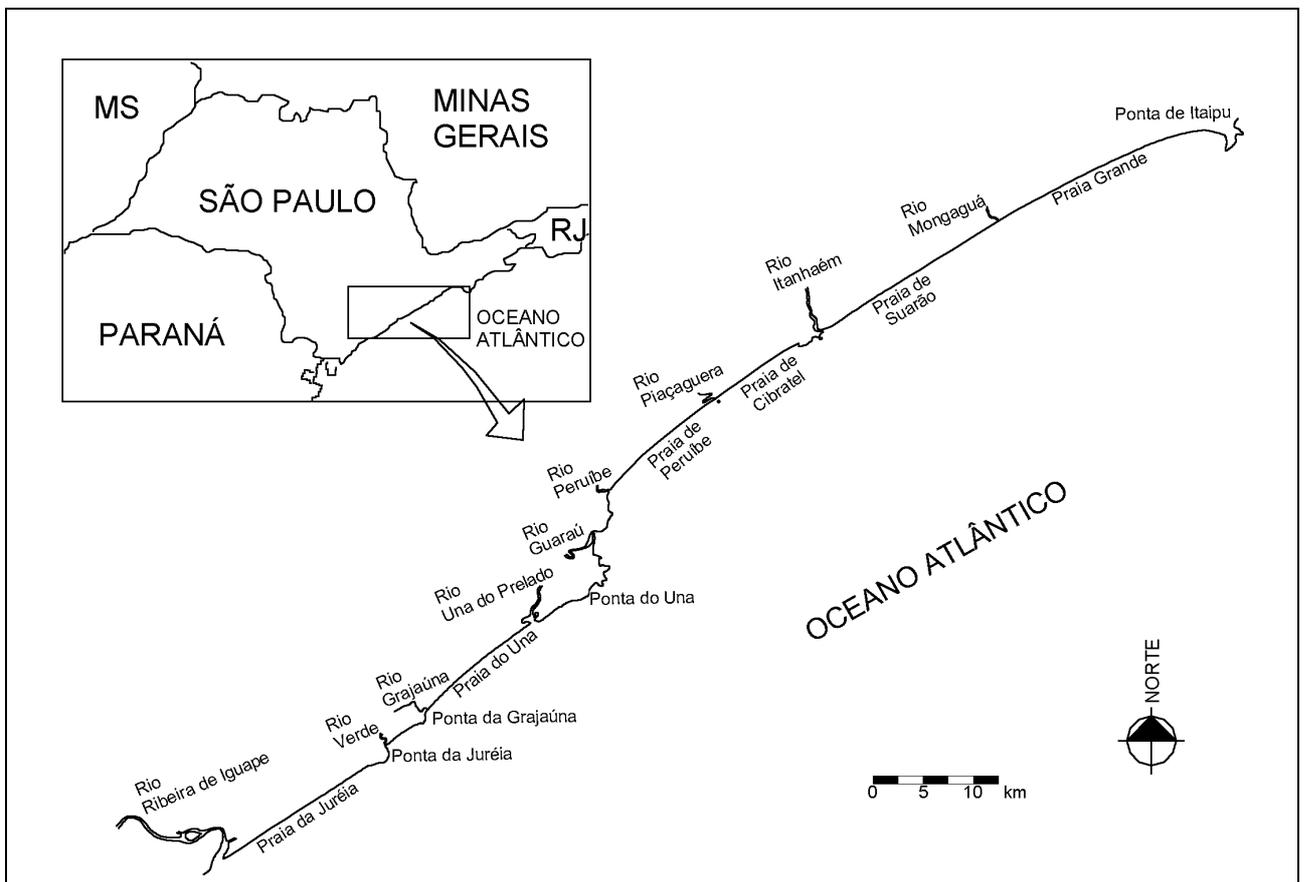


Figura 12. Localização do litoral centro-sul do Estado de São Paulo.

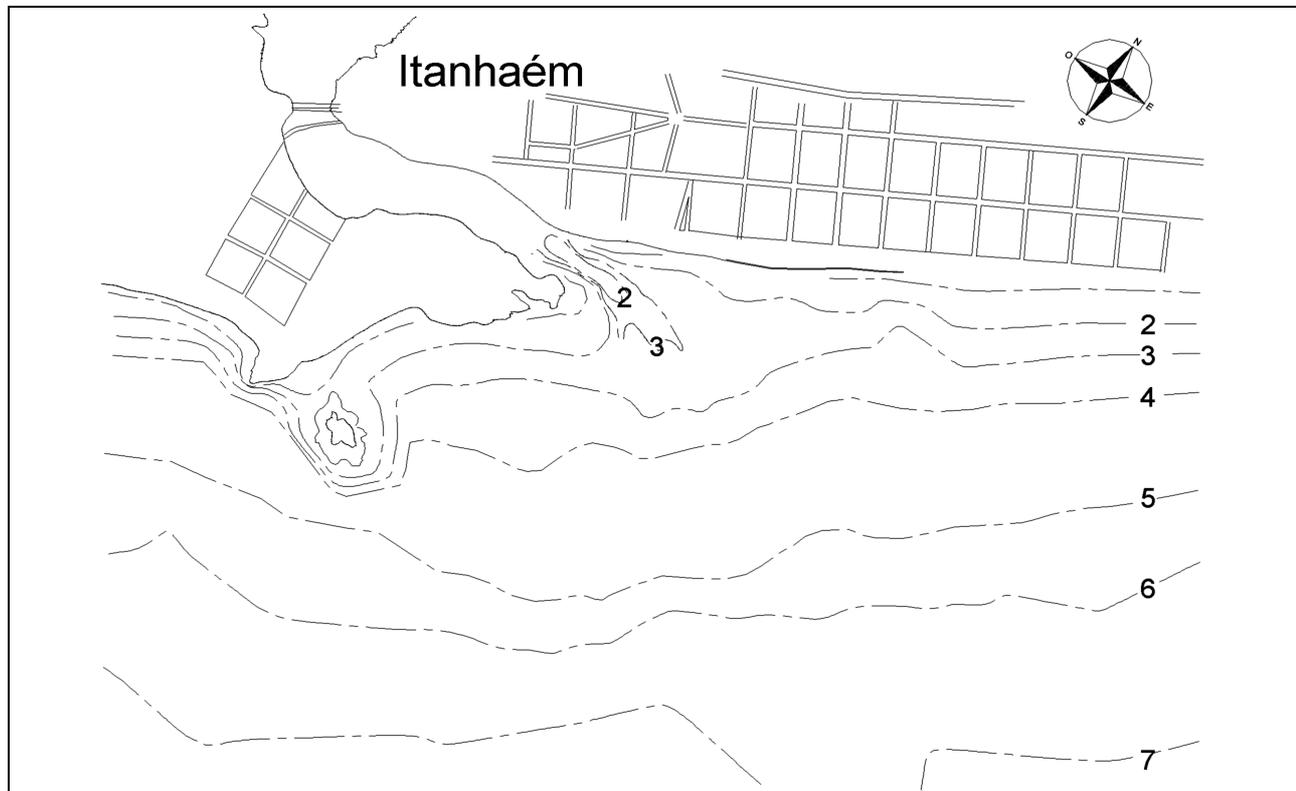


Figura 13. Batimetria de 1991, profundidades em metros.

## APLICAÇÃO

O aprimoramento deste programa possibilita aplicações em estudos e projetos relacionados com a hidráulica marítima. O desenvolvimento conseguido foi aplicado a um estudo de caso de descrição do clima ondulatório da região costeira de Itanhaém (SP), conforme visto na Figura 12, visando a aplicação ao projeto de obra de melhoria da navegação na Barra do Rio Itanhaém e avaliações relativas ao transporte de sedimentos litorâneo.

## Considerações sobre os dados utilizados

O estudo de irradiação das ondas a partir da costa para o largo permite o aproveitamento de dados de agitação de uma região para utilização noutra suficientemente próxima que mantenha o mesmo clima ondulatório. No caso, irradiaram-se as ondas medidas na Praia do Una (Centro de Desenvolvimento da Tecnologia Nuclear/Divisão de Engenharia Ambiental, 1982 a 1985) para o largo e posteriormente do largo para Itanhaém, distando estas duas localidades cerca de 40 km. As folhas de

bordo da DHN da Marinha do Brasil utilizadas para o processo de irradiação foram a de 1700-001/82 (escala 1:100.000) – da Ilha do Bom Abrigo à Praia da Juréia (escala 1:100.000) e o conjunto 1700-008/81 – proximidades da Praia do Una (escalas 1:10000 e 1:20000). Adotou-se lados naturais dos triângulos medindo 1000 m, o que forneceu precisão suficiente para determinar a altura da onda ao largo. A origem da malha foi localizada na coordenada 262090,7197501.

O objetivo inicial do estudo foi irradiar uma onda para o largo a partir de um ponto em profundidades intermediárias, onde se conhece suas características e, posteriormente, refratá-las para a costa numa região suficientemente próxima, no caso as praias do município da Estância Balneária de Itanhaém. Como não se dispunha de apenas um ponto contendo todas as informações, a análise foi feita para ortogonais partindo de duas bóias instaladas aproximadamente na coordenada E281879, N7288014 (profundidade 6 m) e coordenadas E278335, N7283425 (profundidade 8,5 m), na qual se dispunha de dados sobre o rumo de propagação e um ondógrafo (profundidade de 17 m), com informações a respeito da altura, fixado próximo à coordenada E287340, N7283290. Com os

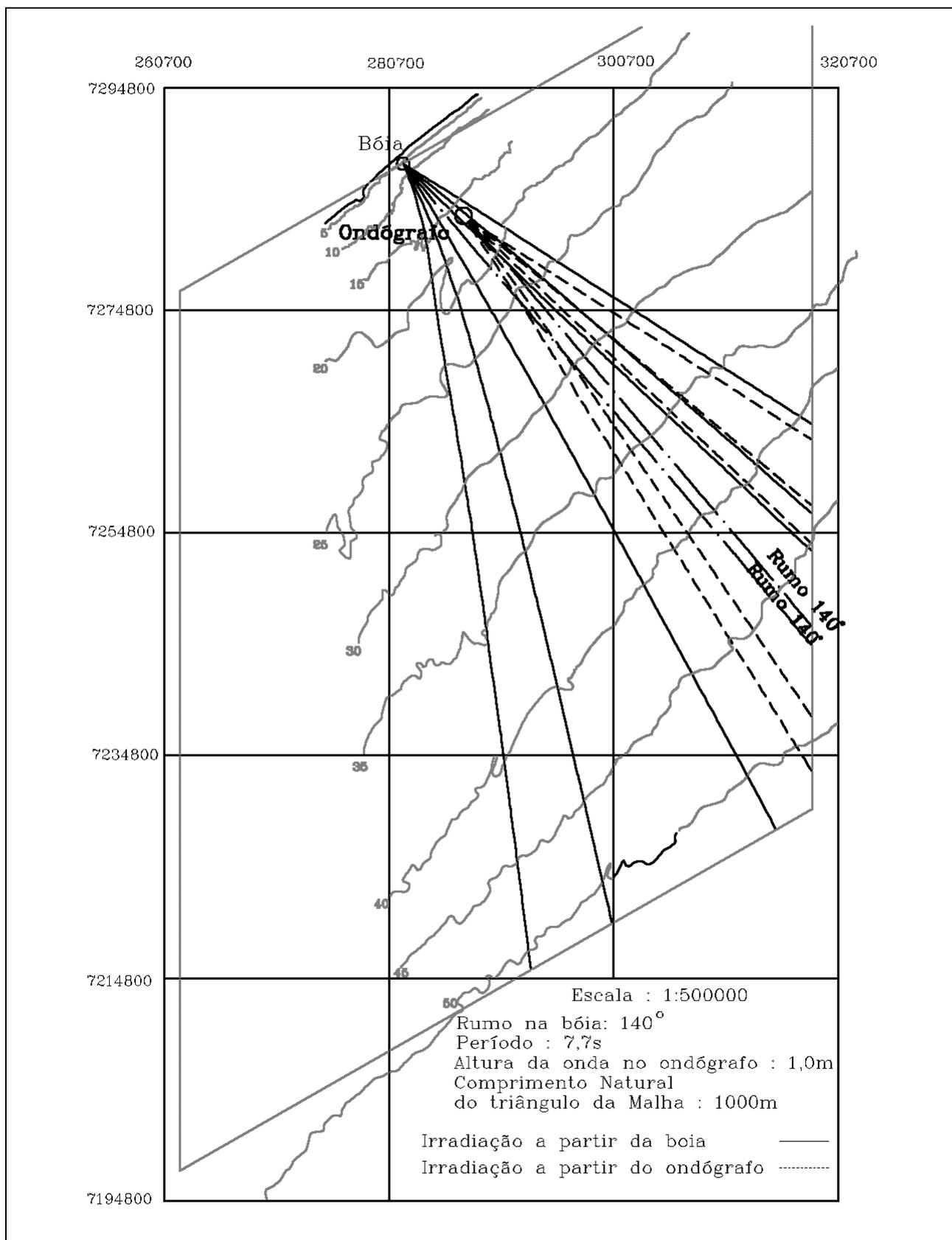


Figura 14. Irradiação para o largo a partir da Praia do Una.

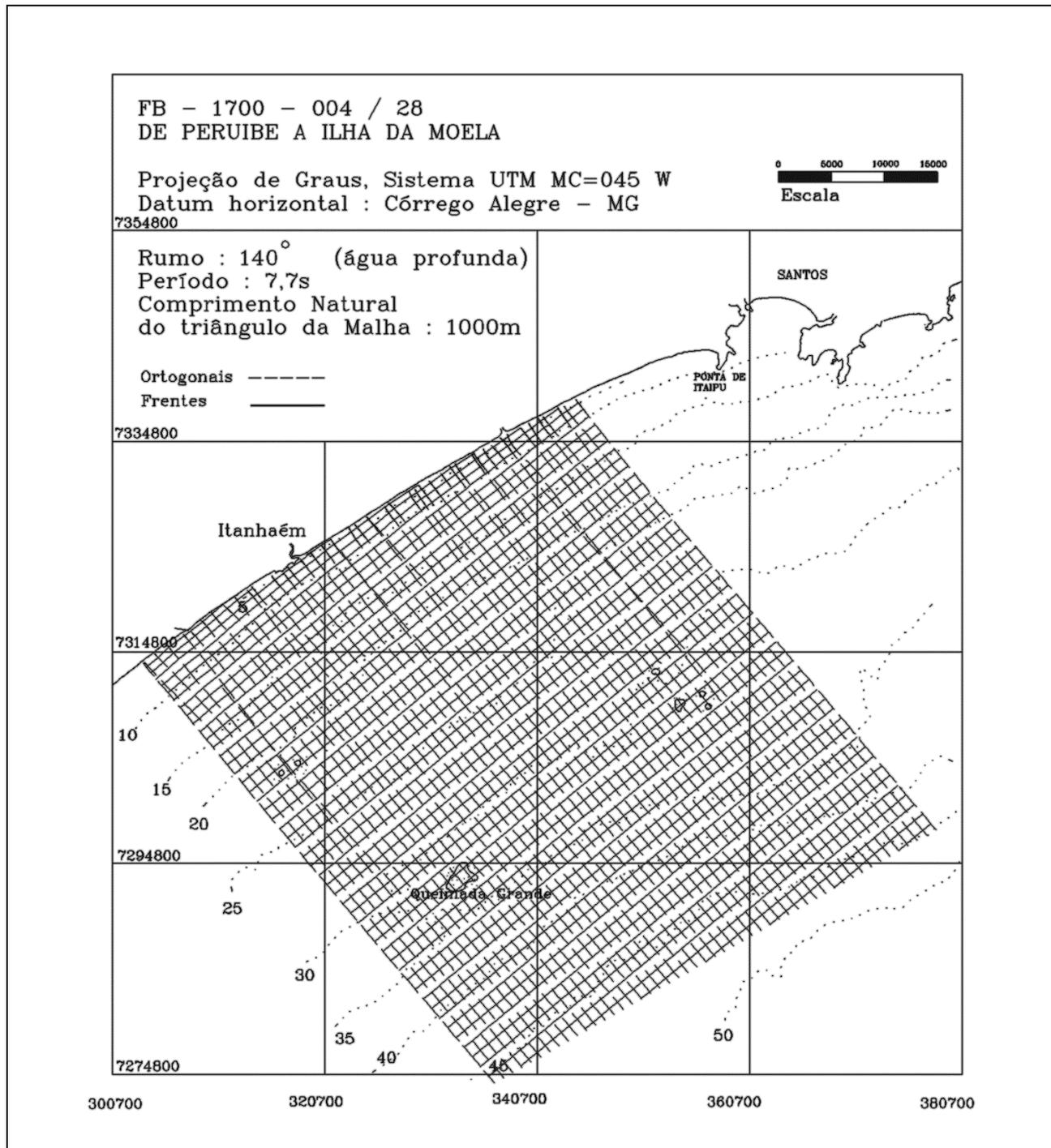


Figura 15. Refração de onda do largo para as praias de Itanhaém.

dados irradiados dos dois pontos buscou-se em águas profundas duas ortogonais com mesma direção. Assumiu-se então que estas duas, com mesmo rumo ao largo, quando propagadas para a costa atingem a bóia com um rumo conhecido pelas observações de campo e o ondógrafo com outro na qual não se dispõe de informação. Determinado o

rumo de propagação de uma onda no ondógrafo foi possível calcular a altura da onda ao largo.

Para o estudo de refração de ondas utilizou-se a folha de bordo 1700-044/28 (escala 1:100.000) - de Peruíbe a Ilha da Moela, a qual apresenta profundidades não maiores que 60 m. Os rumos de propagação das ondas refratadas à costa

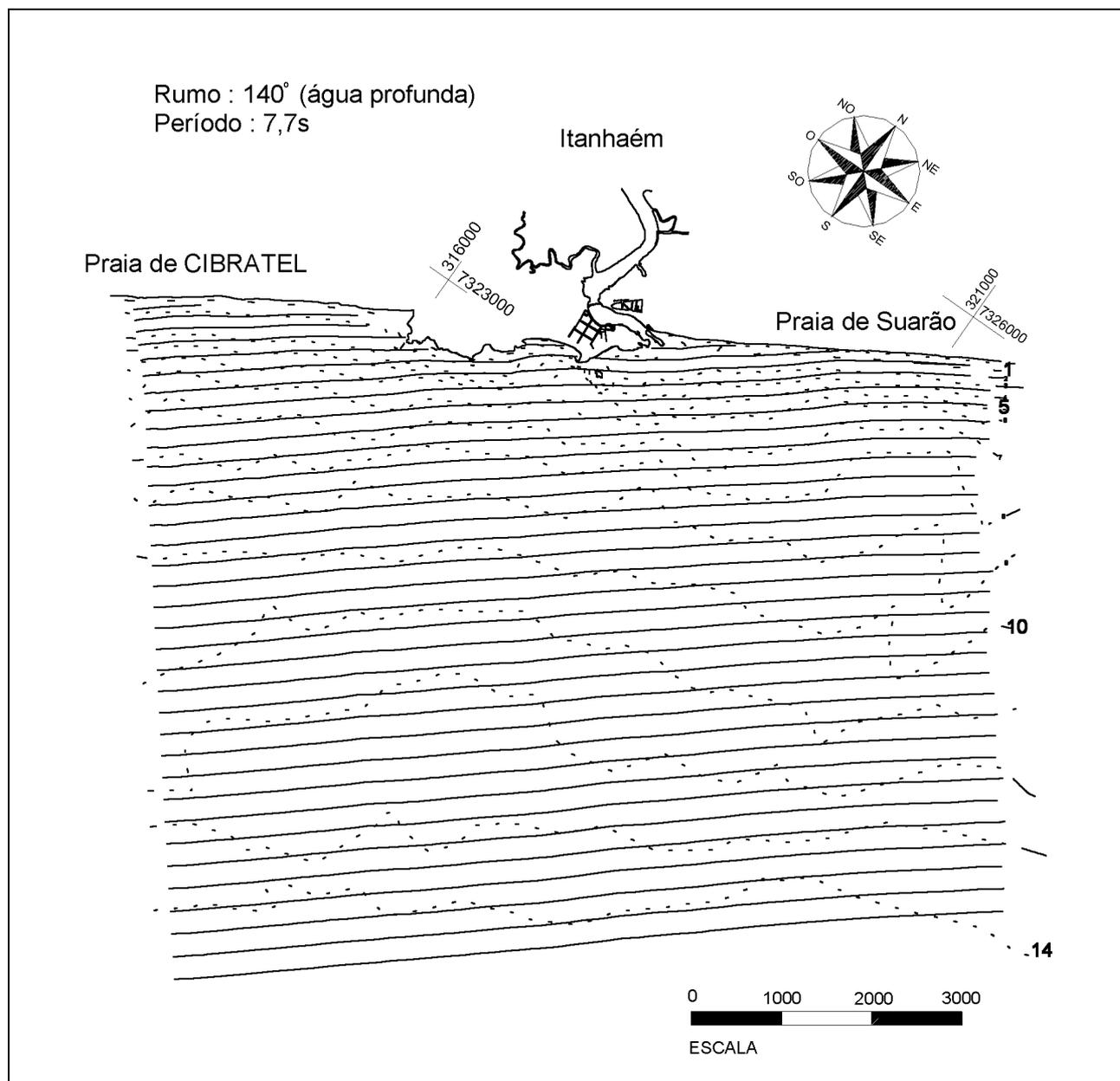


Figura 16. Refração de onda do largo para as praias de Itanhaém.

foram os obtidos no processo de irradiação descritos no item anterior. Foram interpoladas duas malhas. A primeira foi construída com lados de triângulos medindo 1000 m e origem no ponto E301175, N7253112. Para uma análise mais precisa das características das ondas na zona de arrebentação e verificação da teoria da onda solitária, adotou-se uma segunda malha com lado de tamanho 50 m e origem em E301175, N7312112. Esta última cobriu uma faixa de aproximadamente 25 km do litoral nas proximidades da foz do Rio Itanhaém. As cotas batimétricas estavam referenciadas ao

nível de baixa-mar média de sizígia (nível de redução) e a refração foi efetuada para o nível médio do mar.

### Apresentação dos dados

As Figuras 14 a 20 ilustram os resultados obtidos pelo programa. A Figura 14 mostra a irradiação para o largo de uma onda partindo da bóia (E281879, N7288014) e do ondógrafo (E287340, N7283290), com as seguintes características:

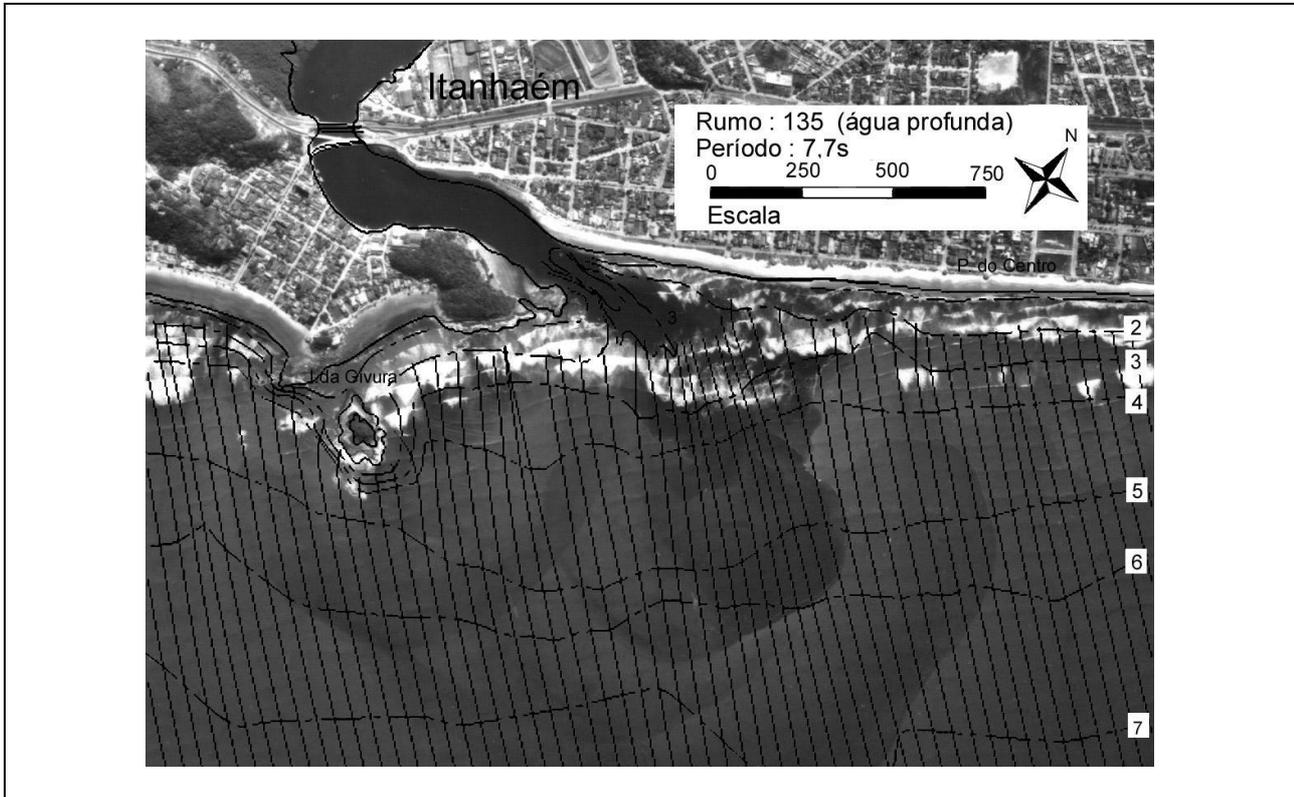


Figura 17. Ortogonal da onda refratada para as praias de Itanhaém, valores em segundos.

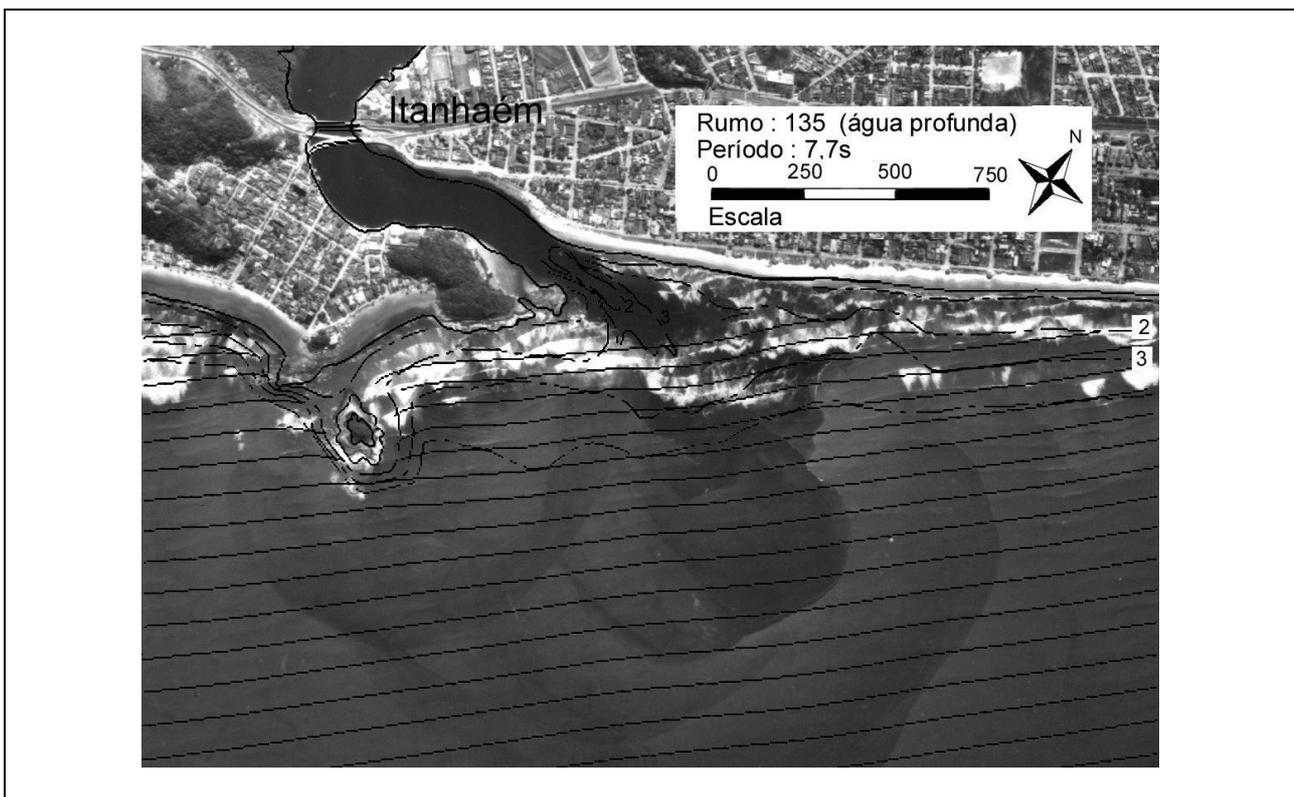


Figura 18. Frentes de onda refratada para as praias de Itanhaém.

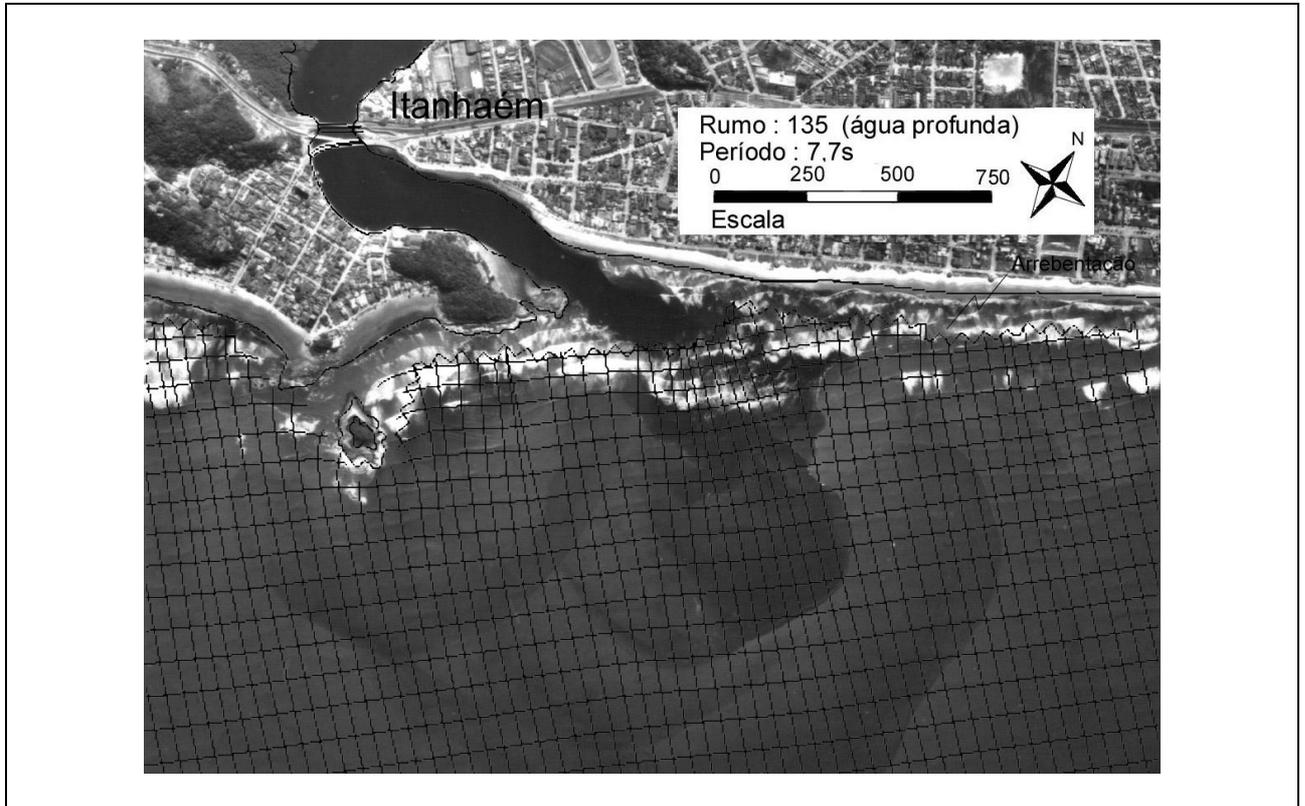


Figura 19. Frentes, ortogonais e zona de arrebenção.

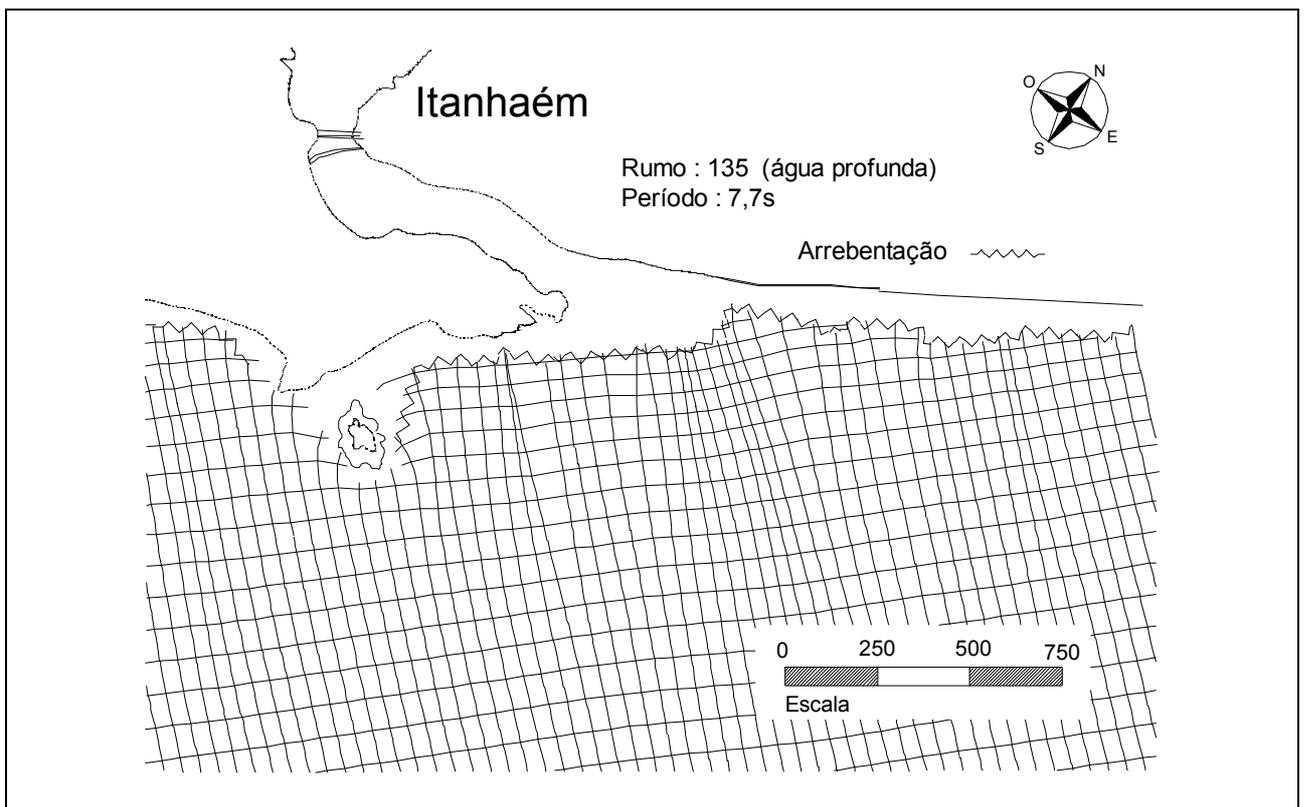


Figura 20. Frentes, ortogonais e zona de arrebenção.

- Rumo de propagação na bóia de  $140^\circ$  e altura no ondógrafo de 1,0 m.

As Figuras 15 a 20 ilustram a refração das ondas com as seguintes características ao largo:

- Rumo de propagação de  $140^\circ$  e altura de 1,18 m.

## CONCLUSÕES

A utilização do programa original REFRONDA sofreu, além da reformulação de linguagem, da forma de entrada dos dados batimétricos e das saídas, vários aprimoramentos, tanto numéricos como de descrição da hidrodinâmica de ondas, que o atualizaram e o tornaram mais completo, ampliando a sua utilidade para as aplicações em hidráulica marítima, conforme sintetizados pelos resultados apresentados neste trabalho.

A necessidade prática de se extrapolar dados medidos de uma localidade para outra próxima com homogeneidade climática, conduziu a estender a aplicação da irradiação para a determinação das características das ondas em águas profundas. A não disponibilidade de informações de rumo de propagação e altura das ondas em um mesmo ponto trouxe certa dificuldade em determinar a altura ao largo. Foi necessário fazer algumas considerações como admitir que o rumo em água profunda de uma ortogonal que atinge a bóia (ponto que se conhece apenas as direções) é paralelo a uma outra que atinge o ondógrafo.

A necessidade prática de se calcular as características das ondas na arrebentação conduziu à introdução da transformação da onda linear em onda solitária no trecho de águas rasas mais próximo da arrebentação.

Um dos problemas encontrados nos cálculos da refração e irradiação de onda está na interpolação da malha triangular. Na modelagem digital do terreno, o cuidado na escolha dos pontos e a quantidade de dados amostrados estão diretamente relacionados com a qualidade do produto final de uma aplicação sobre o modelo. Para aplicações onde se requer um grau de precisão maior, a quantidade de pontos amostrados, bem como o cuidado na escolha desses pontos, ou seja, a qualidade dos dados é decisiva. Quando há descontinuidades ponderáveis e quando é baixa a densidade de sondagens disponíveis, os resultados deixam a desejar.

Fato notado quando a interpolação dos pontos da rede é feita em grandes profundidades e em uma faixa de transição entre águas intermediárias e águas profundas, que em geral, nessas regiões a carta náutica é dotada de poucos pontos muito dispersos. A densidade de sondagem da folha de bordo resultou em uma interpolação das cotas batimétricas nos vértices dos triângulos mais precisa, embora o esforço computacional para que estes dados sejam armazenados, recuperados e processados é maior. O problema também é sentido próximo à costa, pois dependendo da escala e de sua riqueza de detalhes, a área é ausente de pontos com profundidades relativas  $h/L$  menores que 0,05 (águas rasas). Assim, pontos da malha localizados em regiões de água rasa, são interpolados com profundidades maiores alterando, portanto, os cálculos das celeridades e da refração. Isto prejudica a determinação da zona de arrebentação e os ângulos na arrebentação das ortogonais com a normal às isóbatas, que são informações necessárias para subsidiar, por exemplo, o cálculo de transporte de sedimentos litorâneo longitudinal na zona de arrebentação e estimar o rumo resultante deste.

## SÍMBOLOS

- $\bar{P}$  : potência média transmitida por unidade de comprimento de frente de onda;  
C: celeridade da onda;  
Co: celeridade em água profunda;  
L: comprimento da onda;  
Lo: comprimento da onda em água profunda;  
T: período da onda;  
h: profundidade local;  
g: aceleração da gravidade.  
 $\rho$ : massa específica da água;  
C<sub>g</sub>: celeridade de grupo;  
H: altura da onda;  
h: profundidade.

## AGRADECIMENTOS

O desenvolvimento dos trabalhos sintetizados neste artigo foi objeto de um projeto de pesquisa de Iniciação Científica que contou com apoio da FAPESP, bem como do Convênio DAEE-USP, que continua fornecendo suporte financeiro para o aprimoramento deste modelo.

## REFERÊNCIAS

- CENTRO DE DESENVOLVIMENTO DA TECNOLOGIA NUCLEAR/ DIVISÃO DE ENGENHARIA AMBIENTAL. (1982 a 1985). *Relatórios de progresso da campanha de medições oceanográficas na região das Praias do Una e do Rio Verde, no litoral sul do Estado de São Paulo*. 11 volumes, Belo Horizonte.
- FRANCO, A. S. (1984). *Análise Linear de onda - Teoria e prática*. Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo, Instituto Oceanográfico da Universidade de São Paulo e Comissão Internacional de Recursos do Mar, São Paulo.

## *Wave Routing Calculation Program Applied to the Beaches of Itanhaém (State of São Paulo)*

### ABSTRACT

*Wave refraction analysis for a coastal site requires the construction of many refraction diagrams, one for each combination of wave period, height and deep-water direction of interest. The development of techniques for the numerical calculation of wave refraction diagrams in regions with uneven bottoms, as encountered in coastal areas, is a useful tool for Coastal Engineering studies. For this purpose, the mathematical and computation method to calculate the monochromatic wave refraction, proposed a few years ago by Dr. Alberto dos Santos (Franco, 1984), was improved, based on the method presented by Albernethy and Gilbert (1975). More information was added to the original program regarding wave deformations, such as the inclusion of the Theory of the Solitary Wave in the processes of velocity calculation, shoaling effect and breaking waves.*

*The result of this process enables the visualization of the breaking zone for each wave and its characteristic parameters such as nearshore wave height and crest orientation at a given location. Moreover, the association of the wave crests with the orthogonals constitutes an excellent instrument to compare the plans of the theoretical crests with the real crests, for example, in aerial photographs. Quantification of these effects is also important to predict the longshore sediment transport.*

*The development obtained has been applied in a case study describing the undulatory climate of the coastal area of Itanhaém (State of São Paulo), seeking to improve navigation in the Itanhaém River Bar.*

*Key-words: wave; routing; coastal.*