

COMPARAÇÃO DE MÉTODOS NUMÉRICOS PARA CASOS SIMPLIFICADOS DE CIRCULAÇÃO EM CORPOS D'ÁGUA RASOS

Jaqueline Gomes Moura, José Paulo Soares de Azevedo e

Flávio Cesar Borba Mascarenhas

Programa de Engenharia Civil da COPPE – UFRJ
Caixa Postal 68506 – CEP 21945-970 Rio de Janeiro, RJ

RESUMO

Modelos de circulação em corpos d'água rasos em geral resultam de algumas hipóteses simplificadoras sobre o escoamento. Aqui o escoamento é suposto permanente, incompressível e irrotacional; a profundidade é admitida constante e os efeitos de atrito no fundo e de vento na superfície são desconsiderados. Neste trabalho a equação de Laplace, representativa para a circulação a partir das hipóteses citadas, é resolvida através de três métodos numéricos: método das diferenças finitas, dos elementos finitos e dos elementos de contorno. Resultados dos modelos computacionais associados são comparados para um exemplo da literatura e para o corpo de água real da Lagoa Rodrigo de Freitas na cidade do Rio de Janeiro.

INTRODUÇÃO

A utilização de métodos numéricos em problemas de circulação, pode constituir-se em alternativa eficaz para a visualização de campos de velocidades em corpos rasos de água, contemplando diferentes cenários associados a intervenções de engenharia. Ainda que sejam efetuadas hipóteses simplificadoras para o escoamento, a obtenção dos padrões qualitativos de fluxo pode fornecer subsídios para uma melhor compreensão dos mesmos. Neste trabalho supõe-se que o escoamento é permanente, incompressível e irrotacional, com profundidade constante e os efeitos de atrito de fundo e vento na superfície não são considerados. A equação representativa desse tipo de escoamento é resolvida por três métodos numéricos ou aproximados. Nesses métodos foram adotados os esquemas de discretização mais simples, com malha regular para diferenças finitas, elementos triangulares lineares para elementos finitos e elementos retos constantes para elementos de contorno. Os modelos foram testados para um caso idealizado da bibliografia e para um corpo d'água raso real, no caso de duas situações hipotéticas de bombeamento forçado.

MODELO MATEMÁTICO

A partir dos princípios físicos que governam a dinâmica dos fluidos, (conservação de massa e de quantidade de movimento), chega-se às equações governantes do escoamento, admitindo-se que a energia se conserva (Le Méhauté, 1976).

Admitindo-se o escoamento incompressível, a equação da continuidade reduz-se a:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (1)$$

onde \vec{v} é o campo de velocidades.

A conservação da quantidade de movimento (segunda lei de Newton), admitindo massa específica invariável no espaço e no tempo, fornece:

$$\frac{D(\vec{v})}{Dt} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \vec{a} \quad (2)$$

onde \vec{a} é resultante das forças externas por unidade de massa (aceleração da partícula fluida).

A aceleração resultante medida em um referencial inercial, com eixo z orientado contra a aceleração da gravidade, desprezando-se as tensões tangenciais (fluido invíscido), será:

$$-\frac{1}{\rho} \vec{\nabla}(\rho + \rho g z) \quad (3)$$

Para um escoamento invíscido, irrotacional e bidimensional o campo de velocidades pode ser derivado de um potencial de velocidades ϕ ; tal que:

$$v_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad v_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (4)$$

Substituindo-se (4) na equação da continuidade (1) obtém-se a equação de Laplace:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (5)$$

A equação da conservação da quantidade de movimento neste caso se simplifica para a equação de Euler, que pode ser integrada para um escoamento incompreensível, resultando na equação de Bernoulli:

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 = 0$$

Sendo o regime permanente, esta equação fica:

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2}v^2 = 0$$

que para valores de v pequenos, em comparação com a soma dos outros dois termos, se reduz à aproximação hidrostática de pressões.

A equação diferencial a ser resolvida na região do escoamento é a equação de Laplace sujeita às condições de contorno do tipo essencial ($\phi = \bar{\phi}$) ou natural ($V_n = \bar{V}_n$: velocidade normal = $-\frac{\partial \phi}{\partial n}$).

MÉTODOS NUMÉRICOS

Os métodos utilizados podem ser formulados a partir de uma sentença de resíduos ponderados (Brebbia et al., 1984; Gallagher, 1975) e suas expressões matemáticas podem ser vistas, por exemplo, em Harbaugh & Bonham-Carter (1970), Wrobel (1989) e Mansur et al. (1995).

Os três métodos diferem basicamente quanto ao processo de discretização da geometria do problema. O Método de Diferenças Finitas discretiza o domínio em pontos nodais que formam células, em geral quadradas. No Método dos Elementos Finitos o domínio é discretizado em elementos (no caso deste trabalho triangulares lineares). O Método dos Elementos de Contorno discretiza apenas o contorno do domínio (neste trabalho através de segmentos de reta).

Para a resolução da equação de Laplace bi-dimensional, foram elaborados programas computacionais em Fortran, de acordo com as equações algébricas aproximadas de cada método numérico aplicadas à equação original do problema (Moura, 1997).

COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS

As soluções numéricas obtidas pelos três métodos numéricos foram comparadas para um

caso hipotético de circulação com contorno irregular, onde a geometria é exatamente representada por todos os métodos empregados (Harbaugh, 1970).

Para detectar possíveis erros ocasionados na geração manual das malhas, criou-se uma solução analítica simples, como pode ser visto em Moura (1997). Os resultados comparativos foram obtidos nas seções XX (horizontal na linha de simetria da região) e YY (vertical na linha de simetria dos trechos horizontais dos contornos mais alto e mais baixo). Na Figura 1 podem ser vistos as seções XX e YY, os eixos e a origem de coordenadas onde são apresentados os resultados de velocidade.

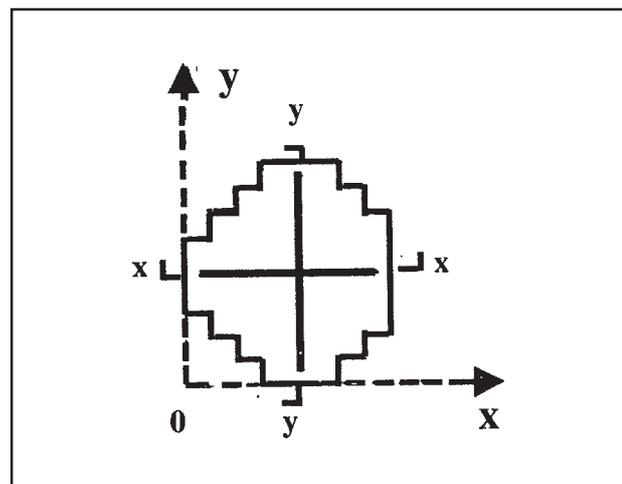


Figura 1. Seções XX e YY, eixos e origem de coordenadas.

Os diferentes refinamentos de diferenças finitas são nomeados pela sigla MDF seguida do número de células utilizadas; as malhas de elementos finitos recebem a sigla MEF acompanhada do número de elementos correspondentes; as discretizações de elementos de contorno recebem a sigla MEC seguida do número de elementos constantes adotados.

As condições de contorno são apresentadas na Figura 2 para as discretizações típicas de cada método. Os resultados comparativos da componente de velocidade predominante na seção XX e na seção YY para diversos refinamentos de cada método (Figura 3) são apresentados nas Figuras 4 a 9.

Nas Figuras 6 a 9 nota-se que, mesmo ao refinar-se as malhas de elementos de contorno e elementos finitos, praticamente não há alteração dos resultados no centro, o que indica que estas soluções numéricas devem estar próximas da solução exata nesta região, logo na primeira discretização.

Nas Figuras 4 e 5 houve uma melhora gradual dos resultados de diferenças finitas ao refinar-se a discretização inicial, sendo que o resultado próximo aos obtidos pelos outros métodos só é alcançado após sucessivos refinamentos.

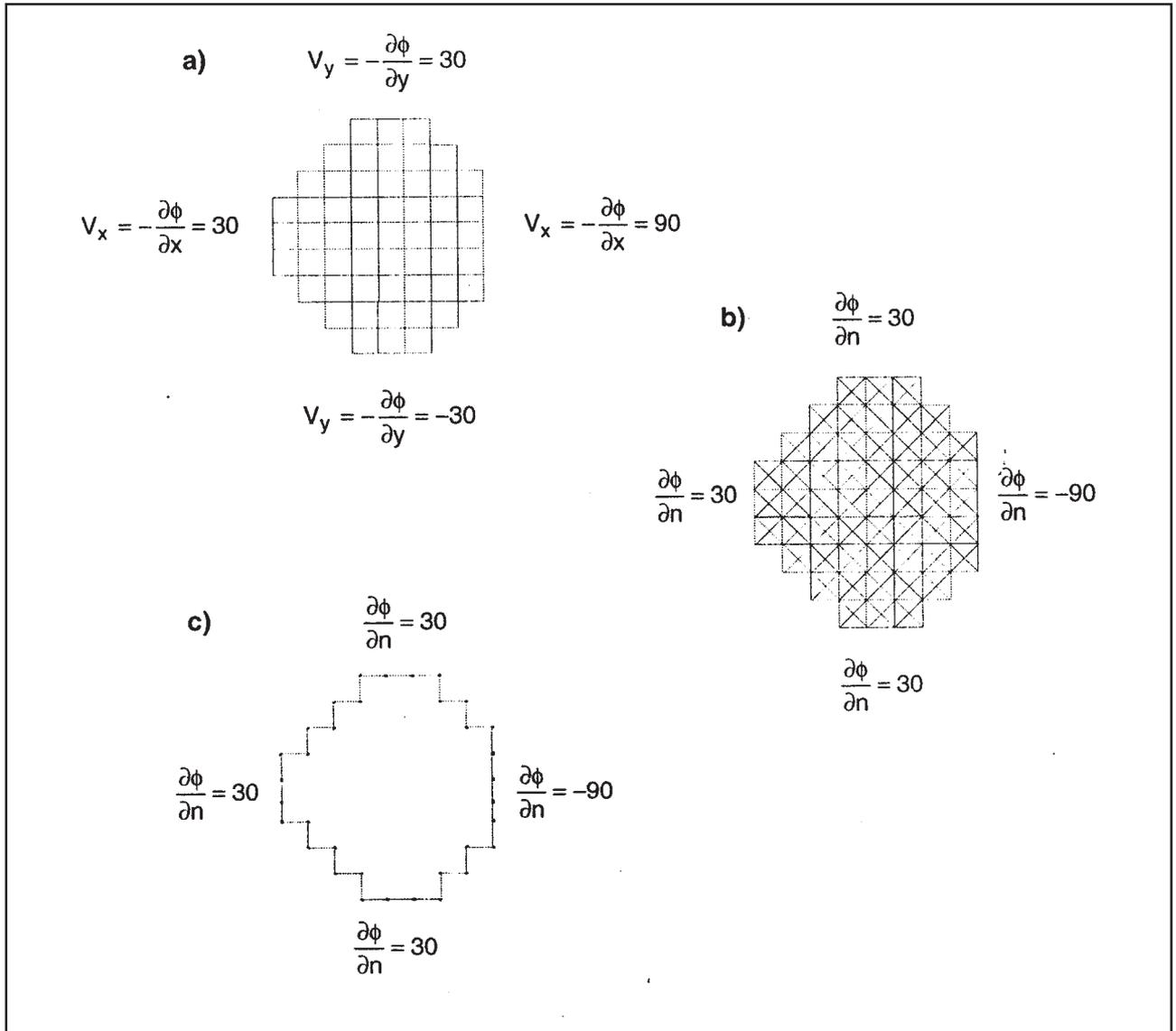


Figura 2. Condições de contorno: (a) MDF, (b) MEF e (c) MEC.

No MEC tem-se a liberdade de escolher pontos internos desde que estes não estejam muito próximos ao contorno, porque em tais regiões os valores numéricos a serem integrados variam bruscamente, dificultando a integração numérica; esse problema pode ser resolvido na prática, das seguintes maneiras: refinando-se a malha, empregando a transformação cúbica de Telles (Telles, 1987) ou aumentando o número de pontos de Gauss (aqui usavam-se 12 pontos para cálculo dos pontos internos próximo ao contorno).

Nas Figuras 10 e 11 apresenta-se uma comparação das velocidades obtidas pelos três métodos com aproximadamente o mesmo grau de refinamento: em cada discretização o lado do elemento de contorno é aproximadamente do mesmo

tamanho do espaçamento da malha quadrada e da aresta do elemento finito próximo ao contorno. Para este refinamento, na região central há uma concordância muito boa dos resultados fornecidos pelos três métodos. Já próximo ao contorno é necessário um maior refinamento para que se chegue a uma boa aproximação da solução. Nas Figuras 12 e 13 a ótima concordância dos resultados obtidos com as discretizações do MEC 68 e MDF 1350 mostra que estes resultados estão bem próximos à solução exata, sendo que a convergência para elementos de contorno foi obtida com a malha que não foi a mais refinada. Um indicador da convergência na resposta deste problema, no qual deve existir a derivada segunda de ϕ , e que serve para refinamentos localizados no MEC e MEF, é a pre-

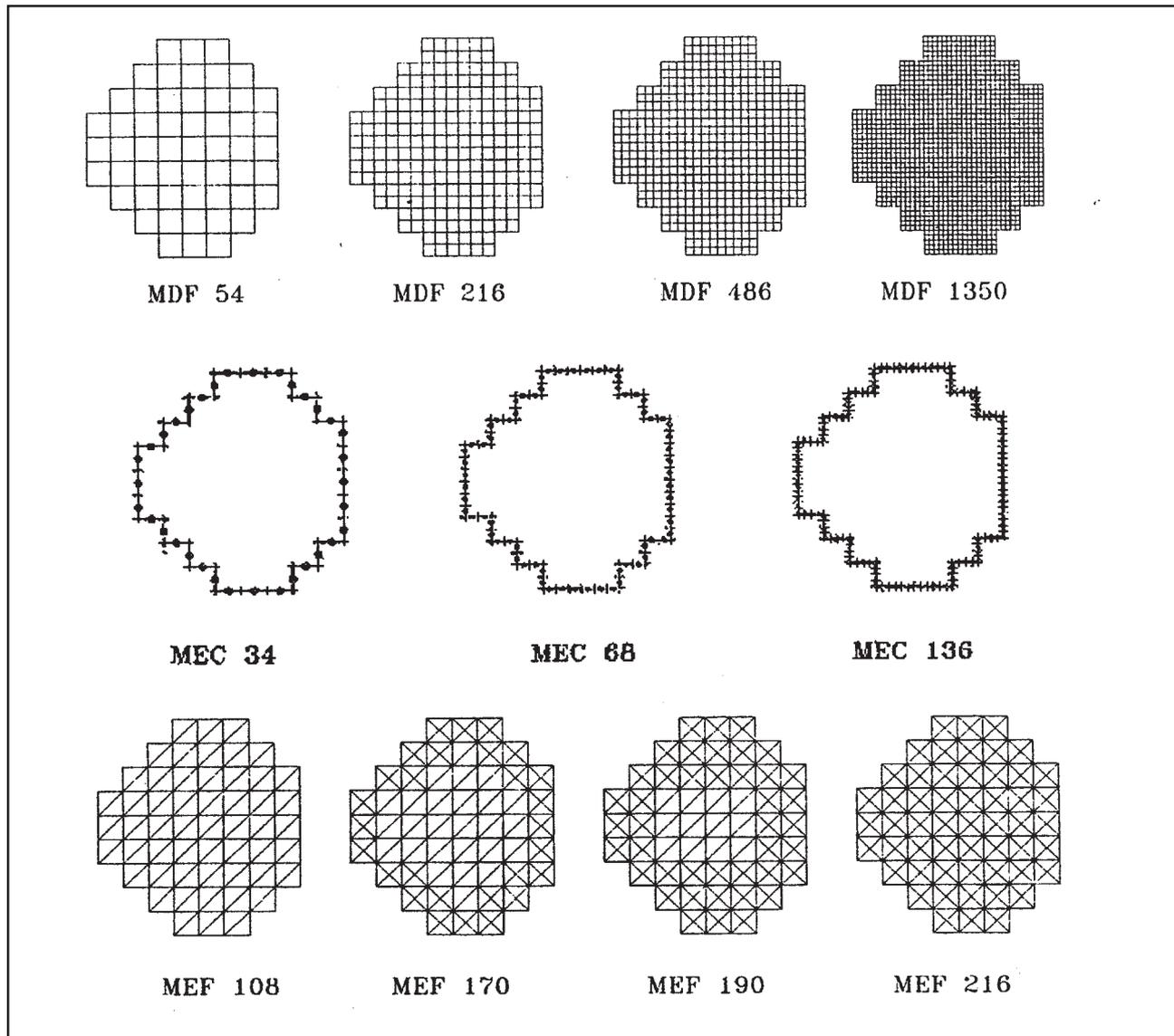


Figura 3. Discretizações dentro de cada método pelos métodos MDF, MEF e MEC.

sença de ângulos nos gráficos, como pode ser visto nos resultados próximos ao contorno das Figuras 10 e 11. Em diferenças finitas, o mesmo tipo de indicador existe, só que o refinamento é feito uniformemente em toda a região; em elementos finitos, um refinamento localizado implica em alterações nos elementos vizinhos para que se faça uma transição de tamanhos de elementos. Em elementos de contorno, a transição é mais simples porque a mesma é feita apenas no contorno e os elementos podem ser descontínuos. Em Moura (1997) apresentam-se resultados para o mesmo exemplo após suavização do contorno, a fim de se obter conclusões aplicáveis a discretizações envolvendo contornos suaves que ocorrem em corpos reais; na prática, ocorre o inverso: o contorno irre-

gularmente recortado surge da aproximação por diferenças finitas de um contorno originalmente suave na escala considerada.

Compararam-se os resultados de velocidades V_x e V_y obtidos pelos três métodos para uma discretização da geometria suavizada correspondente àquela usada. No caso de contorno irregular. Em casos de corpos d'água reais a forma do contorno discretizado se altera à medida em que se aumenta o refinamento, ao contrário do que foi feito anteriormente a partir de uma discretização de diferenças finitas. Observou-se que nas discretizações pelo MEF e MEC o contorno aproximado já está bem próximo ao real, enquanto que pelo MDF o contorno discretizado difere visivelmente do contorno da região em estudo, para discretizações

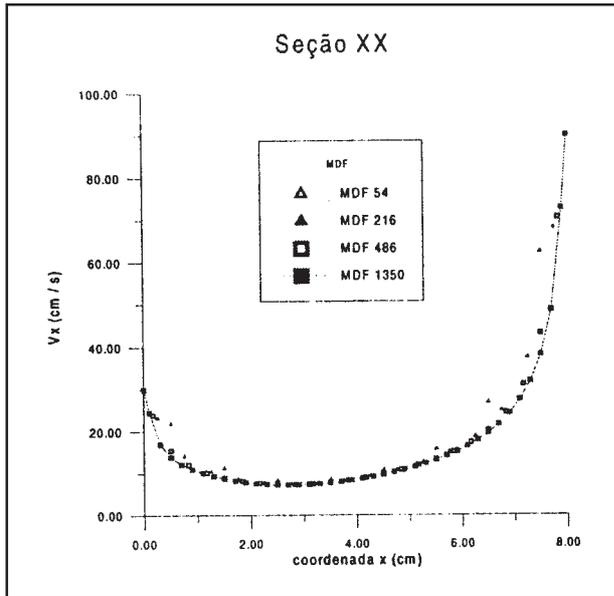


Figura 4. Comparação dos resultados de velocidade na seção XX obtidos pelo MDF.

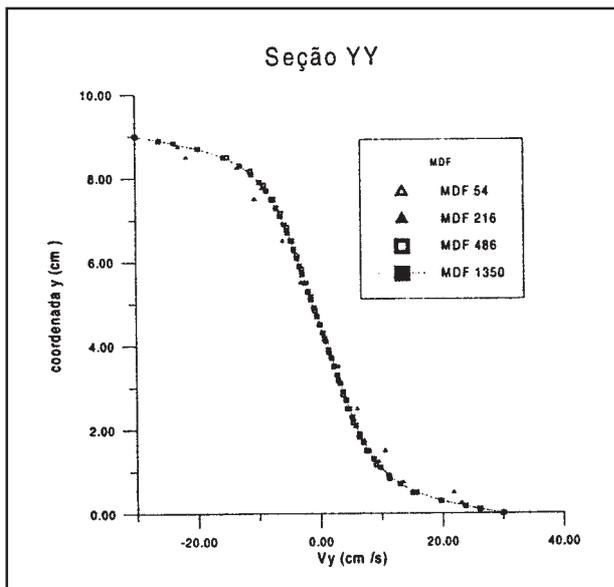


Figura 5. Comparação dos resultados de velocidade na seção YY obtidos pelo MDF.

não muito refinadas. Isto implica na inclusão (ou exclusão) de pequenos trechos no contorno da região fluida que não existem, e que podem gerar padrões de circulação próximos ao contorno que não ocorrem na realidade; neste caso, ao analisar-se os resultados de diferenças finitas é importante não considerar estes padrões locais como significativos.

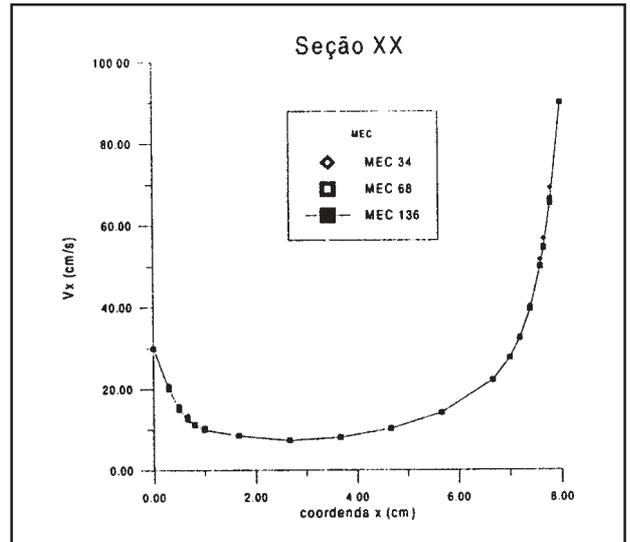


Figura 6. Comparação dos resultados de velocidade na seção XX obtidos pelo MEC.

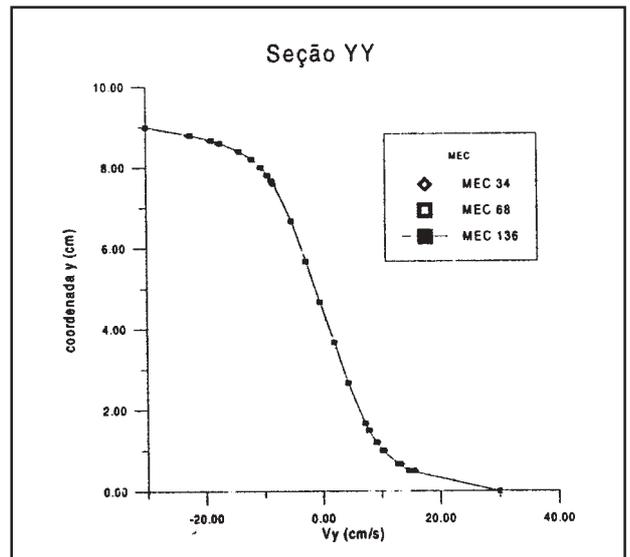


Figura 7. Comparação dos resultados de velocidade na seção YY obtidos pelo MEC.

O MDF, no caso de contornos curvos, só alcança uma aproximação geométrica satisfatória após fazermos vários refinamentos. Isto indica a necessidade de se trabalhar com malhas irregulares e não uniformes de diferenças finitas para a solução de problemas de circulação em corpos d'água reais.

A título de ilustração, para a aplicação a um contorno suavizado, foram obtidos os campos de velocidades na Lagoa Rodrigo de Freitas para duas situações hipotéticas de bombeamento (Mascarenhas et al., 1989). Na Figura 14 é mostrado as

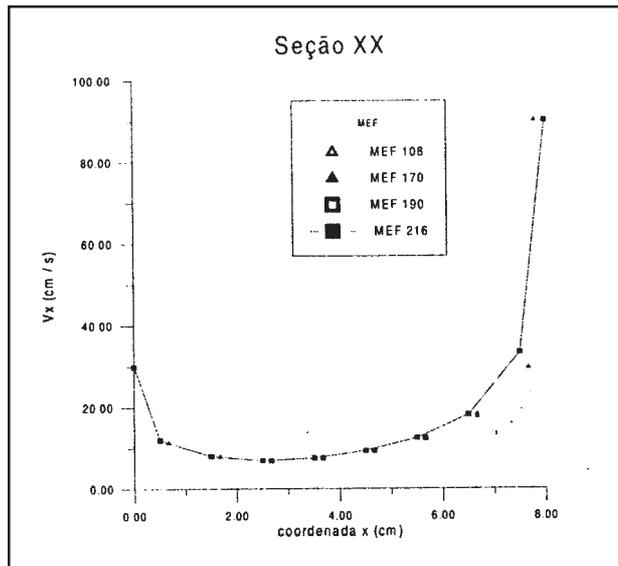


Figura 8. Comparação dos resultados de velocidade na seção XX obtidos pelo MEF.

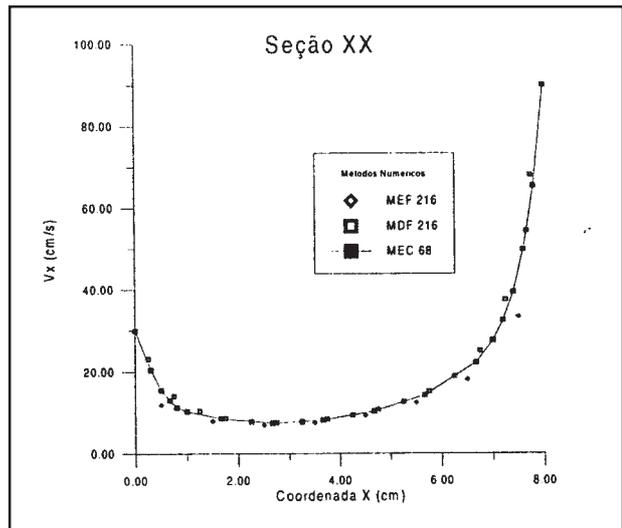


Figura 10. Comparação do campo de velocidade na seção XX dos métodos para um contorno irregular.

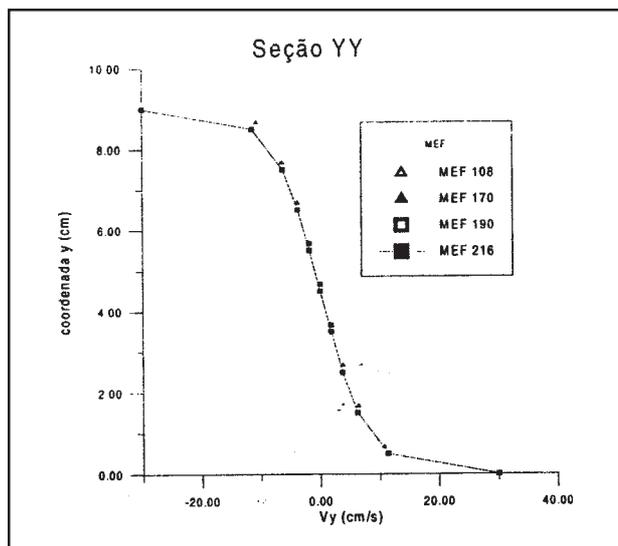


Figura 9. Comparação dos resultados de velocidade na seção YY obtidos pelo MEF.

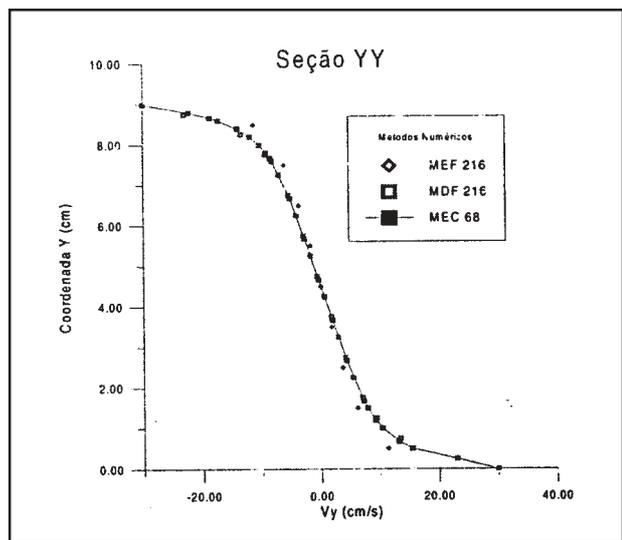


Figura 11. Comparação do campo de velocidade na seção YY dos métodos para um contorno irregular.

localizações para as duas situações hipotéticas, e os resultados do MEC para bombeamentos em frente ao canal do Jardim de Alá e próximo ao emboque do túnel Rebouças, na Figura 15. A Figura 16 mostra os resultados do MEC deslocando-se algumas bombas para o Corte de Cantagalo.

CONCLUSÕES

Neste trabalho foram comparados os resultados dos campos de velocidades obtidos pelos

três métodos numéricos empregados, a fim de identificar-se as vantagens e desvantagens de cada um deles. Foi analisado um exemplo simplificado de circulação, resolvido na literatura pelo Método de Diferenças Finitas.

Em termos da montagem do arquivo de dados, o método dos elementos de contorno foi o mais simples, enquanto que o método dos elementos finitos foi o mais trabalhoso e sujeito a erros, pela necessidade de definição da posição dos nós no interior do domínio e da conectividade de

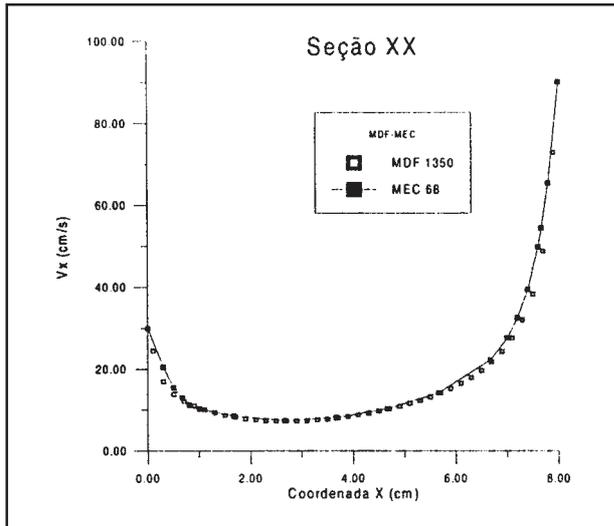


Figura 12. Velocidades na seção XX para maiores refinamentos do MEC e MDF.

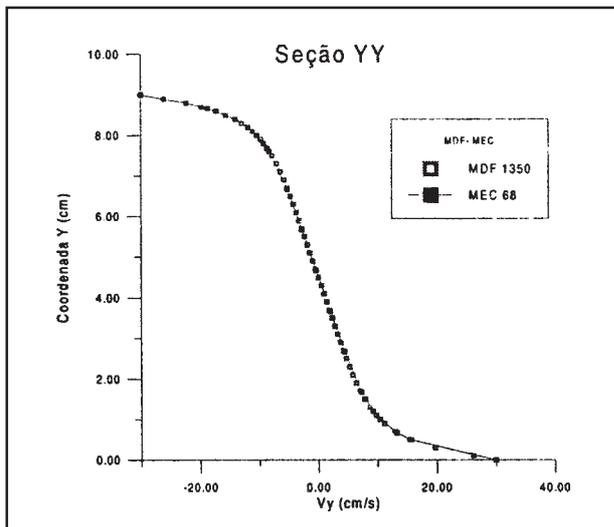


Figura 13. Velocidades na seção YY para maiores refinamentos do MEC e MDF.

cada elemento. Em diferenças finitas, com a introdução de um simples pré-processador o trabalho na montagem do arquivo de dados de entrada para uma malha mais refinada se tornou mais simples e rápido (Moura, 1997).

A implementação computacional utilizada em cada método foi a mais simples, sem a preocupação na otimização. O objetivo principal do estudo foi a comparação dos resultados numéricos. Em termos de horas-máquina os métodos MEC e MEF apresentaram um menor tempo de processamento, quando utilizado para uma região de grandes dimensões, em relação ao MDF, que devido ao processo iterativo, levou um maior tempo de

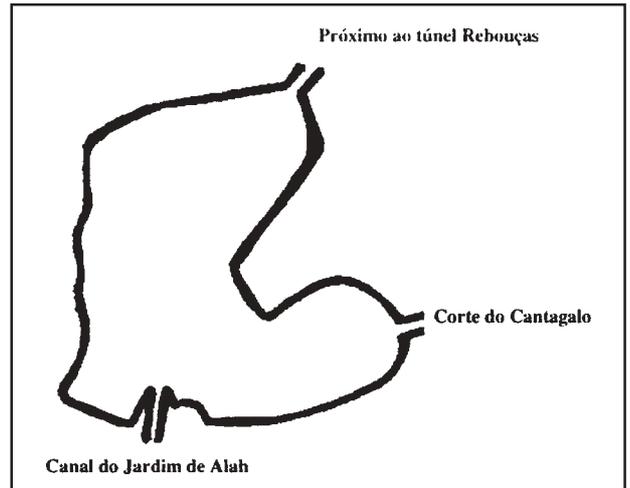


Figura 14. Mapa com as localizações para as duas situações hipotéticas.

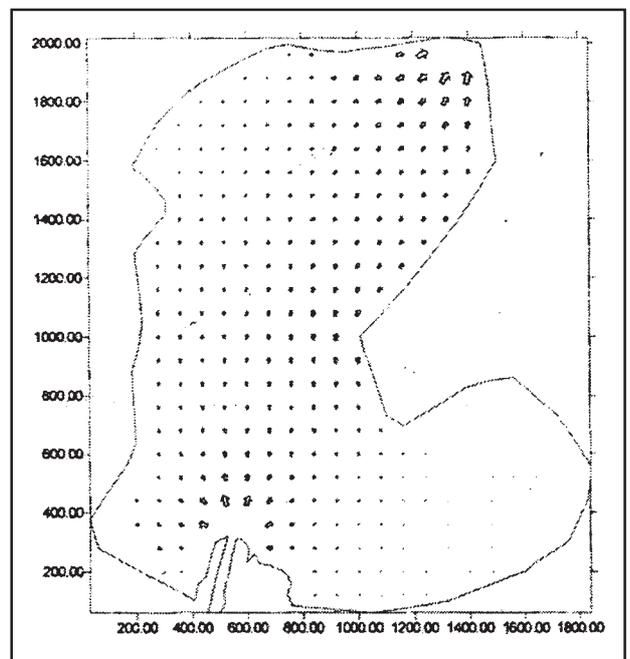


Figura 15. Simulação do campo de velocidade ($V_1 = 0,05$ m/s) pelo MEC para primeira situação de bombeamento -Lagoa Rodigo de Freitas, RJ.

processamento. No exemplo acadêmico, entretanto, a diferença do tempo de processamento entre os métodos é imperceptível.

Nas comparações dos resultados de potencial e de velocidades, observou-se que, para refinamentos sucessivos, os três métodos forneceram resultados que tendem a coincidir. No método das diferenças finitas, houve uma melhora gradual dos resultados a cada refinamento.

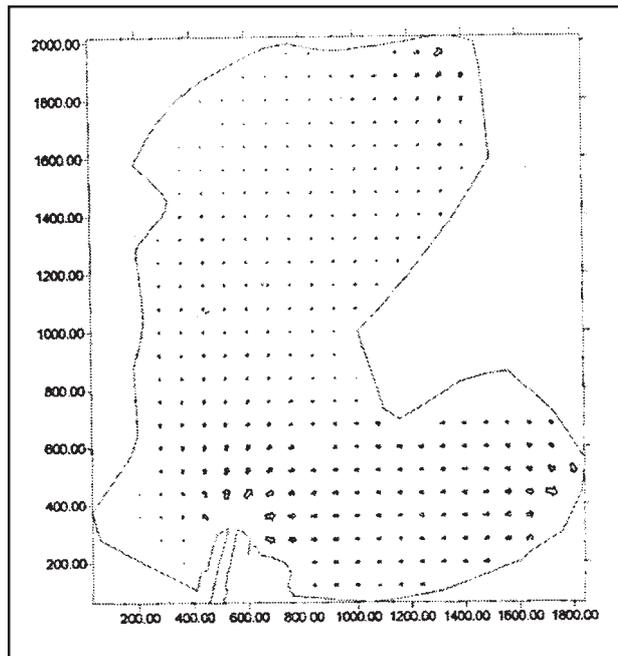


Figura 16. Simulação do campo de velocidade ($V = 0,05$ m/s) pelo MEC para segunda situação de bombeamento - Lagoa Rodrigo de Freitas, RJ.

Como as três metodologias utilizadas são completamente diferentes e seus resultados numéricos obtidos são praticamente o mesmo, pode ser concluído que houve a convergência numérica.

Da forma como o programa está implementado, há a desvantagem do refinamento ser igual em todo o domínio. Tanto no método dos elementos finitos quanto no método dos elementos de contorno o refinamento pode ser feito localmente, diminuindo-se o tamanho dos elementos nas regiões onde o potencial de velocidades ou suas derivadas variam mais bruscamente.

O refinamento no método dos elementos de contorno foi o mais simples de ser feito, porque uma diminuição do tamanho de um elemento para melhorar a representação local das funções ou da geometria do contorno, afeta apenas os elementos vizinhos sobre a curva que define o contorno em problemas bidimensionais. No caso de elementos finitos, além do refinamento local afetar elementos vizinhos no domínio, a necessidade de continuidade do potencial nos nós funcionais comuns a elementos diferentes implica numa gradação de malha, que requer uma redefinição dos elementos até regiões afastadas do local de interesse. Ao usar-se elementos de contorno descontínuos (como o elemento constante) esta "propagação" da mudança na malha não é necessária nem mesmo em contornos de regiões tri-dimensionais.

Para problemas com contornos, onde a geometria não é exatamente representada, o MEF e o

MEC tendem a apresentar melhores resultados, já que os contornos ficam mais bem representados, enquanto que o MDF introduz erros na aproximação de geometria do contorno.

O método dos elementos de contorno fornece o resultado de potenciais e fluxos em pontos internos quaisquer a partir de integrações no contorno. Quando os pontos internos estão muito próximos ao contorno, as integrais são quase-singulares e observou-se que a qualidade dos resultados piora, caso não se melhore o esquema de integração. Maiores detalhes das discretizações e aplicações a um corpo d'água real podem ser vistos em Moura (1997).

Na aplicação à Lagoa Rodrigo de Freitas, os padrões de circulação obtidos pelos três métodos são aproximadamente iguais, e podem ser vistos em Moura (1997).

O comportamento das soluções para todos os efeitos desconsiderados é, a priori, imprevisível. Entretanto, a introdução do efeito de vento, apesar de transformar a equação governante (Laplace para Poisson), já foi preliminarmente testada com reações semelhantes para os três métodos numéricos utilizados. O problema principal para a introdução de diversos efeitos desprezados, inclusive o de vento, é a inexistência de dados de campo associados.

REFERÊNCIAS

- BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C. (1984). *Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering*, Springer-Verlag, Berlin.
- GALLAGHER, R. H. (1975). *Finite Elements in Fluids*, v. 1, New York.
- HARBAUGH, J. W.; SONHAM-CARTER, G. (1970). *Computer Simulation in Geology*, John-Wiley and Sons, New York.
- LE MÉHAUTÉ, B. (1976). *An Introduction to Hydrodynamics and Water Waves*, Springer-Verlag, New York.
- MANSUR, W. J.; PRODANOFF, J. H. A.; AZEVEDO, J. P. S. (1995). "Método dos Elementos de Contorno". Em: Vieira da Silva, R., *Métodos Numéricos em Recursos Hídricos II*, 1 ed., capítulo 1, Rio de Janeiro, Associação Brasileira de Recursos Hídricos-ABRH.
- MASCARENHAS, F. C. B.; WROBEL, L. C.; PRODANOFF, J. H. A. (1989). "Um Modelo Matemático Simplificado para o Estudo da Circulação na Lagoa Rodrigo de Freitas". Em: VII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos, v. 2, novembro.
- MOURA, J. G. (1997). "Métodos Numéricos para Solução de Modelos Simplificados de Circulação em Corpos d'água Rasos em Regime Permanente", Tese de M. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.

TELLES, J. C. F. (1987). "A Self-Adaptive Coordinate Transformation for Efficient Numerical Evaluation of General Boundary Element Integrals", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 24, p959-973.

WROBEL, L. C. (1989). *Métodos Numéricos em Recursos Hídricos*, ca'1, v. 1, Rio de Janeiro, Associação Brasileira de Recursos Hídricos – ABRH.

Comparison of Numerical Methods in Simplified Cases of Circulation in Shallow Water Bodies

ABSTRACT

Simplified circulation models in shallow water bodies generally result in some hypothesis regarding flow. In the present case the flow is assumed steady, incompressible and irrotational; the depth is assumed constant and the effects of bottom friction and wind on the water surface are neglected. In this study, according to the above mentioned hypothesis, Laplace's equation is solved by three numerical methods: finite differences, finite elements and boundary elements. The results of the computational models developed are compared for an example from literature and for a water body proper, i.e., Rodrigo de Freitas lagoon in the city of Rio de Janeiro.