

CRITÉRIOS DE FORMAÇÃO DE INSTABILIDADES EM CANAIS DE FORTE DECLIVIDADE PARA UMA REOLOGIA NÃO-NEWTONIANA

Geraldo de Freitas Maciel e Francisco Lledo

Departamento de Engenharia Civil – Dec/Feis/Unesp
Alameda Bahia, 550 - CEP 15385-000 São Paulo, SP

maciel@dec.feis.unesp.br

RESUMO

O objetivo desta comunicação científica é diagnosticar de maneira global e com vistas à aplicação em engenharia, instabilidades tipo “roll waves” em canal de forte declividade, com escoamento turbulento e propriedades reológicas não-newtonianas. Numa primeira parte, propomos um modelo matemático pautado nas equações “shallow water” com termo de Bingham (efeito de coesão). Numa segunda etapa, incluímos o termo difusivo no grupo “shallow water”. Para ambos os casos definimos os critérios de formação de “roll waves” com base em análises de estabilidade linear. Propomos, a seguir, um modelo numérico que utiliza esquemas do tipo Godunov-VanLeer, oriundo da teoria de sistemas hiperbólicos não-lineares. Impondo uma vazão constante a montante de um canal e perturbação infinitesimal sobre o escoamento supercrítico, “roll waves” descontínuos e estáveis são gerados a jusante. Para escoamentos de fluidos não-newtonianos, pudemos observar que o efeito de Bingham favorece o desenvolvimento de “roll waves”. Por fim, demonstramos matematicamente, que o efeito da viscosidade numérica oriunda do esquema numérico utilizado é cerca de 10 vezes superior a uma viscosidade física envolvida.

INTRODUÇÃO

Os escoamentos que se processam sobre fortes declividades podem desenvolver instabilidades. Entretanto o aspecto caótico presente na natureza destes fenômenos instáveis, parece tender, ao cabo de tempo finito, para um escoamento estacionário, mais estável, com o aparecimento de ondas longas periódicas em forma de ressalto hidráulico ou “bore waves”. Tais perturbações são denominadas de “roll waves”. Se por um lado, essas ondas são raras em escoamentos naturais, elas são frequentes em canais artificiais e vertedouros de barragens.

A proposta desta comunicação científica é estudar do ponto de vista teórico, com apreciação numérica, problemas de instabilidades no seio de escoamentos de fluidos com comportamento reológico tipo fluido de Bingham. Em particular tentar-se-á verificar a aptidão das equações “shallow water?”, combinadas à reologia “binghamiana” à geração e propagação de “roll waves” em “debris ou mudflows”. Numa 1ª etapa verificaremos analiticamente, as condições de existência de “roll waves” e critérios de formação, seja em fluidos newtonianos (água limpa), seja em fluidos não-newtonianos (caso de “debris flow”); para numa 2ª etapa gerar numericamente tais instabilidades. O sistema de equações usado é do tipo “Saint Venant” (Barre de Saint Venant, 1871) com e sem termos de difusão. A modelagem numérica proposta é do tipo volume finito onde os esquemas Godunov-VanLeer (VanLeer, 1981) (compatíveis com os sistemas hiperbólicos não-lineares) são aplicados.

MODELAÇÃO MATEMÁTICA VIA EQUAÇÕES “SHALLOW WATER” – FORMA CONSERVATIVA

As equações “shallow water” com choque aqui utilizadas são obtidas a partir das equações clássicas da mecânica dos fluidos às quais é adicionada uma lei de comportamento representativa de uma reologia de fluido de Bingham, tal como $\tau = \tau_c$

+ $\mu \left(\frac{du}{dy} \right)$ se $\tau > \tau_c$ e $\frac{du}{dy} = 0$ se $\tau < \tau_c$, onde τ_c representa a tensão crítica de cisalhamento ou rigidez inicial, μ a viscosidade dinâmica e $\frac{du}{dy}$ o

gradiente de velocidade. O sistema “shallow water” é constituído de uma equação da conservação da massa (1), uma equação da conservação da quantidade de movimento (2) e nesse caso duas relativas ao ressalto hidráulico (3) e (4):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha hu^2)}{\partial x} + gh \cos(\theta) \frac{\partial h}{\partial x} = gh \sin(\theta) - \frac{\tau_c}{\rho} - \frac{gu^2}{C^2} \quad (2)$$

$$\rho \cdot h \cdot (w - u) = \rho_0 \cdot h_0 \cdot w \quad (3)$$

$$\rho_0 \cdot h_0 \cdot w \cdot u = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot g \cdot h^2 \cdot \cos(\theta) - \tau_c \cdot h_0 \quad (4)$$

Nessas equações, h é a profundidade do escoamento; h_0 a profundidade do escoamento uniforme; u a velocidade média na vertical; w a velocidade de propagação da frente do escoamento (celeridade); C o coeficiente de Chézy; θ a declividade do canal; ρ a massa específica do fluido e α o coeficiente do perfil de velocidade ($\alpha = 1$, por simplificação).

CONDIÇÕES DE EXISTÊNCIA DE “ROLL WAVES” NA NOVA REOLOGIA DE FLUIDO DE BINGHAM, SEM TERMO VISCOSO

A proposta deste item é determinar as condições necessárias e suficientes para a geração de “roll waves” como solução das equações “shallow water” numa reologia de fluido de Bingham e sem o termo de difusão. Definamos, a princípio, as variáveis de interesse e, por conseguinte, as escalas de trabalho; a saber:

Escala de comprimento:

$$H = \frac{h}{h_0} \quad X = \frac{x \cdot \tan(\theta)}{h_0}$$

Escala de velocidades:

$$U = \frac{u}{\sqrt{gh_0 \cdot \cos(\theta)}} \quad W = \frac{w}{\sqrt{gh_0 \cdot \cos(\theta)}}$$

Escala de tempo:

$$T = \frac{t}{\frac{h_0}{\tan(\theta)} \frac{1}{\sqrt{gh_0 \cdot \cos(\theta)}}}$$

nas quais $\sqrt{gh_0 \cdot \cos(\theta)}$ é a velocidade de propagação das ondas gravitacionais. Introduzindo as variáveis adimensionais nas Equações (1) e (4), e desprezando as variações de massa específica, chegamos às seguintes equações:

$$\frac{\partial H}{\partial T} + \frac{\partial(HU)}{\partial X} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial U}{\partial T} + U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial H}{\partial X} = 1 - \frac{C^*}{H} - \beta \frac{U^2}{H} \quad (6)$$

$$H \cdot (W - U) = W \quad \text{e} \quad W \cdot U = \frac{1}{2} \cdot H^2 - C^* \quad (7)$$

$$\text{com } C^* = \frac{\tau_c}{\rho \cdot gh_0 \cdot \sin(\theta)} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{g}{C^2 \tan(\theta)}.$$

A determinação do critério de formação de “roll waves” requer, antes de tudo, uma solução para a equação da superfície livre. Primeiramente, reescrevemos as Equações (5) e (6) em um sistema móvel de coordenadas. Seja, por hipótese $\zeta = X - W \cdot T$ onde W representa a velocidade adimensional de propagação da frente do escoamento (celeridade). A partir dessas premissas, obtemos duas equações lineares a duas incógnitas (U' e H'). A resolução deste sistema fornecer  duas equações diferenciais com U' e H' , a saber:

$$H' = \frac{\partial H}{\partial \zeta} = - \frac{H \left(1 - \frac{C^*}{H} - \beta \frac{U^2}{H} \right)}{(U - W)^2 - H} \quad (8)$$

$$U' = \frac{\partial U}{\partial \zeta} = \frac{(U - W) \cdot \left(1 - \frac{C^*}{H} - \beta \frac{U^2}{H} \right)}{(U - W)^2 - H} \quad (9)$$

A relação entre (8) e (9) permite-nos verificar que a vazão específica   uma constante conforme se segue:

$$\frac{H'}{U'} = \frac{H}{W - U} \quad ; \quad H(W - U) = K = \text{constante} \quad (10a,b)$$

Se aplicarmos (10b) na expressão de H' (Equação 8), obteremos finalmente uma equação não linear de 1  ordem, conforme explicitado em (11):

$$\frac{\partial H}{\partial \zeta} = - \frac{H \left(1 - \frac{C^*}{H} - \beta \frac{(HW - K)^2}{H^3} \right)}{\left(\frac{K}{H} \right)^2 - H} \quad (11)$$

A resolução de (11) vai nos fornecer o perfil desejado da superfície livre. Verificamos, entretanto, que para esta equação não existe solução periódica. A proposta seria então tentarmos “construir” soluções periódicas a partir de soluções contínuas intercaladas por ressaltos hidráulicos. Para isto, precisamos encontrar soluções contínuas que apresentem a propriedade que, em uma determinada seção, o escoamento seja supercrítico e numa outra posterior, seja subcrítico. Por continuidade, deve existir um ponto de abscissa ζ_0 , de profundidade H_0 , e velocidade U_0 , onde o número de Froude seja igual a unidade (escoamento crítico). Exposto isto, tem-se que $W - U_0 = \sqrt{H_0}$. Para este ponto, em particular, o denominador da Equação (11) é nulo, o que significa uma descontinuidade, salvo para o caso em que o numerador também seja nulo. Este ponto crítico é necessariamente diferente daquele onde ocorre o ressalto, de maneira que só é possível construir “roll waves” dando o numerador e o denominador se anulam concomitantemente. Assim, tem-se:

$$H_0 = \left(\frac{-\beta W + \sqrt{C^* \cdot (1-\beta) + \beta W^2}}{1-\beta} \right)^2$$

$$U_0 = \frac{W - \sqrt{C^* \cdot (1-\beta) + \beta W^2}}{1-\beta}$$

$$K = (W - U_0) \cdot H_0 = (H_0)^{(3/2)}$$

Substituindo (10b) em (11), e após alguns desenvolvimentos matemáticos, temos a equação diferencial para a superfície livre no intervalo contínuo, a saber:

$$\frac{\partial H}{\partial \zeta} = \frac{H^2 + H(H_0 - C^* - W^2\beta) + \beta H_0^2}{(H_0^2 + HH_0 + H^2)} \quad (12)$$

Enfim, para gerarmos “roll waves”, a partir da Equação (12), é necessário que $\frac{\partial H}{\partial \zeta} \big|_{H=H_0} > 0$, o que implica em:

$$2\beta \frac{1 - \sqrt{\beta + \frac{C^* \cdot (1-\beta)}{W^2}}}{-\beta + \sqrt{\beta + \frac{C^* \cdot (1-\beta)}{W^2}}} < 1 \quad (13)$$

Discussão dos resultados teóricos

A Inequação (13) define um domínio para o qual podem-se formar “roll waves”. Tais resultados são ilustrados na Figura 1. Observa-se que para um acréscimo do termo de Bingham (coesão do material ou da tensão crítica τ_c), “roll waves” podem se desenvolver mais facilmente, ou seja, o aumento deste parâmetro favorecerá o desenvolvimento dessas perturbações. Essa conclusão está de acordo, por exemplo, com as observações experimentais de Takahashi (1990), que gera “roll waves” no laboratório para números de Froude < 2 . Se a coesão do fluido C^* for nula, a desigualdade

(16) é dada por: $\beta < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \tan(\theta) > \frac{4g}{C^2}$, o que está

de acordo com Dressler (1949) - geração de “roll waves” em “água limpa”.

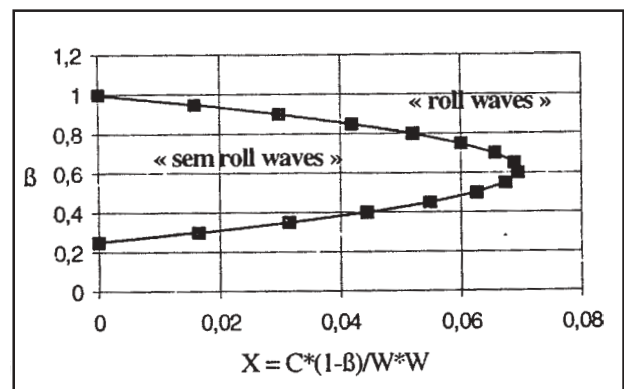


Figura 1. Domínio de existência de “roll waves”.

CRITÉRIO, DE GERAÇÃO DE “ROLL WAVES” COM BASE NA ANÁLISE DE ESTABILIDADE LINEAR, NA NOVA REOLOGIA BINGHAMIANA E COM INCLUSÃO DO TERMO VISCOSO

A proposta desse parágrafo é colocar em evidência os critérios de formação de “roll waves” com base na análise de estabilidade linear. Para tanto recorrer-se-á novamente ao sistema “shallow water” (Equações 1 e 2). Acrescentando-se à Equação (2), ao longo da corrente, o termo difusivo $\frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right)$, na qual ν representa a viscosidade cinemática média; a equação da quantidade de movimento toma a seguinte forma:

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha hu^2)}{\partial x} + gh \cos(\theta) \frac{\partial h}{\partial x} = gh \sin(\theta) - \frac{\tau_c}{\rho} - \frac{gu^2}{C^2} + \frac{\partial}{\partial x} (hu \frac{\partial u}{\partial x}) \quad (14)$$

O segundo membro da Equação (14) leva, portanto, em consideração quatro efeitos, a saber: o efeito da força peso, representada pela gravidade, o cisalhamento devido à modelação do fluido de Bingham, o efeito da dissipação turbulenta via coeficiente de Chézy e por fim, a dissipação viscosa representada pelo termo em v , adaptado ao grupo “shallow water”. Os parâmetros que poderão eventualmente colocar em evidência as prováveis instabilidades no seio do escoamento, passam obrigatoriamente por um processo de adimensionalização do sistema. Tomando o escoamento uniforme como base no processo de adimensionalização, e aplicando as escalas características, tais como: $x = L \cdot x'$, $h = h_n \cdot h'$ para comprimentos, $u = u_n \cdot u'$, para velocidades e $C^* = \frac{\tau_c}{\rho g h_n \sin(\theta)}$

para as tensões, onde L representa o comprimento de onda e n um índice que caracteriza a propriedade do regime normal ou uniforme, obtém-se (omitindo-se o carácter ‘):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} - (\alpha - 1) \frac{u}{h} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{F^2} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\tan(\theta)}{\varepsilon F^2} \left((1 - C^*) \frac{u^2}{H} \right) + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{h} \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (16)$$

$$\text{com: } F = \frac{u_n}{\sqrt{g h_n \cos(\theta)}}; Re = \frac{u_n L}{v} \text{ e } \varepsilon = \frac{h_n}{L}$$

Passando ao estudo da estabilidade linear, admite-se que as alturas e velocidades sejam submetidas a pequenas perturbações, tais como:

$\hat{u} = 1 + u$ com $u \ll 1$ e $\hat{h} = 1 + h$ com $h \ll 1$. Introduzindo a Equação (15) em (16) e desprezando os termos de segunda ordem, obtém-se o sistema de equações das quantidades perturbadas h e u . Por fim, omitindo-se a notação $(\hat{})$, chegamos a:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} = \quad (17)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha (1 + u) \frac{\partial u}{\partial x} - (\alpha - 1) \frac{(1 + u)}{(1 + h)} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{F^2} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\tan(\theta)}{\varepsilon F^2} \left(1 - \frac{C}{(1 + h)} \right) + (1 - C^*) \frac{(1 + 2u)}{1 + h} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{(1 + h)} \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (18)$$

A Equação (17) pode ser inserida em (18), o que nos possibilita eliminar u e chegar a uma equação que leva apenas em consideração a variável h , a saber:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + 2 \alpha v \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} + \left(\alpha - \frac{1}{F^2} \right) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^3 h}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) - \left(\frac{\tan(\theta)}{\varepsilon F^2} \right) \left(C^* \frac{\partial h}{\partial x} - (1 - C^*) \left(-2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right) \quad (19)$$

Em posse da Equação (19), passa-se a pesquisar os critérios de desenvolvimento de instabilidades de número de onda k e de frequência w . As soluções da forma $h(x, t) = H(k) \cdot e^{(ikx - wt)}$ onde $w = w_r + i \cdot w_i$, são interessantes de se obter, observando que $w_r \geq 0$ a fim de garantir estabilidade. Introduzindo $h(x, t)$ na Equação (19), obtém-se uma equação de ordem 2 com coeficientes complexos. A partir daí, separa-se a parte real e imaginária, criando portanto duas outras equações (uma para w_r e outra para w_i) que nos permite obter o polinômio $P(w_r)$ tendo como única incógnita w_r . Nesse ponto, nos interessa discutir sobre a existência e a natureza dos sinais das raízes de $P(w_r)$. É sabido que só haverá estabilidade se as raízes de $P(w_r)$ são positivas ou nulas. Após alguns desenvolvimentos matemáticos demonstramos que $P(w_r)$ é uma função estritamente monótona decrescente no intervalo $]-\infty; 0]$; de onde conclui-se que a condição necessária e suficiente para que as raízes de $P(w_r)$ sejam positivas é que $P(0)$ seja positivo ($P(0) > 0$). Após alguns desenvolvimentos matemáticos, chegamos ao número de Froude crítico F_c dado por:

$$F_c = \frac{1}{\left[\frac{1}{2 \cdot (1 - C^*) + \frac{k^2 \cdot \sigma}{Re}} - (\alpha - 1) \right]^{2 - \alpha(\alpha - 1)}} \quad (20)$$

$$\alpha = \frac{9}{15} \cdot \frac{(8 + 7 \cdot \frac{h_p}{h_n})}{(2 + \frac{h_p}{h_n})^2}$$

$$h_p = \frac{\tau_c}{\rho g \sin(\theta)} \left(\frac{h_p}{\text{altura do "plug" }} \right) \quad \sigma = \frac{\tau_c F^2}{\tan(\theta)}$$

Discussão dos resultados teóricos, com difusão

A partir dos resultados obtidos anteriormente, podemos começar a ilustrar alguns norteadores de critérios de formação e desenvolvimento de "roll waves" em função dos parâmetros físicos envolvidos. As figuras que se seguem mostram a influência do número de Reynolds Re e do número de onda k em função do número de Froude crítico F_c para vários valores da coesão C^* (efeito de Bingham). A Figura 2 mostra a influência do número de ondas (comprimento de ondas) sobre o Froude crítico para dois parâmetros

fixos, quais sejam $\zeta = \frac{\sigma}{Re} = 0.05$ e $\alpha = 1.00$.

Pode-se deduzir a partir Figura 2 que "roll waves" tendem a se desenvolver mais facilmente ou mais rapidamente para um cenário de pequenos números de onda e valores elevados da tensão crítica de Bingham (efeito da coesão). Afimar-se-ia por um lado que um aumento no valor da coesão levaria ou favoreceria o aparecimento de instabilidades tipo "roll waves" e, por outro lado, que ondas longas seriam as primeiras a se desestabilizar.

A Figura 3 mostra a influência da rigidez adimensional C^* sobre o número de Froude como função do número de Reynolds Re . Pode-se observar que, da mesma maneira que no resultado ilustrado na Figura 2, um aumento na coesão do fluido proporcionaria o aparecimento precoce de "roll waves", para Froude e Reynolds fixados.

TESTES DE VALIDAÇÃO – RESULTADOS NUMÉRICOS

O objetivo desse parágrafo é apresentar alguns resultados de ordem numérica quando da

geração de "roll waves" em fluidos newtonianos e não-newtonianos. O programa de simulação desenvolvido teve sua formulação teórica assentada na teoria de sistemas não-lineares hiperbólicos e suas decorrências, notadamente a resolução dos problemas de Riemman (Vila, 1986). As simulações numéricas foram executadas a partir de esquemas numéricos de VanLeer (2ª ordem no tempo e no espaço) e efetuadas em canal de seção retangular de 1000 m de comprimento (com incremento de espaço $\Delta x = 1,00$ m) e declividade significativa, da ordem de 30%. Trabalhando com regimes de escoamento preferencialmente turbulentos e supercríticos, duas condições limites a montante puderam ser fixadas, a saber: vazão de 800 l/s/m e lâmina d'água de 0.15 m. Sobre essa vazão, pequenas perturbações (da ordem do por cento) foram impostas, de maneira a gerar "roll waves" estáveis a jusante do canal, como ilustram os diagramas a seguir.

Uma primeira série de testes foi realizada, o que nos permitiu uma apreciação mais global do fenômeno em questão, sobretudo no que diz respeito às condições iniciais da perturbação imposta, conforme descrito a seguir:

- uma perturbação a montante sobre a vazão, do tipo senoidal, mostrou-se "capaz de gerar "roll waves" bem definidos (Figura 4);
- uma perturbação aleatória não conseguiu gerar "roll waves" bem definidas, ou seja, com uma frequência preferencial marcada, entretanto gerou uma superfície livre pulsante e com aspectos caóticos, como demonstra a Figura 5.

No que diz respeito à amplitude da perturbação imposta (caso senoidal), os resultados mostram que:

- para uma dada frequência, a amplitude da perturbação não deve influenciar sobre a amplitude da "roll wave" gerada;
- entretanto, uma maior ou menor amplitude da perturbação deverá antecipar ou retardar o aparecimento da "roll wave", como se perturbasse mais ou menos o escoamento base, sem, no entanto, alterar a amplitude da "roll wave" gerada (ver Figuras 6 e 7).

Quanto ao comprimento de onda da perturbação imposta, os ensaios numéricos mostram que a "roll wave" gerada possui o mesmo comprimento. Uma pequena perturbação de $T = 3,14$ s gerou uma "roll wave" de mesmo período (com respectivo comprimento de onda de 25 m). A Figura 8 ilustra esse resultado.

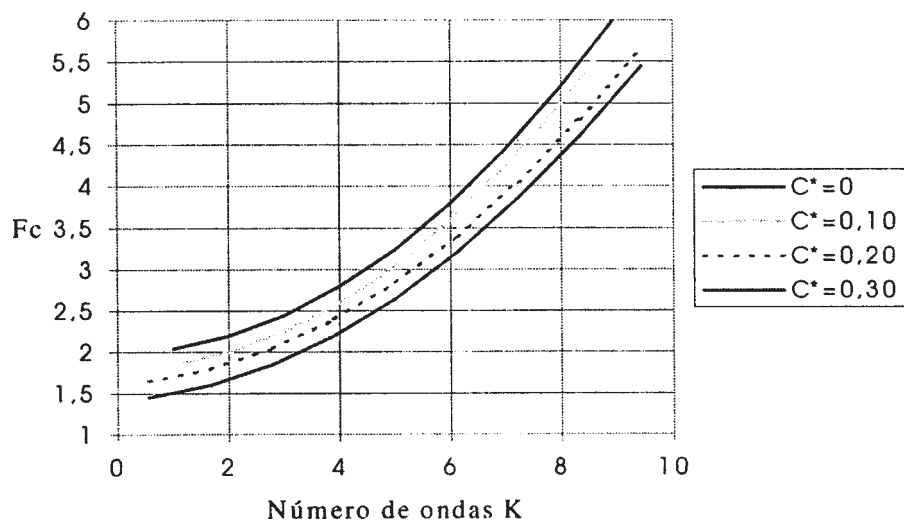


Figura 2. Froude crítico em função do número de ondas k .

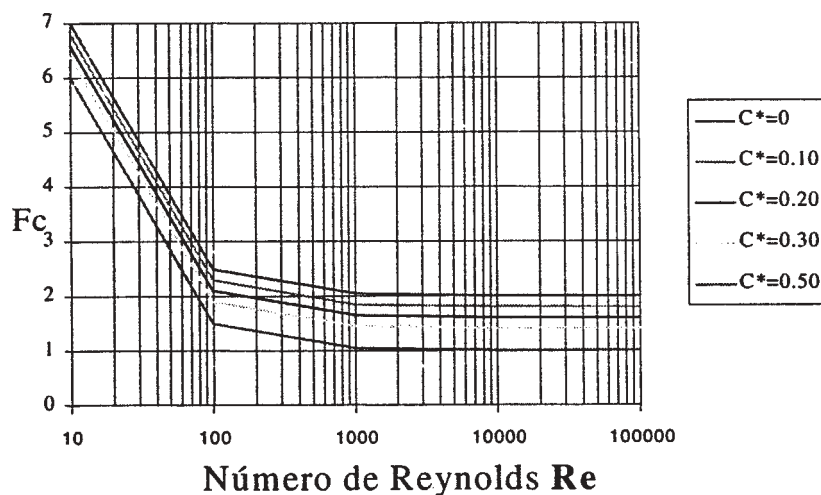


Figura 3. Froude crítico em função do Número de Reynolds.

Uma segunda série de testes foi realizada, levando em conta a nova reologia e sua implicação sobre a geração e características das ondas produzidas. Vários testes foram executados, o que nos permitiu estabelecer uma fronteira ou domínio de formação de "roll waves", em função dos parâmetros em jogo, quais sejam: β que leva em consideração a

declividade do canal e sua resistência; tensão de Bingham X (função da coesão C^* do fluido, e de

$$\beta = \frac{g}{C^2 \tan \theta}; \text{ assim como da celeridade da onda}$$

W). Ver Figura 9.

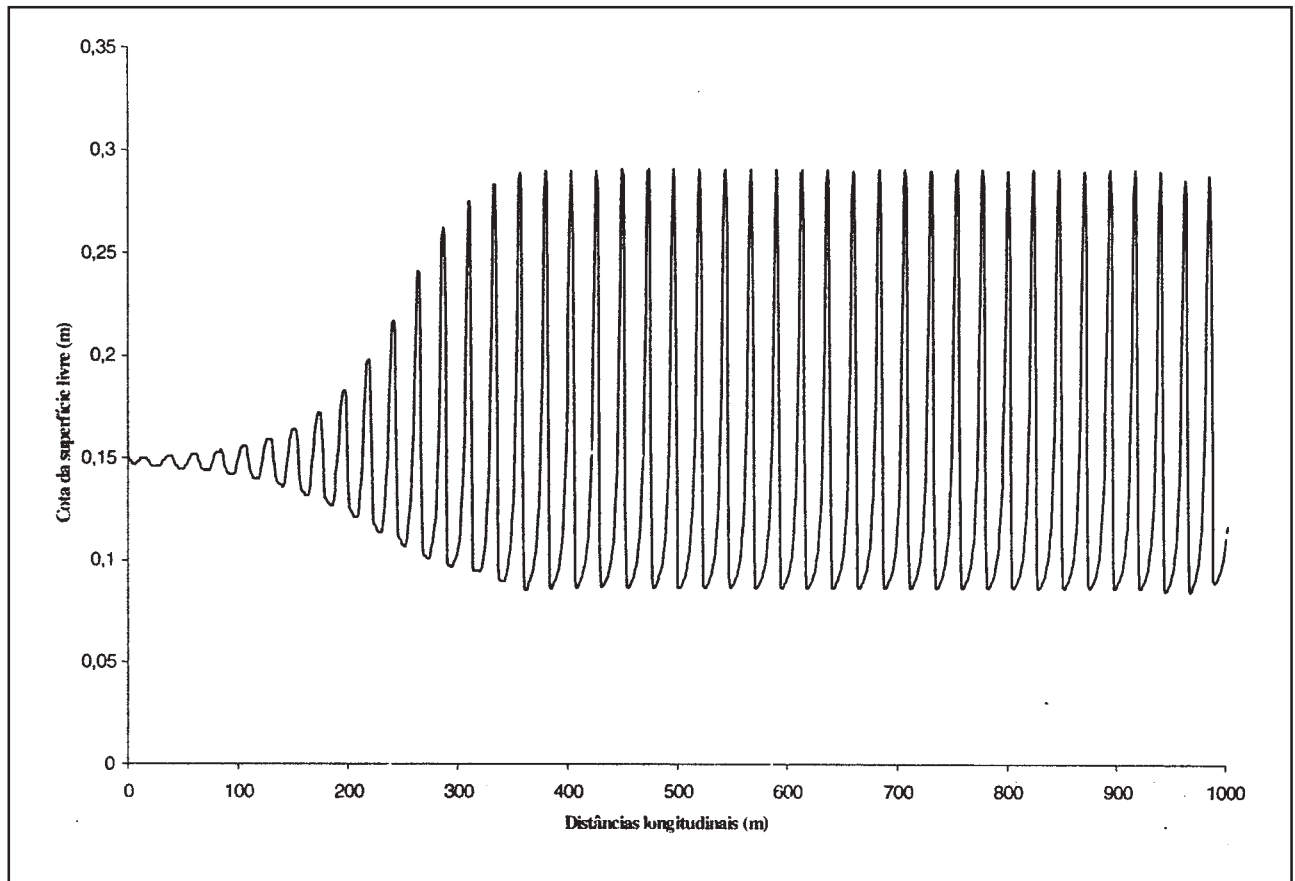


Figura 4. "Roll waves" gerados a partir de perturbação senoidal de $T = 3,14$ s ($C^* = 0$) (1% da vazão).

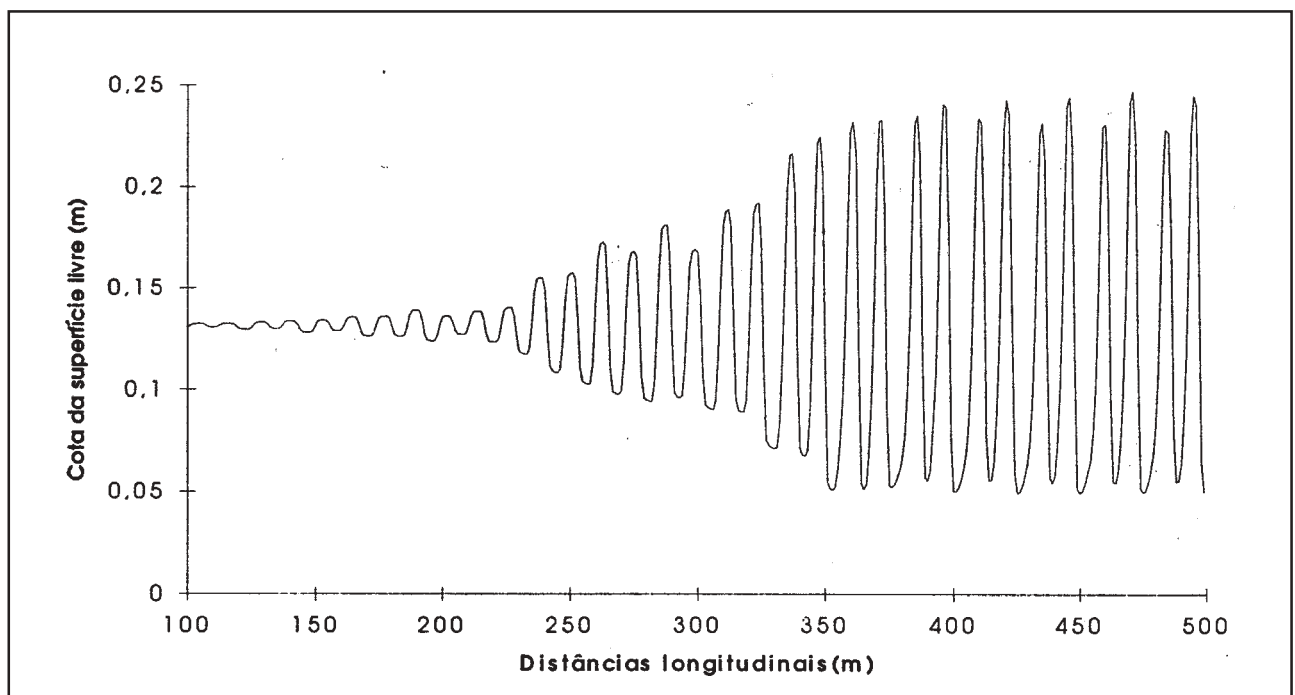


Figura 5. Superfície pulsante a partir de perturbação aleatória.

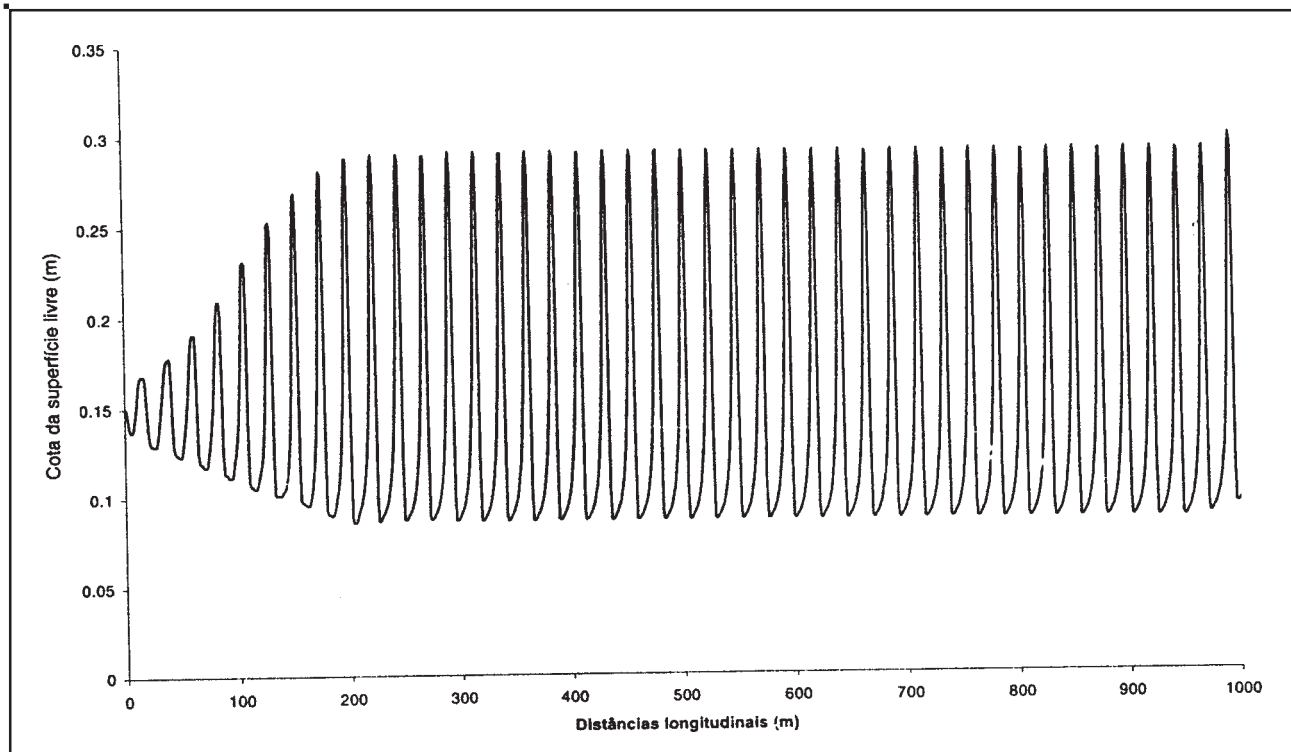


Figura 6. "Roll waves" geradas a partir de perturbação de 10% da vazão ($C^* = 0$).

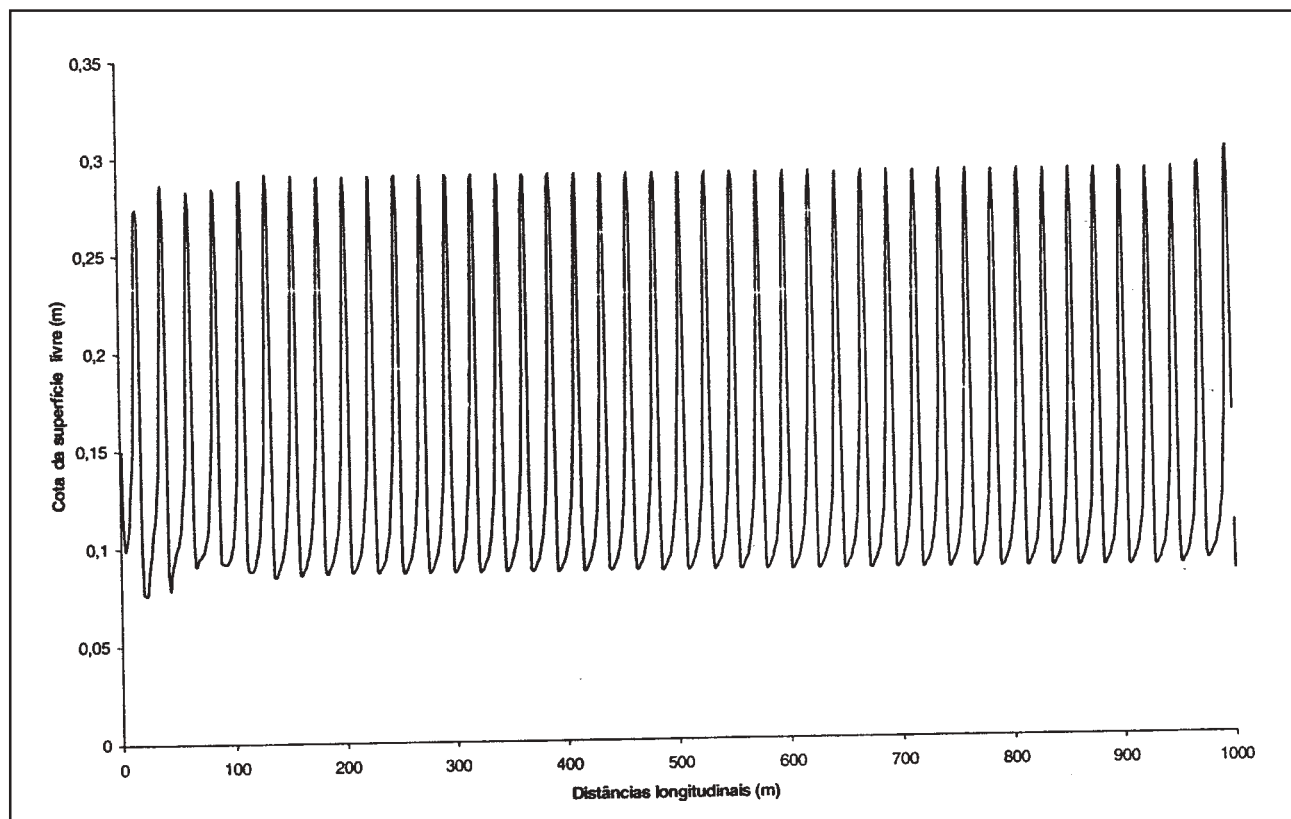


Figura 7. "Roll waves" geradas a partir de perturbação de 50% da vazão ($C^* = 0$).

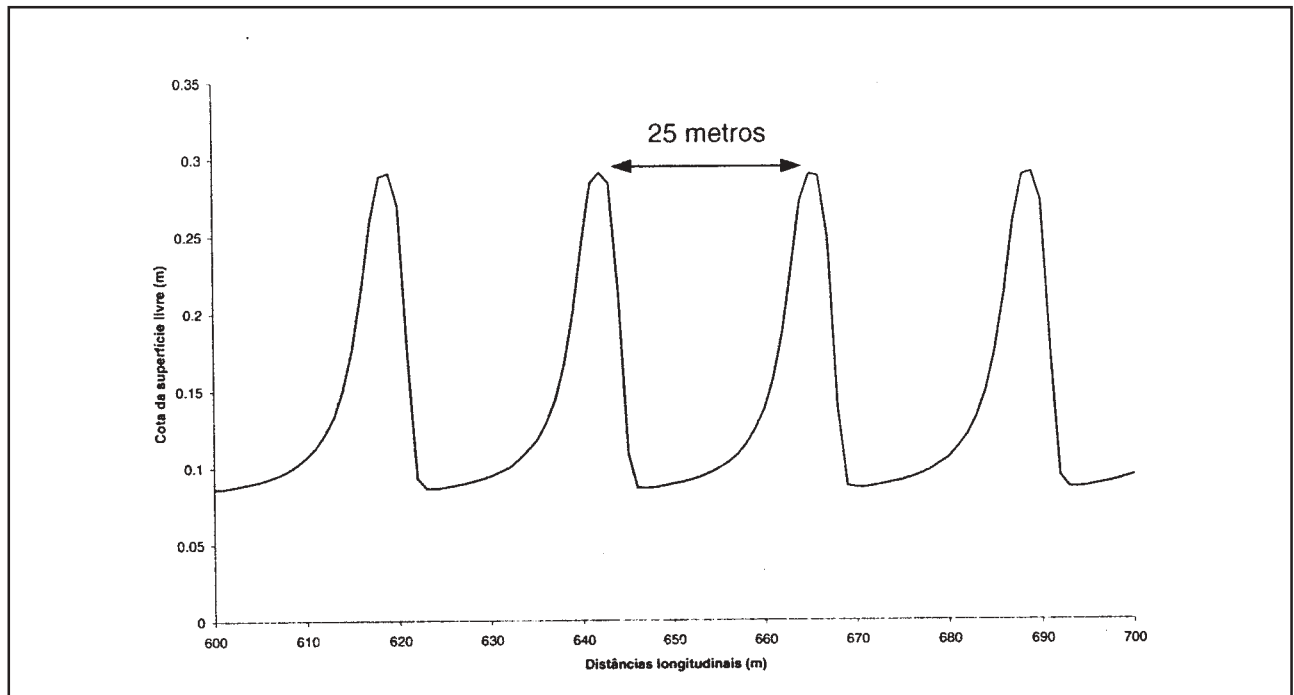


Figura 8. Detalhe da “roll wave” ilustrada na Figura 6.

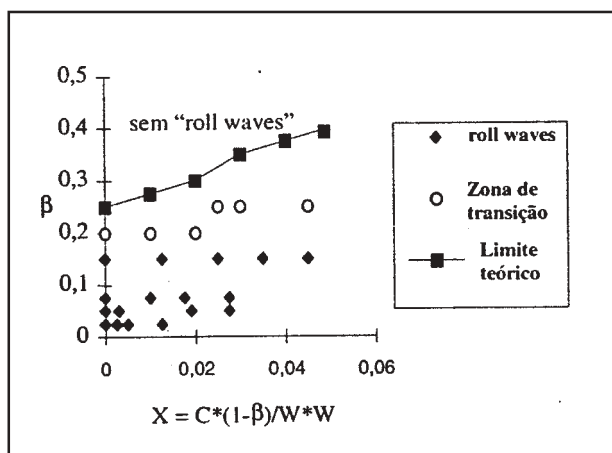


Figura 9. Domínios de geração de “roll waves” em função da declividade do canal e de Bingham.

Para esse caso pudemos constatar que para β constante, o efeito da tensão de Bingham parece não influenciar de maneira significativa sobre o período ou comprimento de onda, reafirmando assim as mesmas conclusões que para um fluido newtoniano. Em contrapartida quando levamos em consideração o efeito coesivo (C^*), para uma dada amplitude da perturbação, as “roll waves” aparecem mais cedo e apresentam maiores alturas. As Figuras 10 e 11 ilustram esses resultados.

Uma terceira série de testes consistiu em verificar a sensibilidade de nosso sistema não-linear quando submetido a pequenas perturbações simultâneas e de frequências e amplitude distintas da forma $h(x, t) = H_0 \exp(Kx - w(t).t)$, onde k é o número de ondas e $w(t)$ as frequências. O diagrama a seguir ilustra alguns resultados para diversas configurações: Figuras 12 e 13 (para fluidos newtonianos) e Figuras 14 e 15 (fluidos não-newtonianos).

A partir desses resultados, cabe comentar:

- a amplitude da perturbação não intervém sobre a amplitude da “roll wave” gerada;
- a “roll wave” gerada a jusante apresenta o período ou comprimento de onda referente ao maior comprimento de onda das perturbações distintas impostas a montante, depois de passar e capturar outras frequências (menores comprimentos de onda). Outra análise aqui cabível e que comprova tal resultado vem do fato que ondas longas (grandes comprimentos de onda) são quase sempre as primeiras a se desestabilizarem, conforme ilustrado pela Figura 2;
- para a nova reologia binghamiana, constatamos com base nas Figuras 10 e 11 que as tendências são as mesmas apontadas quando do fluido newtoniano, ou seja, as “roll waves” aparecem mais cedo e com alturas maiores.

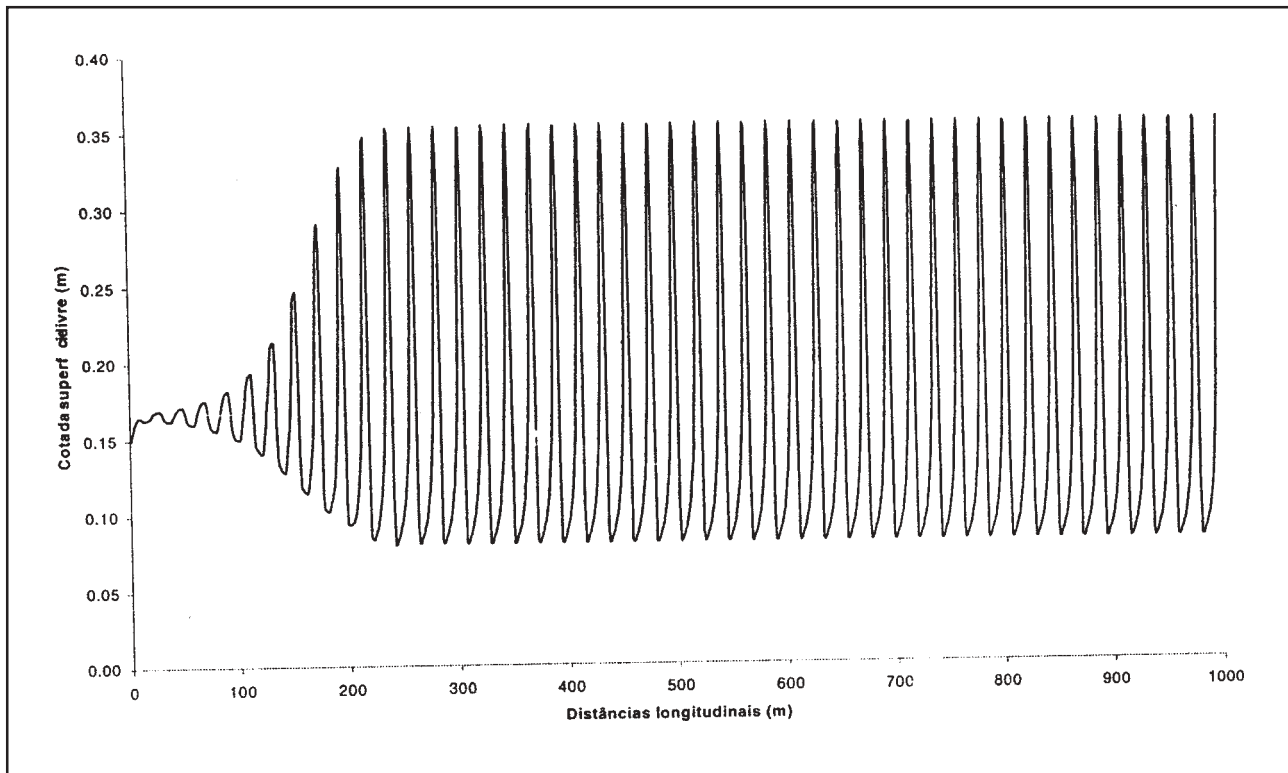


Figura 10. “Roll waves” com T perturbação = 3,14 s ($C^* = 0.10$).

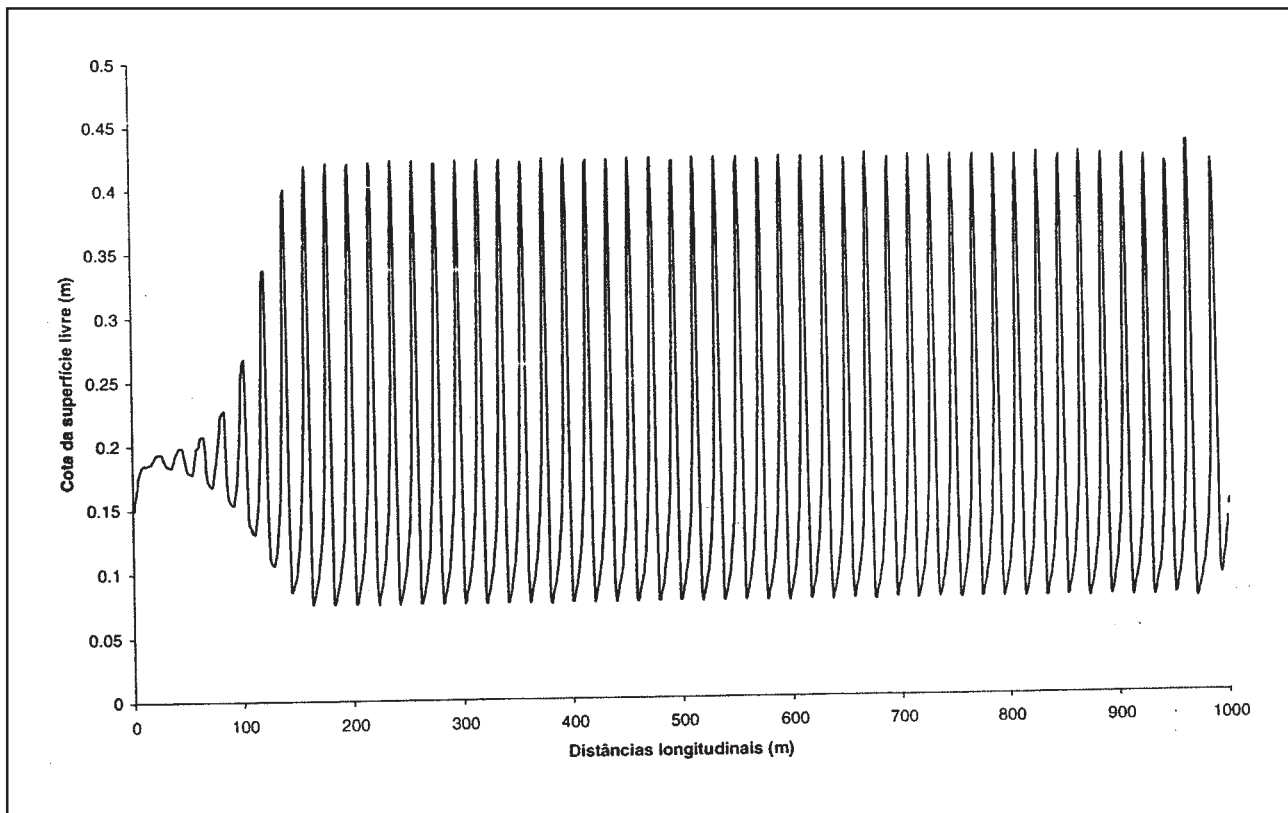


Figura 11. “Roll waves” com T perturbação = 3,14 s ($C^* = 0.20$).

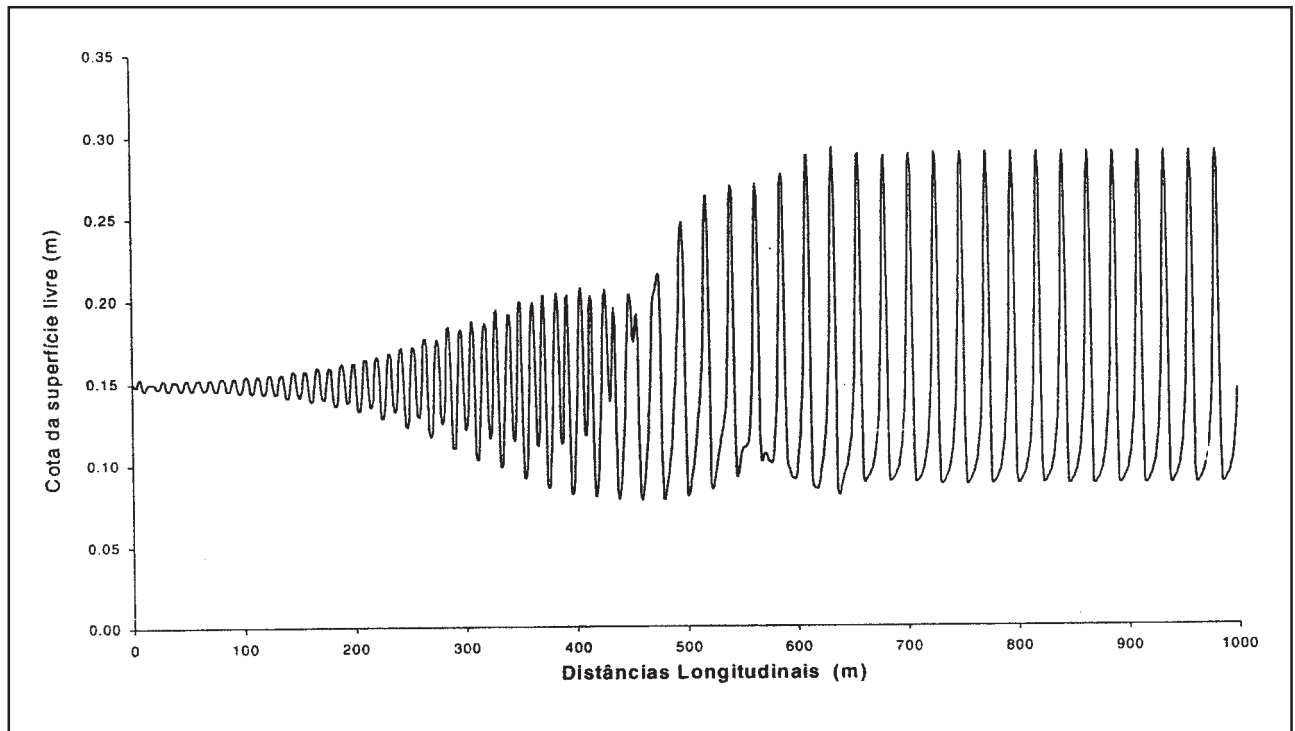


Figura 12. “Roll waves” com T perturbação = 3,14 s e 1,56 s e amplitudes distintas ($C^* = 0$).

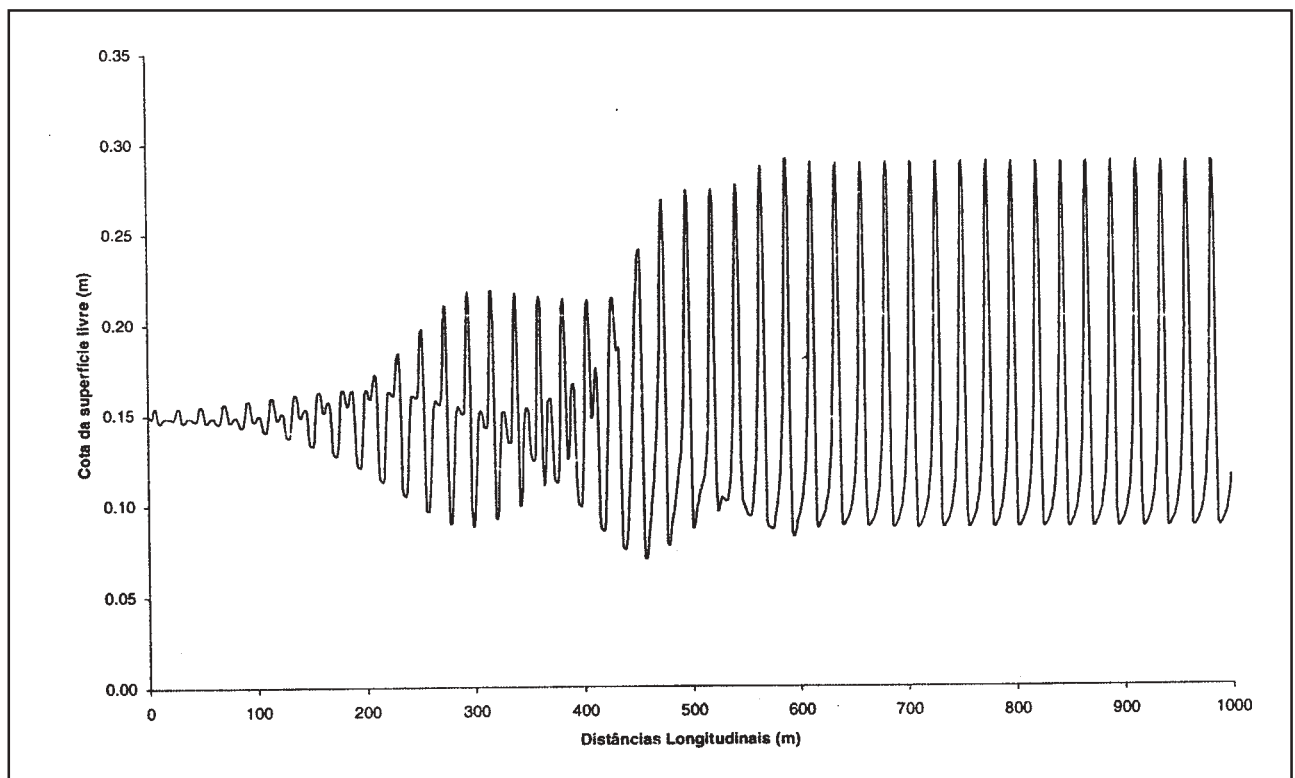


Figura 13. “Roll waves” com T perturbação = 1,00 s, 1,57 s e 3,14 s e amplitudes constantes ($C^* = 0$).

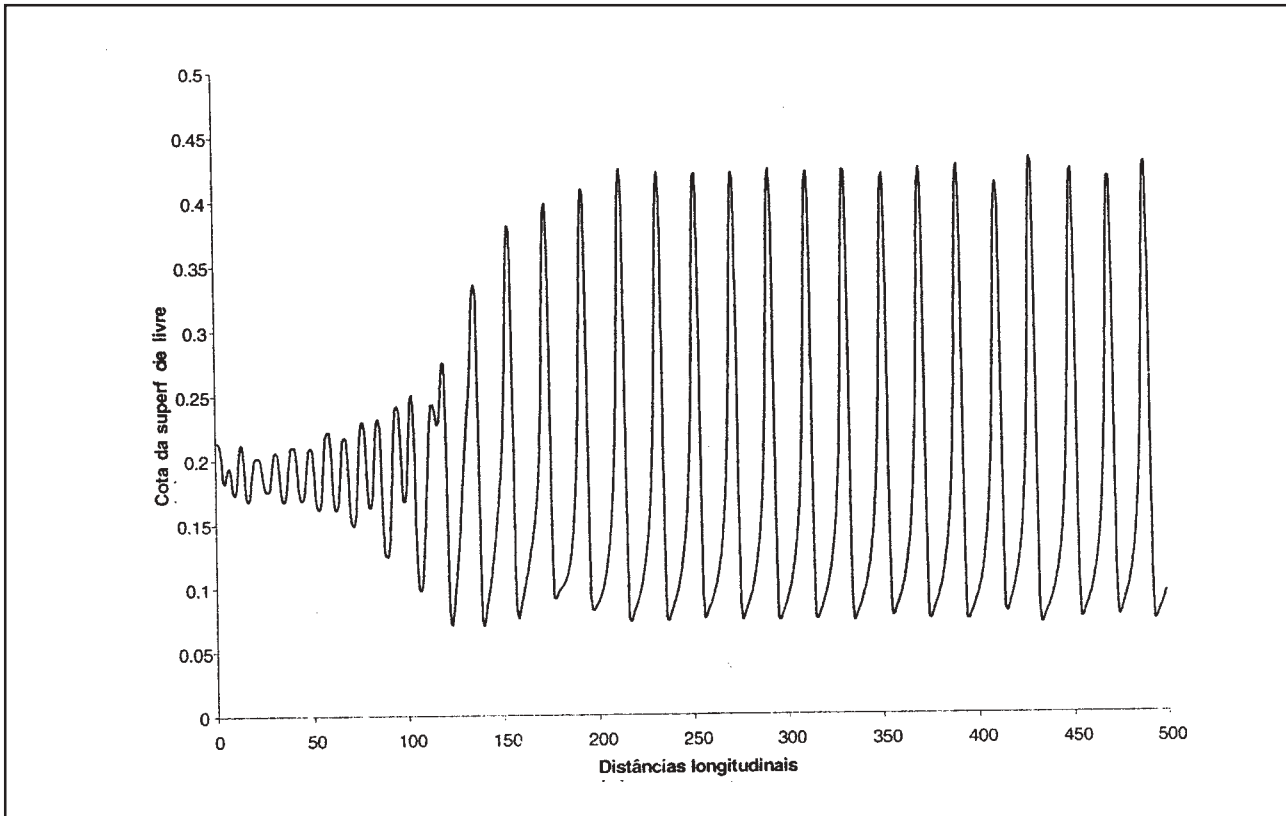


Figura 14. “Roll waves” com T perturbação = 1,00 s, 1,57 s e 3,14 s e amplitudes distintas ($C^* = 0.2$).

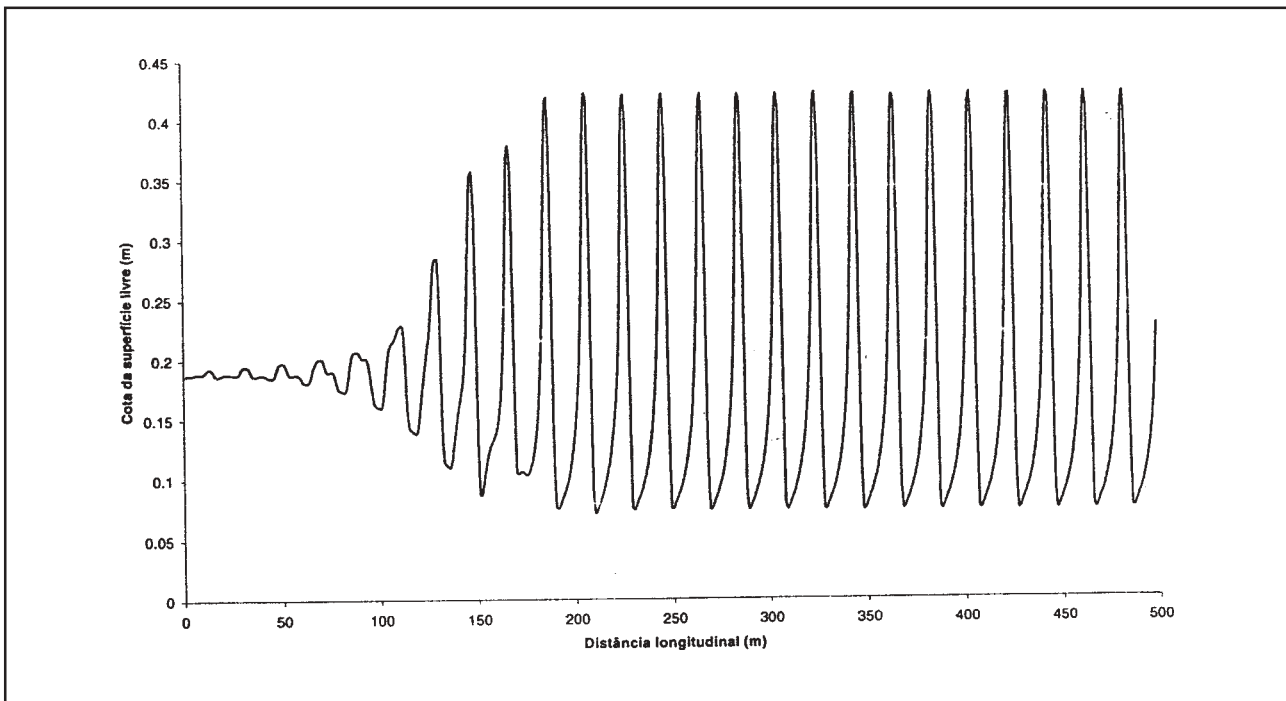


Figura 15. “Roll waves” com T perturbação = 1,00 s, 1,57 s e 3,14 s e amplitudes constantes ($C^* = 0.2$).

Uma vez que as perturbações senoidais impunham o período das “roll waves” geradas, achamos de bom alvitre verificar esse resultado para as grandes e as pequenas frequências, cujos resultados, ainda que parciais, são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1. Período da perturbação x períodos da “roll wave”.

Período da perturbação	Período da “roll wave”
12,56 s	sem “roll wave”
3,14 s	3,14 s
2,00 s	2,00 s
1,57 s	1,57 s
1,05 s	1,05 s
0,78 s	sem “roll wave”

Pôde-se observar que para uma certa dinâmica do escoamento no canal com declividade, resistência e frequência bem definidas, uma pequena perturbação, ainda que infinitesimal, gerava “roll waves”, se a frequência dessa perturbação (senoidal, no caso) estivesse compreendida entre um valor mínimo e um valor máximo, que dependia, entre outros, da própria dinâmica do sistema.

ESTIMATIVA DA DIFUSÃO NUMÉRICA ORIUNDA DO MODELO - COMPARAÇÃO COM A DIFUSÃO FÍSICA

O objetivo dessa parte do artigo é determinar, ainda que em 1ª ordem, a expressão e quantificação da difusão numérica afim de compará-la com a difusão física (viscosidade física). O efeito de difusão numérica provável, oriunda do esquema numérico utilizado, dependerá do incremento espacial Δx e do incremento de tempo Δt .

Seja então uma aproximação por diferenças finitas de incremento Δx constante em todo domínio. Fazendo uma aproximação por diferenças finitas do sistema de Saint Venant em questão, podemos escrever como se segue:

$$U_t + f(U)_x = 0$$

$$\text{Com: } U = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix}; F(U) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{gh^2}{2} \end{pmatrix}; G(U) = 0$$

onde t designa a derivada em relação ao tempo t e x a derivada em relação a x .

Uma vez que o regime de escoamento é de natureza torrencial ou rápida, torna-se possível determinar o valor exato do fluxo numérico, a saber:

$$F = \frac{u}{\sqrt{gh}} > 1; \quad u-c > 0$$

Uma vez que a característica associada ao autovalor $u-c$ penetra no domínio de cálculo, tem-se que a solução estacionária do problema de Riemann é igual ao valor à esquerda (esquema decentrado a montante ou progressivo). Sendo assim, o esquema pode então ser escrito da seguinte forma:

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + \frac{f(U_j^n) - f(U_{j-1}^n)}{\Delta x} = 0$$

$$U_{,t} + \frac{\Delta t}{2} U_{,tt} + O(\Delta t^2) + f(U)_{,x} - \frac{\Delta x}{2} f(U)_{,xx} + O(\Delta x^2) = 0$$

Em 2ª ordem:

$$U_{,t} + f(U)_{,x} = -\frac{\Delta t}{2} U_{,tt} + \frac{\Delta x}{2} f(U)_{,xx} + O(\Delta x^2 + \Delta t^2) = 0$$

Ora, sabemos que:

$$\begin{aligned} U_{,tt} &= -f(U)_{,xt} = -(f' U_{,x})_{,t} = -f'' U_{,t} U_{,x} - f' U_{,tx} \\ &= f'' f(U)_{,x} U_{,x} + f'(f(U)_{,x})_{,x} = (f' f(U)_{,x})_{,x} \end{aligned}$$

De onde se obtém a equação equivalente do esquema numérico:

$$U_{,t} + f(U)_{,x} = \frac{\Delta x}{2} [(Id - \frac{\Delta t}{\Delta x} f') f(U)_{,x}]_{,x}$$

onde Id é a matriz identidade. Dessa maneira, a viscosidade numérica buscada é da ordem de:

$$\begin{aligned} \nu_{num} &= \frac{\Delta x}{2} [(Id - rf') f'] \\ \text{onde } r &= \frac{\Delta t}{\Delta x} \end{aligned}$$

No caso do sistema tratado (Saint Venant), tem-se uma matriz $[M]$ dada por:

$$[M] = \frac{\Delta x}{2} \left[\left(Id - \frac{\Delta t}{\Delta x} f' \right) f' \right]$$

$$= \frac{\Delta x}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + C^2 & 2u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -r \\ -r(-u^2 + C^2) & 1 - 2ru \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\Delta x}{2} \begin{bmatrix} -r(-u^2 + C^2) & 1 - 2ru \\ (1 - 2ru)(-u^2 + C^2) & -r(-u^2 + C^2) + 2u(1 - 2ru) \end{bmatrix}$$

O termo de difusão da equação da conservação da quantidade de movimento devido à viscosidade numérica é dada, no caso, pela seguinte expressão:

$$= \frac{\Delta x}{2} [(1 - 2ru)(-u^2 + C^2)h_x + (-r(-u^2 + C^2) + 2u(1 - 2ru))(hu)_x]_x$$

Admitindo que u seja da ordem de grandeza de C e utilizando a condição de Courant-Friedrichs-Lévy (CFL), demonstra-se que esse termo é da ordem de:

$$\frac{\Delta x}{2} [u(hu)_{,x}]_x$$

A equação de conservação da quantidade de movimento, nesse caso, é dada por:

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2 + p)}{\partial x} = \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial(u \frac{\partial(hu)}{\partial x})}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \cos(\theta) \frac{\partial h}{\partial x} = v_{num} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \cos(\theta) \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\Delta x}{2} u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

A última equação mostra que implicitamente introduzimos no segundo membro da equação da quantidade de movimento, um termo dissipativo complementar e que tende a zero quando o incremento espacial Δx diminua. Exposto isto, a viscosidade numérica é, então, dada por:

$$v_{num} = u \frac{\Delta x}{2}$$

ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE VISCOSIDADE NUMÉRICA E VISCOSIDADE FÍSICA

Para o fenômeno investigado, a velocidade u esteve na faixa compreendida entre 2 m/s e 10 m/s. Admitindo um incremento $\Delta x = 1$ m, chegamos a uma viscosidade numérica mínima da ordem de 1 m²/s. Mas na prática, o incremento Δx é ligeiramente superior, uma vez que queremos tratar problemas de engenharia em larga escala com domínios estendendo-se até dezenas de quilômetros. Entretanto, no melhor dos casos, a viscosidade física, nesses casos (numa lava torrencial por exemplo), não deverá exceder de 0,1 m²/s, o que nos fornece:

$$\frac{v_{numérica}}{v_{física}} > 10$$

De maneira que podemos concluir que para as escalas que pretendemos trabalhar a difusão numérica é ordens de vezes superior a difusão física. A contribuição da viscosidade física pode, pois, ser desprezada nas equações, o que justifica a posteriori, a hipótese utilizada para a determinação do modelo matemático. No entanto cabe aqui citar que para simulações em escalas menores, da ordem do centímetro, por exemplo, seria conveniente elaborar um modelo matemático que levasse em conta o efeito viscoso (análise de pequenas escalas), e por conseguinte um modelo numérico implícito seria mais apropriado, pois possibilitaria um aumento do passo de tempo, por exemplo. Os esquemas implícitos são incondicionalmente estáveis.

REFERÊNCIAS

- BARRE DE SAINT VENANT (1871). *Théorie du mouvement non permanent des eaux*, Institut de France, Académie des sciences, Comptes rendus, Paris Juillet, v. 73, p147-237.
- DRESSLER, R. F (1949). *Mathematical solution of the problem of roll waves in inclined open channels*. Communs pure appl. Math., v. 2, p149-194.
- TAKAHASHI, T. (1990). *Debris Flow*, Monograph, IAHR, Balkema, Rotterdam.
- VANLLER, B. (1981). Toward the ultimate conservative difference scheme, *Journal of Comp. Phys.* 32,101-136.

VILA, J. P. (1986). "Sur la théorie et l'approximation numériques de problèmes hyperboliques non linéaires" Thèse de Doctorat de l'Université Paris VI.

Formation Criteria for Instabilities in Strongly Sloped Channels for a non-Newtonian Rheology

ABSTRACT

The purpose of this article is to investigate the criteria for the occurrence of roll wave phenomena in supercritical and turbulent Newtonian and non-Newtonian flows from the engineering point of view. Rewriting the shallow water equations and taking into account the Bingham flow behavior and flow viscosity, first, we present the conditions for the development of roll waves using the linear stability technique. Second, we prepared a new mathematical model based on shallow water equations in which numerical simulation was performed with a finite volume technique using Godunov-Van Leer schemes. Imposing constant discharge upstream of the channel and superposing a small disturbance, we observed that roll waves can develop more easily for small wave numbers and high cohesions. Finally, based on our mathematical model we demonstrated that the effect of numerical viscosity is 10 times that of physical viscosity.