

# OBTENÇÃO DO CAMPO DE VELOCIDADES EM ESCOAMENTOS POTENCIAIS POR UMA FORMULAÇÃO HIPER-SINGULAR DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

**Plínio Fleury Júnior**

*Faculdade de Engenharia – Departamento de Engenharia Mecânica - UERJ  
R. São Francisco Xavier 524 - CEP 20550-013 Rio de Janeiro, RJ*

**José Paulo Soares de Azevedo e Webe João Mansur**

*Programa de Engenharia Civil da COPPE – UFRJ  
Caixa Postal 68506 - CEP 21945-970 Rio de Janeiro, RJ*

## RESUMO

*Este trabalho apresenta um novo enfoque para o cálculo de velocidades (em componentes normais e tangenciais ao contorno) em um escoamento potencial adotando a formulação hiper-singular do Método dos Elementos de Contorno (MEC).*

*A equação hiper-singular é estabelecida a partir da expressão da derivada direcional do potencial em um ponto do interior do domínio. Singularidades surgem quando, via um processo limite, esta expressão é aplicada a pontos do contorno.*

*Álgebra vetorial foi empregada para escrever os termos livres da equação integral de forma independente do sistema de coordenadas, tornando este cálculo meramente geométrico.*

*As expressões finais para cálculo dos campos de velocidade normal e tangencial ao contorno por uma formulação totalmente integral são apresentadas juntamente com as condições de continuidade exigidas pela formulação.*

*A teoria desenvolvida foi implementada computacionalmente para elementos constantes, lineares e quadráticos.*

*A fim de demonstrar a validade das técnicas descritas são apresentados resultados de algumas simulações onde pode-se observar o efeito nos resultados obtidos com discretizações que não atendem às condições de existência, e daqueles que as atendem de forma aproximada.*

## INTRODUÇÃO

Formulações onde as equações integrais de contorno hiper-singulares (EICH) foram usadas junto com a equação integral clássica do MEC (EIC) podem ser encontradas em trabalhos que tratam da solução do MEC para flexão de placas, publicados há mais de 15 anos por Bézine (1978) e Stern (1979). As EICH podem ser usadas como uma alternativa da EIC para resolver vários problemas de engenharia como nos trabalhos de In-

gler & Rudolphi (1990) e Telles & Prado (1993). EICH podem também ser usadas junto com EIC como uma alternativa eficiente para resolver muitos problemas, por exemplo, dispensando o uso de sub-regiões na análise de problemas da mecânica da fratura como nos trabalhos de Guimarães & Telles (1994).

A formulação clássica do MEC aplicada aos escoamentos potenciais fornece valores do potencial e da velocidade normal ao contorno; em pontos do domínio fornece o potencial e seu gradiente.

A fim de se conhecer o campo de velocidades num contorno, é necessário calcular também as componentes de velocidades tangenciais ao contorno. Esta componente não é obtida diretamente da formulação clássica, sendo calculada por diferenças finitas a partir da interpolação do potencial no contorno (Azevedo, 1991; Jaime, 1995).

## A FORMULAÇÃO HIPER-SINGULAR

As expressões da formulação hiper-singular são obtidas a partir da equação integral de contorno clássica (Mansur, Prodanoff e Azevedo, 1995) que fornece o potencial em um ponto interno  $s$ , derivando-se  $u(s)$  em uma direção  $m$  qualquer:

$$\frac{\partial u(s)}{\partial m} + \frac{\partial}{\partial m} \left[ \int_{\Gamma} p_n^*(s; x) u(x) d\Gamma(x) \right] = \frac{\partial}{\partial m} \left[ \int_{\Gamma} u^*(s; x) p_n(x) d\Gamma(x) \right] \quad (1)$$

O resultado das operações de derivação indicadas na Equação (1) é dado por:

$$p_m(s) + \int_{\Gamma} p_{nm}^*(s; x) u(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} u_{,m}^*(s; x) p_n d\Gamma(x) \quad (2)$$

As derivadas dos núcleos em domínios bi-dimensionais são:

$$u_{,m}^*(s; x) = \frac{\partial}{\partial m} \left( -\frac{1}{2} \ln r \right) = \frac{1}{2\pi r} \underline{v} \cdot \underline{m} \quad (3)$$

$$p_{n,m}^*(s; x) = \frac{\partial}{\partial m} \left( -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \right) = -\frac{1}{2\pi r^2} \{ 2(\underline{v} \cdot \underline{m})(\underline{v} \cdot \underline{n}) - (\underline{m} \cdot \underline{n}) \} \quad (4)$$

Nas Equações (1) a (4):  $u(s)$  representa o potencial no ponto  $s$ ;  $u(x)$  representa o potencial no ponto  $x$ ;  $u^*(s; x)$  representa a solução fundamental para a equação de Laplace/Poisson;  $p_n(x)$  e  $p_n^*(s; x)$  representam a derivada de  $u(x)$  e  $u^*(s; x)$ , respectivamente, em relação à direção da normal ao contorno em  $x$ ,  $r$  é a distância entre  $s$  e  $x$ ;  $\underline{n}$  o vetor unitário normal ao contorno em  $x$  apontando para fora do domínio, e  $\underline{v}$  é o vetor unitário na direção do vetor  $\underline{r} = (x-s)$ . O domínio é bidimensional representado por  $\Omega$  delimitado pelo contorno  $\Gamma$ .

A Equação (2) fornece a derivada do potencial em um ponto interno  $s$  numa direção dada  $m$ .

Se o ponto  $s$ , onde se quer calcular o valor de  $p_m(x)$  pertence ao contorno  $\Gamma$  pode-se torná-lo um ponto interno usando-se o artifício usual de criar um entorno circular  $\Gamma_\varepsilon$  de um ponto "a" a outro "d", centrado em  $s$ , de raio  $\varepsilon$ , retirando-se o trecho  $\Gamma_R$  que ficava entre  $a$  e  $d$ . Sendo, agora,  $s$  um ponto interno pode-se usar a Equação (2). Para voltar-se ao domínio original  $\varepsilon$  reduz-se o entorno tomando o limite quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

A Equação (2) com o artifício feito e levada ao limite fica:

$$p_m(s) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_R + \Gamma_\varepsilon} [p_{n,m}^*(s; x) u(x) - u_{,m}^*(s; x) p_n(x)] d\Gamma(x) \right\} = 0 \quad (5)$$

Após diversas operações, a Equação (5) transforma-se na equação integral hiper-singular na sua forma geral (Fleury, 1996):

$$\frac{2\pi - \Delta\theta}{2\pi} p_m(s) - \frac{1}{2\pi} p_m(s) \left[ (\underline{m} \cdot \underline{t}(s)) (\underline{m} \cdot \underline{n}(s)) \right]_1^2 -$$

$$- \frac{1}{2\pi} p_l(s) \left[ (\underline{m} \cdot \underline{n}(s))^2 \right]_1^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_R} [u_{,m}^*(s; x) p_n(x) - p_{n,m}^*(s; x) [u(x) - u(s)]] d\Gamma(x) \right\} \quad (6)$$

onde  $\underline{t}(s)$  é o vetor unitário tangente ao contorno no ponto  $s$  com o mesmo sentido da integração, ou seja, com o domínio à esquerda de quem percorre o contorno; 1 e 2 são os pontos "imediatamente antes" e "imediatamente depois" de  $s$ ;  $p_l(s)$  é a derivada de  $u(x)$  na direção do vetor unitário  $\underline{l}$  perpendicular a  $\underline{m}$  no ponto  $s$ , sendo  $\underline{m} \times \underline{l} = k$ . As condições de existência do limite indicado na Equação (6), demonstradas em Fleury (7), são mencionadas a seguir.

## EXISTÊNCIA DAS SOLUÇÕES - EQUAÇÕES NOS CANTOS E EQUAÇÕES EM CONTOURNO SUAVE

Examinando a Equação (6) quanto à existência de soluções chega-se a seguinte conclusão (Fleury, 1996):

*"A solução de problemas de potencial representados pela equação de Laplace pode ser encontrada, usando-se uma equação hiper-singular de integrais de contorno, desde que  $u(x)$ ,  $p_n(x)$  e  $p_t(x)$  sejam Hölder contínuas e  $\nabla u(x)$  seja contínuo."*

Existindo essas condições, e indicando as integrais conforme sejam integrais usuais de Riemann ou integrais no sentido do valor principal de Cauchy (VP), pode-se escrever a Equação (6) como segue:

$$\frac{2\pi - \Delta\theta}{2\pi} p_m(s) - \frac{1}{2\pi} p_m(s) \left[ (\underline{m} \cdot \underline{t}(s)) (\underline{m} \cdot \underline{n}(s)) \right]_1^2 - \frac{1}{2\pi} p_l(s) \left[ (\underline{m} \cdot \underline{n}(s))^2 \right]_1^2 = - \int_{\Gamma} \frac{1}{\pi r^2} (\underline{v} \cdot \underline{m})(\underline{v} \cdot \underline{n}) [u(x) - u(s)] d\Gamma(x) + - VP \int_{\Gamma} \left[ \frac{1}{\pi r^2} (\underline{m} \cdot \underline{n}) [u(x) - u(s)] + u_{,m}^*(s; x) p_n(x) \right] d\Gamma(x) \quad (7)$$

Quando o ponto  $s$  está em um canto do contorno, os fluxos normais “antes” e “depois” de  $s$  podem ser diferentes; neste caso, duas equações integrais são necessárias para cada ponto do canto. Essas equações são obtidas fazendo-se  $m = n_1(s)$  e  $m = n_2(s)$  na Equação (6).

Por exemplo, no caso de substituir  $m(s)$  por  $n_1(s)$  tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi - \Delta\theta}{2\pi} p_{n_1}(s) - \frac{1}{2\pi} p_{n_2}(s)(n_1 \cdot t_2) = \\ - \int_{\Gamma} \frac{1}{2\pi r^2} (v \cdot n_1)(v \cdot n)[u(x) - u(s)] d\Gamma(x) + \\ + VP \int_{\Gamma} \left\{ u_{,n_1}^*(s; x) p_n(x) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2\pi r^2} (n_1 \cdot n)[u(x) - u(s)] \right\} d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (8)$$

Quando o ponto fonte  $s$  está localizado em uma parte do contorno  $\Gamma$  suave, tem-se:

$$\begin{aligned} n_1(s) = n_2(s) = n(s) \quad t_1(s) = t_2(s) = t(s) \\ t_1(s) = t_2(s) = t(s) \quad n(s) \cdot t(s) = 0 \quad \Delta\theta = \pi \end{aligned}$$

Neste caso, a singularidade se reduz novamente. Desta maneira, os termos podem ser integrados separadamente e a Equação (7) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 0,5p_m(s) = VP \int_{\Gamma} u_{,m}^*(s; x) p_n(x) d\Gamma(x) + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{v \cdot m(x)}{r^2} (v \cdot n(s)) [u(x) - u(s)] d\Gamma(x) - \\ - \frac{1}{2\pi} VP \int_{\Gamma} \frac{m \cdot n(x)}{r^2} [u(x) - u(s)] d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (9)$$

Quando  $m = n$ , isto é, considerando-se a derivada na direção normal ao contorno suave, escreve-se:

$$\begin{aligned} 0,5p_n(s) = \int_{\Gamma} u_{,n}^*(s; x) p_n(x) d\Gamma(x) + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{v \cdot n(x)}{r^2} [v \cdot n(s)] [u(x) - u(s)] d\Gamma(x) - \\ - \frac{1}{2\pi} VP \int_{\Gamma} \frac{n(s) \cdot n(x)}{r^2} [u(x) - u(s)] d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (10)$$

Quando  $m = t$ , isto é, foi feita a derivada na direção da tangente ao contorno suave, escreve-se:

$$\begin{aligned} 0,5p_t(s) = VP \int_{\Gamma} u_{,t}^*(s; x) p_n(x) d\Gamma(x) - \\ - \int_{\Gamma} p_{n,t}^*(s; x) [u(x) - u(s)] d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (11)$$

## DISCRETIZAÇÃO

Para se obter uma solução aproximada da equação de Laplace em uma região bidimensional, as equações integrais de contorno hiper-singulares são discretizadas usando-se elementos de contorno constantes, lineares e quadráticos.

O procedimento de discretização é essencialmente o mesmo que se usa para a formulação clássica, no qual a geometria é substituída por um conjunto de elementos cuja forma é definida localmente por nós geométricos e funções de forma; as funções  $u(x)$  e  $p_n(x)$  ao longo do contorno são aproximadas em cada elemento usando-se seus valores nos nós funcionais combinados com funções de interpolação.

A aplicação do método da colocação em cada nó funcional do contorno discretizado leva a um sistema de equações algébricas que, resolvido, fornece as soluções aproximadas para  $u(x)$  e  $p_n(x)$  no contorno discretizado.

Os coeficientes de influência foram calculados por quadratura de Gauss, para o ponto fonte localizado fora do elemento em consideração.

Quando o fonte se situa no próprio elemento sobre o qual se faz a integração, o integrando pode apresentar singularidades e a integral, então, deve ser calculada como o valor principal de Cauchy. Neste caso, a singularidade é removida analiticamente e as integrais regulares restantes são feitas por quadratura de Gauss.

Tanto  $u(s)$  como sua derivada na direção  $m$  podem ser calculados, para pontos no interior do domínio, através da versão discretizada das equações integrais correspondentes.

A equação para  $p_t(x)$ , junto com as soluções do contorno para  $p_n(x)$  e  $u(x)$  permitem o cálculo do gradiente de  $u(x)$  no contorno sem necessidade de qualquer diferenciação numérica.

São usados elementos constantes que possuem um nó funcional no centro, lineares com um nó funcional próximo ou em cada extremidade do elemento e os quadráticos que possuem dois nós funcionais próximos de cada extremo e um terceiro nó funcional no centro. No caso dos elementos lineares e quadráticos, quando o nó extremo do elemento está num canto, o ponto de colocação é deslocado para o interior do elemento. A presença de nós funcionais deslocados para o interior do elemento do contorno permite considerar

dois valores diferentes das derivadas normais de  $u(x)$ , isto é,  $p_n(x)$ , correspondentes aos nós geométricos localizados nos cantos; neste caso e no caso dos nós centrais, as Equações (10) e (11) correspondentes a contornos suaves são as usadas.

Em contornos compostos de trechos retilíneos, o uso de qualquer um dos elementos referidos garante uma representação exata da geometria do contorno.

Para partes curvas do contorno, mesmo que suaves, o uso de quaisquer desses elementos introduz cantos artificiais na representação geométrica. Os erros resultantes decrescem com o refinamento da malha, uma vez que a diferença entre os vetores normais unitários nos nós comuns a dois elementos vizinhos contínuos tende a desaparecer.

Com o objetivo de acelerar este processo de convergência, foi adotado um procedimento simples que consiste em tomar  $m$  ao longo da bissetriz do ângulo formado pelas duas normais aos elementos vizinhos, como o vetor normal unitário na Equação (6), a qual é modificada como segue:

Fazendo-se  $m = n_b$ , sendo  $n_b$  a bissetriz entre a normal antes ( $n_1$ ) e a normal ( $n_2$ ) depois na Equação (6), após as simplificações possíveis e a verificação de quais integrais podem ser feitas como integrais de Riemann e quais devem ser calculadas pelo valor principal de Cauchy tem-se:

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi - \Delta\theta}{2\theta} - \frac{1}{2\pi}(n_1 \bullet t_2) p_{n_b}(s) = \\ & = \int_{\Gamma} \frac{1}{2\pi r^2} \{2(v(x) \bullet n(x))(v(x) \bullet n_b(x))\} \\ & \quad [u(x) - u(s)] d\Gamma(x) - \\ & - VP \int_{\Gamma} \frac{1}{2\pi r^2} [n(x) \bullet n_b(s)] [u(x) - u(s)] d\Gamma(x) + \\ & + VP \int_{\Gamma} \frac{1}{2\pi r} [v(x) \bullet n_b(s)] p_{n_b}(x) d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (12)$$

A formulação para a derivada tangente deve também ser modificada. Toma-se novamente a equação geral hiper-singular fazendo  $m(s) = t_b(s)$ , simplificando-se e verificando quais integrais podem ser feitas como integrais de Riemann e quais devem ser feitas com valor principal de Cauchy tem-se:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{2\pi - \Delta\theta}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}(n_1 \bullet t_2) \right\} p_{t_b}(s) = \\ & = \int_{\Gamma} \frac{-1}{2\pi r^2} \{2(v(x) \bullet n(x))(v(x) \bullet n_b(x))\} \\ & \quad [u(x) - u(s)] d\Gamma(x) + \\ & + VP \int_{\Gamma} \frac{1}{2\pi r} ((x) \bullet t_b(s)) p_n(x) d\Gamma(x) - \\ & - VP \int_{\Gamma} \frac{1}{2\pi r^2} (n(x) \bullet t_b) [u(x) - u(s)] d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (13)$$

Chega-se a uma nova expressão para estes nós comuns a dois elementos, que embora estando em um contorno suave tornaram-se cantos artificiais devido à discretização e interpolação da geometria.

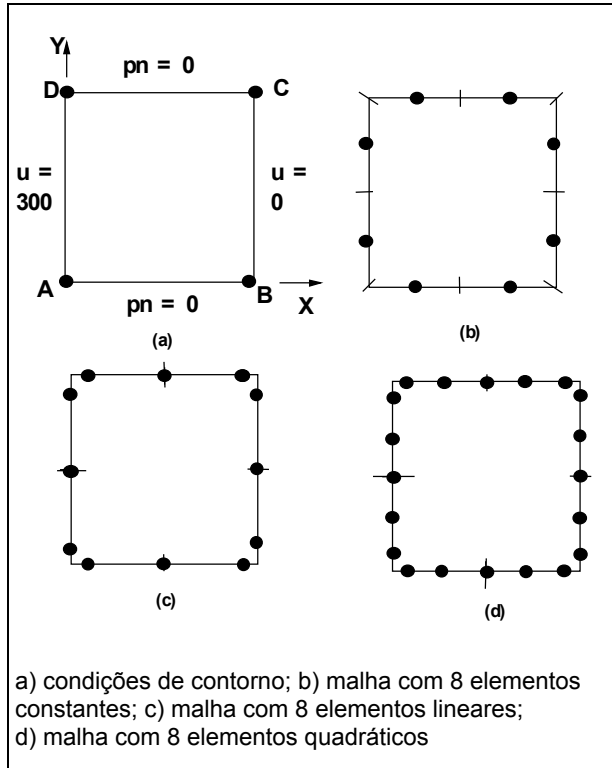
O procedimento de usar como direção das normais e tangentes nos pontos comuns aos elementos a direção da bissetriz é denominado método BH - MEC.

## APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Para considerar os dois valores da derivada normal, nos cantos reais, em vez de usar-se duas equações integrais para  $m = n_1$  e  $m = n_2$ , conforme descrito no item “Existência das soluções”, optou-se pelo uso do procedimento no qual o nó funcional correspondente ao nó geométrico de canto é deslocado para o interior do elemento (elemento semi-descontínuo). Os elementos intermediários não possuem pontos deslocados (elemento contínuo). Foi criado um elemento com as duas extremidades deslocadas para o interior (elemento descontínuo). Este elemento descontínuo não possui nenhum ponto comum a dois elementos e fica livre das dificuldades criadas pelos cantos artificiais.

### Escoamento através de uma região quadrada (Exemplo 1)

Este exemplo foi apresentado por Brebbia (1978) usando a formulação clássica para um problema de escoamento de calor, mas que pode ser visto como um problema de percolação somente ajustando as unidades dos valores. Os resultados



**Figura 1. Problema unidimensional.**

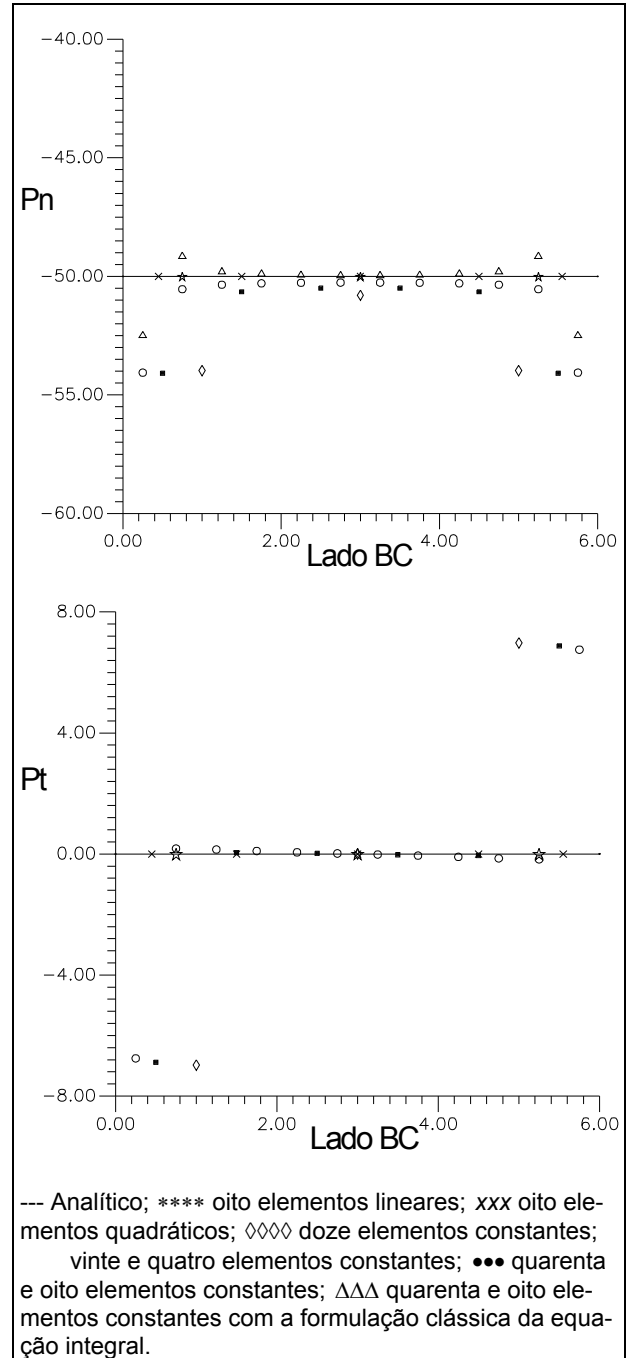
dessa formulação são repetidos aqui para comparação com a formulação hiper-singular.

Neste exemplo, mostrado na Figura 1, a geometria é composta de trechos retos, o que elimina a existência de cantos artificiais. Além disto,  $u(x)$  é constante nos lados DA e BC e varia linearmente com  $x$  nos lados AB e CD;  $p_n(x)$  é constante em todos os lados o que torna menores as exigências na formulação.

Trata-se de um problema de percolação unidimensional em regime permanente, que se passa em uma região quadrada de lado de 6 unidades de comprimento, com condições de contorno e os tipos de malha mostrados na Figura 1.

Neste caso, a geometria é exatamente representada de maneira exata mesmo quando apenas um elemento é usado para discretizar cada lado.

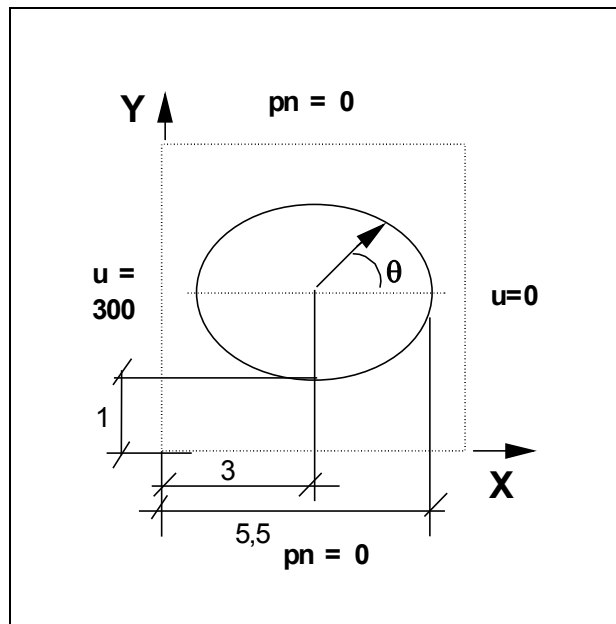
A solução numérica converge para a solução exata  $u(x) = 300(1-(x/6))$ , mesmo com a malha mais simples usando-se elementos lineares ou elementos quadráticos. Entretanto, quando se usam elementos constantes, a solução não converge na vizinhança dos cantos, por mais fina que seja a malha. Este comportamento é mostrado na Figura 2, onde se mostram os resultados para  $p_n(x)$  e  $p_t(x)$  ao longo do lado BC. Este mesmo comportamento ocorre na formulação clássica (como pode ser visto na figura) e se deve à impossibilidade do elemento constante satisfazer a condição de



**Figura 2. Resultados para  $p_n$  e  $p_t$  ao longo do lado BC do Exemplo 1 mostrado na Figura 1.**

continuidade do gradiente. No canto C, por exemplo, a derivada normal ao longo do lado BC é igual a -50 e pode ser exatamente representada por um elemento constante; a continuidade do gradiente em C exigiria, então, que a derivada tangencial no elemento do lado CD fosse igual a 50 (já que o fluxo normal nesse elemento é nulo). Esta derivada, entretanto, é nula devido à hipótese de  $u(x)$  constante em todo este elemento.

## Escoamento através de uma região elíptica (Exemplo 2)



**Figura 3. Escoamento através de uma região elíptica.**

Neste exemplo, foi inserido um contorno curvo no campo do primeiro exemplo, representado por uma elipse que é uma curva fechada com variações de curvatura. A equação da elipse escolhida é:

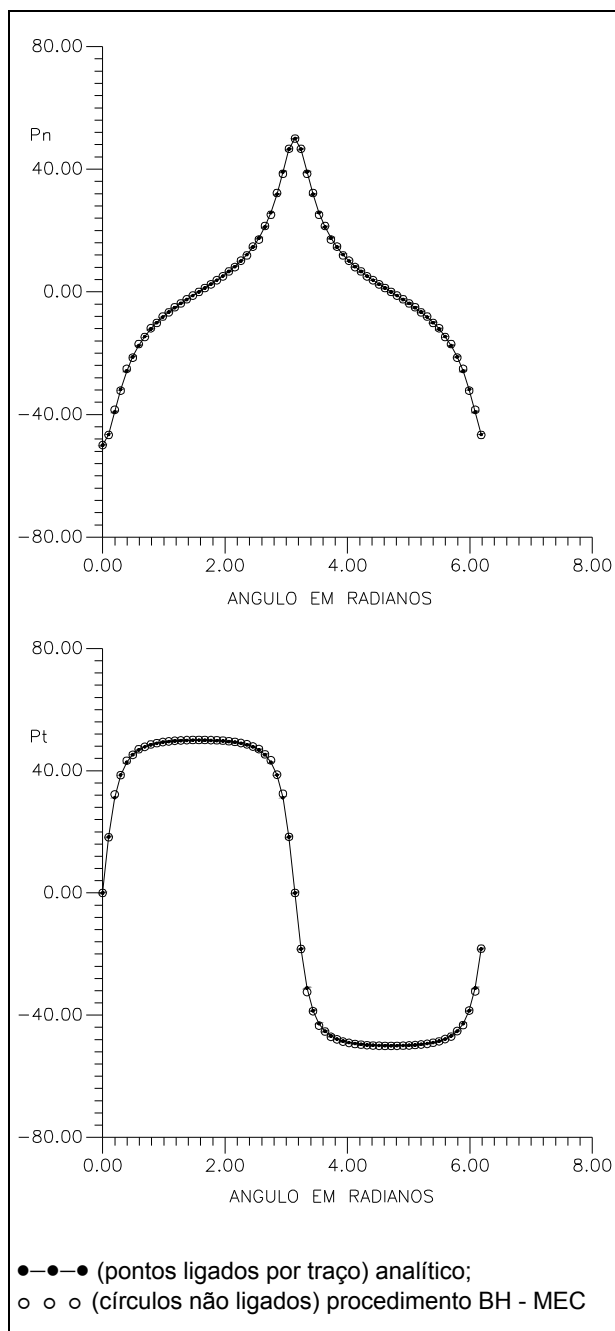
$$\frac{(x-3)^2}{2} + (y-3)^2 = 1$$

A solução analítica de  $p_n$  e  $p_t$  é obtida calculando-se a tangente à elipse  $\tan \alpha = \frac{dy}{dx}$  e, tendo-se o ângulo  $\alpha$ , obtém-se  $p_n = 50 \sin \alpha$  e  $p_t = -50 \cos \alpha$ .

Para discretizar a elipse tomou-se o ângulo  $\theta$ , da representação em coordenadas polares, dividindo-se a volta completa,  $2\pi$ , em 64 partes. Usando-se o raio da representação polar calculam-se as coordenadas  $x$  e  $y$  correspondentes a cada  $1/64$  da volta completa. Fazendo-se desta maneira os arcos não são exatamente iguais nem os nós do meio estão bem centrados.

Os resultados obtidos para as derivadas normal e tangencial, usando-se o método BH-MEC, são mostrados na Figura 4.

Mesmo não usando elementos iguais nem o nó intermediário bem centrado os resultados para



**Figura 4. Distribuição de  $p_n$  e  $p_t$  ao longo da fronteira da elipse: formada por 64 elementos.**

esta elipse, em que a relação dos eixos é de 2:1, coincidem com os analíticos e as grandes variações de curvatura, próximas aos extremos do eixo maior da elipse, não perturbam demasiadamente os resultados. Identificam somente que as grandes variações de  $p_t$  em certos trechos ficariam melhor representadas com uma malha mais refinada pois conduziria a uma redução na diferença entre a normal à geometria real e a normal usada no processo BH-MEC.

### Campos de velocidade na superfície de ondas (Exemplo 3)

Neste exemplo mostra-se que pode-se usar a formulação hiper-singular a fim de obter os campos de velocidade necessários para programas que modelam a propagação de ondas gravitacionais de grande amplitude. Define-se  $a$  = amplitude,  $d$  = profundidade,  $\omega$  = frequência angular,  $g$  = aceleração da gravidade,  $t$  = tempo,  $\lambda$  = comprimento da onda,  $\zeta$  = altura da onda, e  $k = 2\pi/\lambda$  = número da onda. São usadas variáveis adimensionais fazendo-se  $\lambda$  a unidade de comprimento e  $g$  a unidade de aceleração. A superfície livre da onda é indicada com a sigla SL, a lateral direita com a letra D, a esquerda com a letra E, e o fundo com a letra F.

Este teste fornece o campo de velocidades para uma onda com a elevação e potencial de uma onda de Airy correspondentes a águas profundas, só que aplicados a uma profundidade da ordem de duas vezes a amplitude.

As equações do potencial e da superfície livre são as seguintes:

$$\phi = \frac{a \cosh k(z+d)}{\omega \cosh(kd)} \sin(kx - \omega t) \quad \zeta = a \cos(kx - \omega t)$$

Para este estudo foram adotados os seguintes valores no tempo inicial ( $t = 0$ ) da simulação mostrada em Azevedo (1991) e Jaime (1995):

$$a = 0,0667 \quad d = 0,1333$$

As condições de contorno são:

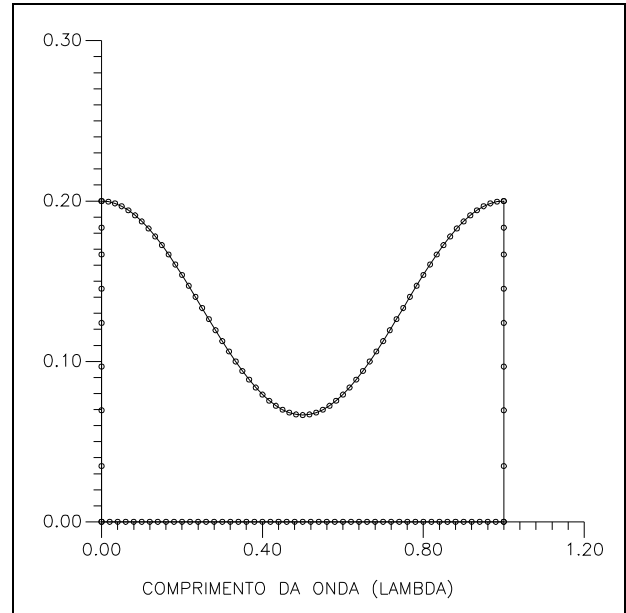
$$\text{em } \Gamma_F : \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

$$\text{em } \Gamma_D : \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

$$\text{em } \Gamma_{SL} : \quad u(x) = 0,0006413 \sin(2\pi x)$$

$$\text{em } \Gamma_E : \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

O fundo foi dividido em 25 elementos quadráticos (51 nós), a superfície livre foi dividida em 30 elementos (61 nós) e as laterais foram divididas em 4 elementos (9 nós). Esta discretização é representada na Figura 5, tendo no eixo horizontal o comprimento da onda e no vertical a profundidade.



**Figura 5. Representação da onda que quebra no instante  $t = 0$ .**

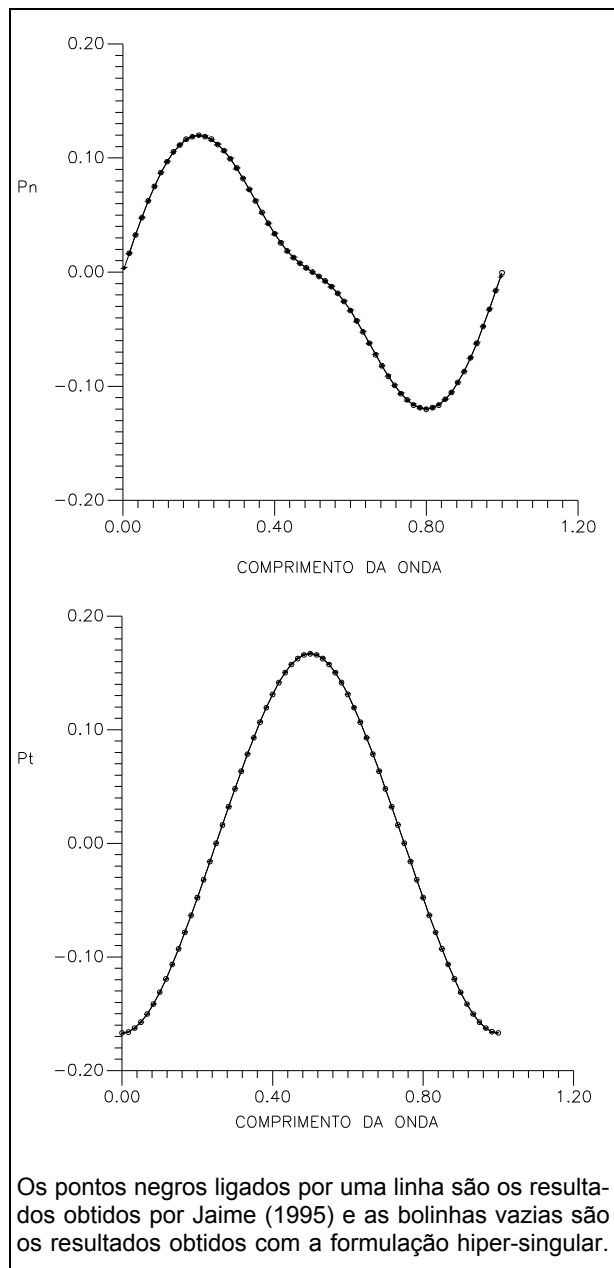
Os resultados para o campo de velocidades na superfície livre em  $t = 0$  foram comparados com os obtidos por Jaime (1995), no qual foi utilizada a formulação clássica para obter as velocidades normais e diferenças finitas para obter as velocidades tangenciais.

Os resultados obtidos usando BH - MEC são mostrados nos gráficos da Figura 6.

Os resultados apresentados na Figura 6 identificam uma excelente coincidência dos campos obtidos por Jaime e pela formulação hiper-singular.

### CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentada uma nova formulação hiper-singular do método dos elementos do contorno. Foram discutidas, brevemente, as condições necessárias e suficientes para a existência de soluções e foi demonstrado, através de uma aplicação, que o modelo numérico tem que ser capaz de atender tais condições, sob pena dos resultados serem muito pobres e não convergirem em algumas regiões vizinhas a cantos. A seguir foram apresentados exemplos com discretizações capazes de atender aos quesitos necessários para a existência de soluções, ficando evidente neste caso a robustez da formulação, principalmente quando o procedimento denominado BH - MEC foi seguido.



**Figura 6. Derivadas normais e tangenciais do potencial de velocidades.**

## REFERÊNCIAS

- AZEVEDO, J. P. S. (1991). "Application of the Boundary Element Method to Two-Dimensional Nonlinear Gravity Wave Problems", Ph. D. Thesis, Computational Mechanics Institute, Wessex Institute of Technology, Southampton.
- BÉZINE, G. (1978). "Boundary Integral Formulation for Plate Flexure with Arbitrary Boundary Conditions", *Mechanics Research Communications*, 5 (4): 197-206.
- BREBBIA, C. A. (1978). "Boundary Element Method for Engineers", Pentech Press, London Plymouth.
- FLEURY JR., P. (1996). "Formulação Hiper-Singular do Método dos Elementos de Contorno Visando a Simulação da Propagação de Ondas Gravitacionais", Tese de Doutorado, COPPE.
- GUIMARÃES, S. & TELLES, J. C. F. (1994). "On Hyper-singular Boundary Element Formulation for Fracture-Mechanics Applications", *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 13 353-363.
- INGLER, M. S. & RUDOLPHI, T. J. (1990). "Solution of Potential Problems Using Combinations of Regular and Derivative Boundary Integral Equations", *Appl. Math. Modelling*, 14, 536-543.
- JAIME, P. R. (1995). "Novas Contribuições à Simulação de Ondas Gravitacionais de Grande Amplitude Pelo Método dos Elementos de Contorno", Tese de Mestrado, COPPE.
- MANSUR, W. J.; PRODANOFF, J. H. A. & AZEVEDO, J. P. S. (1995). "Método dos Elementos de Contorno em Recursos Hídricos", Cap. 1 de *Métodos Numéricos em Recursos Hídricos* 2, Editor: Silva, R. C. V., ABRH & RBE.
- STERN, M. (1979). "A General Boundary Integral Formulation for the Numerical Solution of Plate Bending Problems", *Int. J. Solids Structures*, 15: 769-782.
- TELLER, J. C. F. & PRADO, A. A. (1993). "Hyper-singular Formulation for 2-D Potential Problems", Chap. 6 of *Advanced Formulations in Boundary Element Methods*, Elsevier, London.



## **Obtaining Velocity Fields in Potential Flows by Means of a Hypersingular Formulation of the Method of Boundary Elements**

### **ABSTRACT**

*This study presents a new approach to calculate the velocities (normal and tangential components) in a potential flow adopting the Boundary Element Method BEM, with hypersingular formulation.*

*The hypersingular equation is established based on the directional derivative of the potential at an internal point of the domain. When this expression is applied to the boundary points, through a limits process, singularities appear.*

*Vectorial algebra is used in order to write the free terms of the integral equation independent of the co-ordinates system, rendering their calculation mainly geometrical.*

*The final expressions, in integral formulations and continuity conditions, are presented to calculate the normal and tangential velocity field of the boundary.*

*The theory developed is computationally implemented for constant, linear and quadratic elements.*

*Several simulation results to validate the technique are presented, in which the effect of discretizations can be observed when the conditions for their existence are not fulfilled or, conversely, when they are correctly fulfilled.*