

## UM ALGORITMO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR PARA ANÁLISE DE REDES HIDRÁULICAS

**Paulo Sérgio Franco Barbosa, Alexandre Araujo Costa e  
José Benedito Silva Santos Jr.**

Departamento de Recursos Hídricos – Faculdade de Engenharia Civil – UNICAMP  
Av. Albert Einstein, 901 – CEP 13083-970 Campinas, SP  
[franco@fec.unicamp.br](mailto:franco@fec.unicamp.br)

### RESUMO

A análise de redes hidráulicas, seja para finalidade de projeto ou operação, tem ocupado a atenção de muitos pesquisadores, especialmente diante das demandas crescentes por abastecimento de água, decorrentes dos processos de urbanização. Tais problemas admitem uma grande diversificação de enfoques e abordagens. O interesse da análise pode ser o dimensionamento das tubulações e componentes de reservação e controle, tais como reservatórios e válvulas. Embora já haja uma considerável quantidade de trabalhos realizados para o problema da operação, trata-se de uma área em que nem todas as técnicas se transferiram para a prática das empresas responsáveis pelos sistemas de abastecimento de água. Em ambos os problemas, existe uma etapa de análise dos fluxos que se estabelecem nos diversos trechos da rede diante de uma certa configuração de demandas e cargas piezométricas nos nós. No contexto das técnicas de otimização disponíveis, propõe-se a utilização de um modelo que faz uso da Programação Linear (PL), com alguns artifícios para contornar o problema da não linearidade, permitindo assim que as limitações quanto ao emprego da PL neste problema de análise de redes, sejam superadas. A otimização é sugerida com base no Método da Teoria Linear, com recursos específicos para tratar da não linearidade presente em algumas equações da modelagem de redes. A flexibilidade de adaptação a diferentes topologias de rede, cenários de demanda e suprimento, bem como o potencial de análise fornecido pelo exame dos resultados ótimos, caracterizam as principais vantagens da modelagem apresentada.

### INTRODUÇÃO

Os sistemas municipais de distribuição de água são projetados e operados de maneira a atingir vários objetivos, distinguindo-se dois grandes grupos: a) objetivos técnicos, ligados ao desempenho hidráulico, tais como: garantia de pressões mínimas e máximas, garantia de água suficiente para proteção contra incêndio, confiabilidade operacional, etc.; b) objetivos econômicos, que normalmente se traduzem

pela minimização de custos associados aos componentes dos sistemas e aos custos operacionais.

Além do objetivo econômico em si, que pode ser transferido como benefício ao consumidor final na forma de tarifas menores, os estudos de modelagem da operação de sistemas de abastecimento de água justificam-se por: a) contribuírem para o adiamento das necessidades de ampliação dos componentes da rede, ou do suprimento energético; b) permitirem um melhor conhecimento sobre as interações entre os componentes do sistema, o que pode ser de grande valia para identificar pontos frágeis em termos operativos ou para definir manobras especiais em condições de emergência. c) contribuírem, a longo prazo, para o alcance de uma melhor política de uso de recursos hídricos e energéticos, evitando situações de conflito quando tais recursos se tornarem escassos.

No Brasil, as justificativas apresentadas anteriormente são acentuadas devido a: a) ocorrência de um intenso processo de urbanização nas últimas décadas, o qual tem exigido dos serviços públicos, grande esforços no âmbito técnico, organizacional e financeiro para atender à demanda; b) crise financeira pela qual passam as prefeituras municipais, o que requer o máximo de racionalização no uso dos sistemas existentes. Felizmente, a este quadro contrapõe-se um cenário tecnológico bastante favorável, considerando-se os seguintes fatores: a) a possibilidade de adequado cadastramento plani-altimétrico das redes de abastecimento de água, com os recursos atuais dos Sistemas de Informações Geográficas (SIG); b) a possibilidade de monitoramento, com transmissão telemétrica, das variáveis de interesse para controle da rede, tais como: pressões, vazões, demanda em pontos específicos, etc. c) a ampla disponibilidade de recursos computacionais, com custos progressivamente decrescentes e capacidade de processamento cada vez maior, aliada a melhores recursos na etapa de interface homem-máquina.

A consideração destes fatores motivou o desenvolvimento da pesquisa, cujos resultados são apresentados neste trabalho. De fato, no Estado de São Paulo, cidades como Campinas e São Paulo,

entre outras, dispõem de recursos computacionais e dispositivos de controle que permitem a implementação de manobras derivadas dos modelos. Pode-se afirmar que o desenvolvimento de software para controle operacional está nitidamente aquém dos recursos de controle da rede e do hardware usualmente disponíveis nestas empresas.

## A EVOLUÇÃO DAS TÉCNICAS DE MODELAGEM PARA O ESTUDO DE REDES HIDRÁULICAS

A análise de redes hidráulicas, seja para finalidade de projeto ou operação, tem ocupado a atenção de muitos pesquisadores, especialmente diante das demandas crescentes por abastecimento de água, decorrentes dos processos de urbanização. Tais problemas admitem uma grande diversificação de enfoques e abordagens.

O interesse da análise pode ser o dimensionamento das tubulações e componentes de reserva e controle, tais como reservatórios e válvulas. Certamente, este foi o problema até então mais estudado, diante da sua importância para o projeto.

Embora já exista uma considerável quantidade de trabalhos realizados para o problema da operação, trata-se de uma área em que nem todas as técnicas se transferiram para a prática das empresas responsáveis pelos sistemas de abastecimento de água.

Em ambos os problemas, existe uma etapa de análise dos fluxos que se estabelecem nos diversos trechos da rede diante de uma certa configuração de demandas e cargas piezométricas nos nós. A natureza não linear das equações de perda de carga ao longo das tubulações exige procedimentos numéricos iterativos para a obtenção da solução (vazões em cada trecho). Fundamentalmente, os métodos de solução enquadram-se em três categorias principais baseadas nas soluções adiante: a) técnicas do tipo Hardy-Cross; b) técnicas do tipo Newton-Raphson; c) técnicas de linearização. Estes métodos tradicionais são nada mais que técnicas de solução de sistemas de equações não lineares. Em todos os casos é necessária uma solução inicial, a partir da qual o procedimento iterativo é repetido até que a solução de uma certa etapa do procedimento iterativo não seja significativamente diferente da solução da iteração anterior, caracterizando a situação de convergência. As diferenças entre os métodos recaem sobre a forma de estruturar o procedimento iterativo. Devido à natureza das equações, o método da teoria linear

para resolver as equações de fluxo e o método de Newton-Raphson para resolver as equações dos nós são consideradas as técnicas mais eficientes. Conforme Wood e Charles (1972), o método de Newton-Raphson pode convergir mais rapidamente que o método linear para redes de pequena dimensão, enquanto que pode convergir mais lentamente que o método linear no caso de redes de maiores dimensões.

A utilização da otimização no projeto e operação de redes decorre das preocupações econômicas, sendo freqüente as formulações onde o custo aparece como funcional a ser minimizado (Shamir, 1974). Uma grande variedade de técnicas já foi utilizada, iniciando pelas formulações de programação não linear como a devida a Hall (1976), o qual usou a programação geométrica para a determinação das vazões em uma rede com diâmetros e topologia definidos. Tratava-se pois, de um modelo de formulação teórica complexa, porém, com muitas simplificações (ex. cargas fixas nos nós), as quais limitavam as chances de aplicação a problemas reais. Procurando uma melhor caracterização do mesmo problema, Collins et al. (1978) demonstram que a análise dos fluxos em redes hidráulicas pode ser descrita matematicamente como um problema de fluxo em rede com custo convexo, não linear.

Quando se trata de redes ramificadas, mesmo de maiores dimensões, a otimização não-linear (PNL) é viável, não havendo neste caso a exigência do fechamento das cargas nos anéis (Barbosa e Graciano, 1993). Porém, em se tratando de redes hidráulicas malhadas, da experiência de aplicações em projeto, Eiger et al. (1994) apontam dificuldades para a aplicação da PNL devido aos seguintes aspectos: a) o problema contém elementos discretos, como por exemplo, bombas, válvulas e diâmetros, b) qualquer formulação do problema que é realística é bastante para ser útil, apresenta-se na forma não-linear e convexa; c) mesmo problemas de porte moderado geram grande dimensionalidade computacional.

Uma abordagem mais promissora tem sido o acoplamento entre a programação não-linear e um simulador, tendo este último a função de resolver o problema das restrições hidráulicas que criariam dificuldades ao otimizador, conforme proposto por Lansay e Mays (1989). Esta técnica, sem dúvida, possibilita maior aplicabilidade em relação à otimização não-linear isolada.

## METODOLOGIA

No contexto das dificuldades apresentadas, apresenta-se neste trabalho os resultados da aplicação de um algoritmo de programação linear ao conjunto de equações de uma rede hidráulica, construído sobre a estrutura do método da teoria linear (Wood e Charles, 1974). A título ilustrativo, será tomado o

exemplo de otimização dos fluxos na rede hipotética mostrada na Figura 1. Esta rede contém dois anéis, sete trechos de tubos, alimentação proveniente de reservatórios injetando vazões nos nós 1 e 4 e demandas localizadas nos demais nós. A formulação que se segue é de regime permanente e fixado um particular intervalo de tempo (problema estático), embora a metodologia já tenha se mostrado viável em período estendido (24 h).

Em um nível mais amplo de generalidade, a formulação que se propõe no modelo de programação linear é a seguinte:

$$\text{Min (ou Max) } F \quad (1)$$

sujeito a:

Manutenção de carga nos nós entre valor máximo e mínimo:

$$H_{\min}(i) \leq H(i) \leq H_{\max}(i) \quad (2)$$

Balanço de fluxos (vazões) nos nós (continuidade):

$$\sum_{j=1}^{m_i} a(j,i) q(j) = QD(i), \text{ para } i \in I \quad (3)$$

Perda de carga em cada trecho da rede:

$$h(j) = B(j) q(j), \text{ para } j \in J \quad (4)$$

Cálculo da carga total em cada nó:

$$H(i) = H(i-1) - h(j), \text{ para } i \in I \quad (5)$$

Manutenção de pressões máximas e mínimas nos nós da rede:

$$P_{\min} \leq H(i) - CG_i \leq P_{\max}, \text{ para } i \in I \quad (6)$$

Manutenção de velocidades mínimas e máximas nas tubulações da rede:

$$S(j) V_{\min} \leq q(j) \leq S(j) V_{\max}, \text{ para } j \in J \quad (7)$$

onde  $F$  é a função objetivo,  $a(j,i)$  a variável igual a +1 se a vazão  $q(j)$  chega ao nó  $i$  e igual a -1 se sai do nó  $i$ , garantindo a linearidade das relações entre as variáveis presentes na Equação (3) e  $B(j)$  o termo de perda de carga da fórmula universal, definido como:

$$B(j) = 8 f L_j / g \pi^2 D_j^5$$

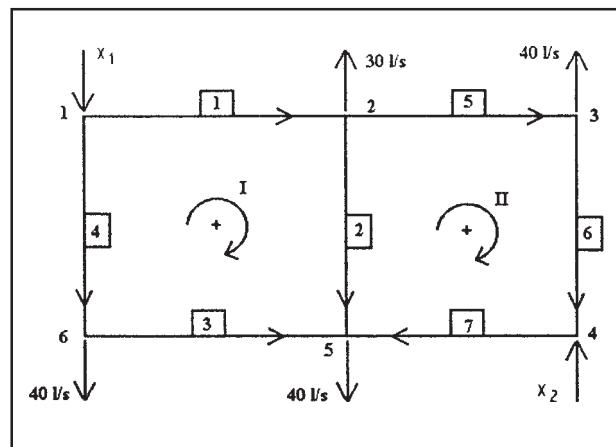


Figura 1. Rede do primeiro exemplo (rede A).

sendo  $f$  o fator de atrito,  $L_j$  o comprimento do trecho  $j$ ,  $g$  a aceleração da gravidade,  $D_j$  o diâmetro da tubulação do trecho  $j$ ,  $CG_i$  a cota geométrica do nó  $i$ ,  $h(j)$  a perda de carga que ocorre no trecho  $j$ ,  $H(i)$  a carga no nó  $i$ ,  $H_{\min}(i)$  a carga mínima a ser mantida no nó  $i$ ,  $H_{\max}(i)$  a carga máxima a ser mantida no nó  $i$ ,  $I$  o nó imediatamente a montante do nó  $i$  (caminhando sobre o trecho  $j$ ),  $I$  o conjunto de nós da rede,  $J$  o conjunto de trechos de tubos da rede,  $m_i$  o número de trechos que chegam ao nó  $i$ ,  $P_{\min}$  a pressão mínima a ser mantida na rede,  $P_{\max}$  a pressão máxima a ser mantida na rede,  $q(j)$  a vazão no trecho  $j$ , a qual se constitui na variável de decisão,  $q_1(j)$  a vazão no trecho  $j$ , usada como forma de linearização dos termos quadráticos que aparecem na equação de perda de carga nos tubos, sendo igual a vazão ótima da iteração anterior da PL ou estimativa inicial de vazão no caso da primeira rodada,  $QD(i)$  a vazão de demanda no nó  $i$ ,  $S(j)$  a área da seção transversal do tubo no trecho  $j$ ,  $V_{\max}$  a velocidade máxima nos tubos e  $V_{\min}$  a velocidade mínima nos tubos.

A função objetivo (1) pode ser formulada de diversas maneiras, excludentes, de modo a reproduzir situações específicas de interesse para a análise que se pretenda efetuar. Por exemplo, a função  $F$  poderá expressar o interesse em avaliar a maximização da capacidade de injetar vazão na rede a partir de um reservatório específico (associado a um nó), que numa determinada condição operacional pode ter maior disponibilidade hídrica. Um exemplo dessa situação, é o caso de um reservatório em posição plani-altimétrica favorável, que consiga abastecer grande parte da rede apenas por gravidade. Neste caso a priorização do uso desse reservatório é justificada por razão econômica. A título ilustrativo, com base na Figura 1, tal função objetivo poderia ser expressa por:

$$\text{Max } F = X_1 \quad (8)$$

onde  $X_1$  é a vazão injetada no nó 1.

Outra alternativa interessante para análise é a função objetivo sendo formulada para uma situação especial de demand, num ponto localizado da rede, caracterizando emergência para suprimento, por exemplo, de combate a incêndio. No caso da Figura 1, tal função objetivo poderia ser expressa por:

$$\text{Max } F = QD(6) \quad (9)$$

A simplificação adotada para tratar das não-linearidades consiste em desacoplar o termo quadrático das vazões em cada trecho  $q(j, t)$  em duas parcelas (Equação 4):  $q_1(j)$  e  $q(j)$ . O valor de  $q_1(j)$  sempre será conhecido, uma vez que ele é assumido como sendo igual ao valor de  $q(j)$  da iteração anterior da PL. Na primeira iteração assume-se um valor igual ao produto da velocidade máxima pela área da seção transversal da tubulação. Assim, na Equação (4) consegue-se explicitar a variável de decisão  $q(j)$  em forma linear. Na verdade, o modelo otimizante não requer uma solução inicial equilibrada, ou seja, satisfazendo as equações da continuidade e de energia nas malhas. Porém, o modelo necessita de vazões iniciais de magnitude compatível aos limites de capacidade determinados pelas velocidades máximas nos trechos, de maneira a formar os valores iniciais  $q_1(j)$  em ordem de grandeza consistente.

Destaca-se a inovação da proposta apresentada pela utilização da programação linear, de forma iterativa sobre o conjunto de equações lineares obtido pelo método da teoria linear. Nesta adaptação tornou-se necessário aumentar o grau de liberdade do sistema de equações lineares original através da introdução de variáveis artificiais em nós pré-selecionados (exemplo: Figura 1, variáveis artificiais  $X_1$  e  $X_2$ ).

O problema resultante, obtido com este artifício, é um problema decisório que admite infinitas soluções podendo ser escolhida uma solução ótima sob um critério conveniente (expresso na função objetivo).

Trata-se portanto de uma formulação completamente diferente daquela obtida com a simples aplicação da teoria linear, a qual forneceria sempre solução única.

## ESTUDO DE CASO

Para exemplificar a aplicação da metodologia apresentada anteriormente, foram criadas três diferentes redes hipotéticas para testes. A extensão para redes já existentes ou redes em projeto, de natureza mais complexa, não trará dificuldades,

exceto aquelas referentes ao esforço computacional. Para dar uma abrangência maior ao estudo, foram utilizadas redes de dois, três e quatro anéis. Para todas as redes estudadas, foi primeiramente obtida a resolução da rede por métodos não otimizantes (Hardy-Cross e Método Linear) e numa fase posterior, foi desenvolvido a análise otimizada. É claro que se tratam de problemas distintos. Na análise da solução por Hardy-Cross e pelo Método Linear, tratam-se de sistemas de equações determinados, com número de equações igual ao número de incógnitas, gerando solução única em ambos os casos. Na análise otimizada, são introduzidas variáveis (por exemplo,  $X_1$  e  $X_2$ , como no caso da rede da Figura 1) e é mantido o mesmo número de equações, gerando sistema (linear) de equações indeterminado, garantindo assim a possibilidade de aplicar a otimização. De qualquer forma, as soluções por Hardy-Cross e pelo Método Linear foram obtidas de maneira a ter uma base de referência para comparação.

Para o primeiro exemplo, a solução foi obtida através de dois pacotes comerciais de otimização, ambos com base no algoritmo SIMPLEX, sendo estes: MINOS (Modular In-Core Nonlinear Optimization System) da Universidade de Stanford, e LINDO (Linear Interactive and Discrete Optimizer) da Lindo Systems. O emprego desses dois pacotes é justificado em razão da necessidade de comparação dos resultados, visando a verificação da coincidência das soluções, garantindo assim a confiabilidade quanto ao uso dos pacotes de otimização. Para os demais exemplos utilizou-se apenas o MINOS. As constantes necessárias para equacionamento do problema otimizado foram obtidas através do método da teoria linear, baseado nos dados físicos das redes hidráulicas. Com base nesta formulação foi desenvolvido um programa em Pascal que prepara os arquivos de entrada para os otimizadores utilizados. Seguem adiante as descrições de cada rede com seus respectivos resultados.

## Primeiro exemplo: rede A

Trata-se de uma pequena rede malhada de dois anéis, seis nós e sete trechos, consumo em quatro nós e com duas entradas, como pode-se verificar na Figura 1. As características da rede e a estimativa inicial de vazões nos trechos podem ser encontradas na Tabela 1. Os resultados não otimizados (Hardy-Cross e Método Linear) da rede A encontram-se na Tabela 2. Com a finalidade de verificar a adequação e a consistência da metodologia proposta, utilizou-se neste exemplo (rede A) o

**Tabela 1. Dados da rede A e vazões iniciais nos trechos.**

Trecho	Comprimento (m)	Diâmetro (mm)	Valores iniciais da vazão (l/s)	
			M. Linear	H. Cross
1	400	200	30.000	60.000
2	200	150	30.000	10.000
3	400	150	30.000	-20.000
4	200	200	30.000	6.000
5	500	200	30.000	20.000
6	200	150	30.000	-20.000
7	500	150	30.000	10.000

**Tabela 2. Resultados comparativos para a rede A.**

Trecho	N <sub>inicial</sub>	N <sub>final</sub>	Hardy-Cross Q(l/s)	Método linear Q(l/s)	Lindo Q(l/s)
1	1	2	59.597	60.547	60.547
2	2	5	9.757	10.349	10.349
3	6	5	20.403	19.453	19.453
4	1	6	60.403	59.453	59.453
5	2	3	19.480	20.198	20.198
6	3	4	20.160	19.802	19.802
7	4	5	9.840	10.198	10.198
Número de Iterações			7	13	5

pacote de otimização LINDO para resolver o sistema de equações na forma determinada (ou seja, fixando  $X_1 = 120 \text{ l/s}$  e  $X_2 = 30 \text{ l/s}$ ), com o objetivo de comparar os resultados fornecidos pelo método linear (não otimizante), cujo algoritmo foi desenvolvido neste trabalho. Deve-se ressaltar que neste procedimento não existiam variáveis livres, ou seja, utilizou-se o LINDO para resolver um sistema de equações onde o número de equações era igual ao número de incógnitas. Os resultados mostrados na Tabela 2 indicam a adequação e a consistência pretendidas, ocorrendo inclusive a total coincidência entre os resultados do LINDO (pivotamento) e o Método Linear (decomposição L. U.).

Garantida a consistência dos resultados, passou-se à realização da análise de otimização da rede através de diferentes cenários. Para tal, as vazões de entrada nos nós 1 e 4 (de 120 l/s e 30 l/s) foram substituídas pelas incógnitas  $X_1$  e  $X_2$ , respectivamente, conforme indicado na Figura 1.

Desta maneira, obteve-se um sistema com duas variáveis livres. Diferentes funções objetivo foram testadas. Num primeiro estágio, optou-se pela maximização da entrada  $X_1$  (caso A.1). Posteriormente, maximizou-se a segunda vazão de entrada  $X_2$  (caso A.2). Em ambos os casos as variáveis "vazões nos trechos  $-q(j)$ " puderam assumir valores positivos ou negativos (permitindo a inversão do sentido do escoamento), resultando a Tabela 3.

Para efeito comparativo fez-se um estudo semelhante, sendo que agora as variáveis apenas

poderiam assumir valores positivos, ou seja, o sentido do escoamento suposto em cada trecho não sofreria modificação no processo de otimização.

Os resultados obtidos encontram-se na Tabela 4. A comparação dos resultados revela a superioridade da solução mostrada na Tabela 3 sobre a solução da Tabela 4, com maior valor de função objetivo (150 l/s na Tabela 3 contra 138,45 l/s na Tabela 4), garantido pela possibilidade de mudança do sentido do fluxo de vazões em cada trecho da rede. Tendo em vista esta superioridade, os demais casos foram formulados sempre como no caso da Tabela 3, ou seja com permissão de mudança no sentido do fluxo de vazões em cada trecho.

A prática da operação de uma rede revela a necessidade de trabalhar com demandas nos nós que são variáveis ao longo do dia, bem como podem necessitar controles ou atendimentos específicos em certos nós da rede (combate à incêndio e operações especiais de manutenção).

Portanto, na operação, as condições de demanda nos nós se afastam do modelo teórico adotado na fase de projeto, quando se assumem valores fixos para as vazões injetadas ou retiradas dos nós.

Conclui-se que, em relação às formas tradicionais de determinação de vazões, o modelo otimizante permite maior flexibilidade na análise de possíveis configurações de demanda da rede, aproximando-se de situações reais de operação.

**Tabela 3. Resultados da otimização da rede A com as vazões positivas ou negativas.**

Função objetivo Pacote comercial	Caso A.1 (MAX X1)		Caso A.2 (MAX X2)	
	Minos Q(l/s)	Lindo Q(l/s)	Minos Q(l/s)	Lindo Q(l/s)
X1	150.000	150.000	0.000	0.000
X2	0.000	0.000	150.000	150.000
Q1	79.800	79.800	-16.460	-16.464
Q2	16.180	16.182	-12.980	-12.983
Q3	30.200	30.200	-23.540	-23.536
Q4	70.200	70.200	16.460	16.464
Q5	33.620	33.618	-33.480	-33.481
Q6	6.380	6.382	73.480	73.481
Q7	-6.380	-6.382	76.520	76.519
Iterações	5	5	5	5

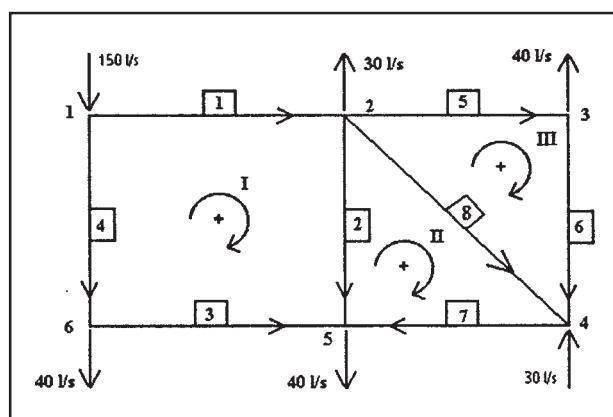
**Tabela 4. Resultados da otimização da rede A, com vazões sempre positivas.**

Função objetivo Pacote comercial	Caso A.3 (MAX X1)		Caso A.4 (MAX X2)	
	Minos Q(l/s)	Lindo Q(l/s)	Minos Q(l/s)	Lindo Q(l/s)
X1	138.450	138.452	74.850	74.847
X2	11.550	11.548	75.150	75.153
Q1	72.390	72.389	31.570	31.570
Q2	13.940	13.937	1.570	1.570
Q3	26.060	26.063	3.280	3.277
Q4	66.060	66.063	43.280	43.277
Q5	25.450	28.452	0.000	0.000
Q6	11.550	11.548	40.000	40.000
Q7	0.000	0.000	35.150	35.153
Iterações	6	5	5	4

## Segundo exemplo: rede B

Trata-se de uma pequena rede malhada de três anéis, seis nós e oito trechos, consumo em quatro nós e duas entradas, como pode ser verificado na Figura 2. Esta rede pode ser vista como uma expansão da rede A, pois nessa nova rede apenas se acrescentou o trecho 8 (do nó 2 ao nó 4).

Esta solução é empregada em redes urbanas com o objetivo de melhorar o funcionamento de redes já existentes. O objetivo do estudo nessa nova rede foi verificar a adequação do modelo com uma rede de três anéis, bem como analisar a sensibilidade da solução obtida com a rede A, após a introdução do trecho 8 (que liga o nó 2 ao nó 4). Verifica-se pois, que a introdução desse trecho, produziu mais flexibilidade à operação da rede, conseguindo soluções ótimas com máxima injeção de vazão possível em cada nó analisado, correspondentes às duas situações de função objetivo (caso A.3 e caso A.4 - ver Tabela 4). As características da rede podem ser encontradas na Ta-



**Figura 2. Rede do segundo exemplo (rede B).**

bela 5. Os resultados não otimizados estão na Tabela 6.

Tendo sido obtidos os resultados não otimizados como referência, passou-se à realização

**Tabela 5. Dados da rede B.**

Trecho	Comprimento (m)	Diâmetro (mm)	Valores iniciais da vazão (l/s)	
			M. Linear	H. Cross
1	400	200	30.000	75.000
2	200	150	30.000	5.000
3	400	150	30.000	5.000
4	200	200	30.000	45.000
5	500	200	30.000	20.000
6	200	150	30.000	-20.000
7	500	150	30.000	30.000
8	540	150	30.000	20.000

**Tabela 6. Soluções não otimizadas para a rede B.**

Trecho	N <sub>initial</sub>	N <sub>final</sub>	Hardy-Cross (l/s)	Método linear (l/s)
1	1	2	59.370	60.363
2	2	5	11.294	11.764
3	6	5	20.630	19.637
4	1	6	60.630	59.637
5	2	3	21.786	21.707
6	3	4	-18.214	-18.293
7	4	5	8.076	8.598
8	2	4	-3.710	-3.109
Número de iterações			13	13

da análise de otimização da rede. Para tal, novamente, as vazões de entrada nos nós 1 e 4 (de 150 l/s e 30 l/s) foram substituídas pelas incógnitas X1 e X2, respectivamente. Desta maneira, obteve-se um sistema com duas variáveis livres. Diferentes funções objetivo foram testadas.

Inicialmente maximizou-se X1 (caso B.1) e após, maximizou-se X2 (caso B.2), resultando os dados mostrados na Tabela 7. Apesar das vazões em cada trecho serem diferentes, observa-se que em ambas as funções objetivo, consegue-se o valor (máx.) de 150 l/s na solução ótima, o qual, aliás, não poderia ser maior, uma vez que a soma de demanda de vazões nos nós é de 150 l/s, garantindo assim o balanço hídrico na rede como um todo.

### Terceiro exemplo: rede C

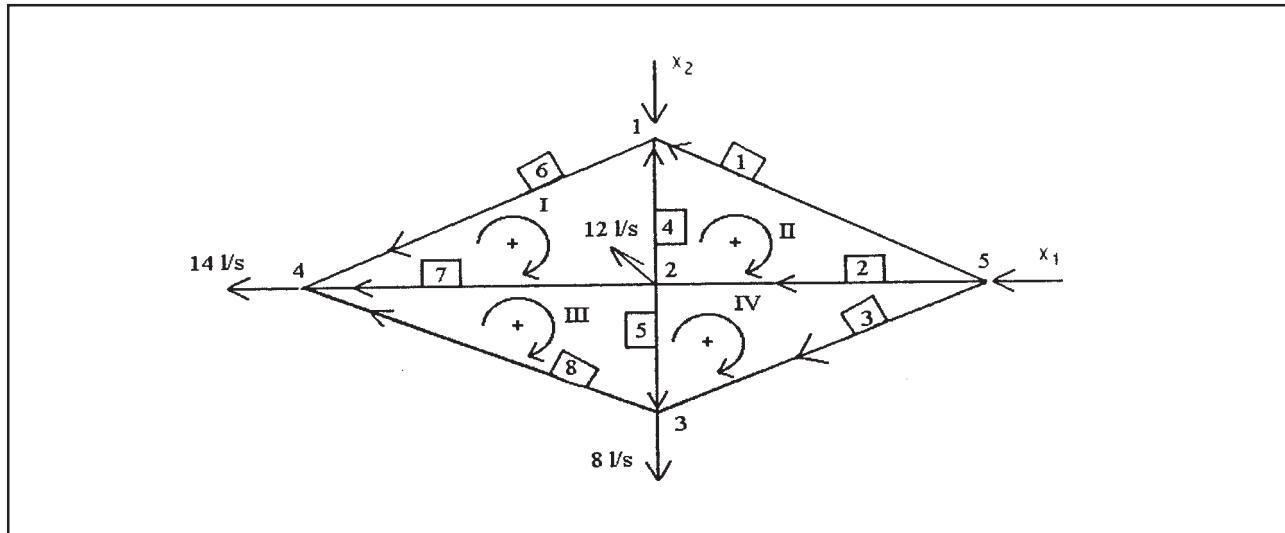
Como terceiro exemplo, escolheu-se uma pequena rede malhada de quatro anéis, cinco nós e oito trechos, consumo em três nós e duas entradas, conforme a Figura 3. Em Guercio e Xu (1997) esta rede foi utilizada para a análise de um modelo

**Tabela 7. Resultados otimizados para a rede B.**

Função objetivo Pacote comercial	Caso B. 1 (MAX X1)	Caso B.2 (MAX X2)
	Minos Q(l/s)	Minos Q(l/s)
X1	150.000	0.000
X2	0.000	150.000
Q1	80.610	-20.610
Q2	10.370	17.360
Q3	29.390	-19.390
Q4	69.390	20.610
Q5	26.240	3.590
Q6	13.760	36.410
Q7	0.240	42.030
Q8	-14.000	71.550

Iterações	6	7
-----------	---	---

de otimização linear, em projetos de sistemas de abastecimento de água, sendo introduzidas condições de confiabilidade na forma de restrições do problema, garantindo soluções com risco de falha de atendimento à demanda abaixo de valor pré-

**Figura 3. Rede do terceiro exemplo (rede C).**

especificado. As características da rede podem ser encontradas na Tabela 8. Os resultados não otimizados são mostrados na Tabela 9.

O estudo de otimização se deu pela substituição da vazão de demanda no nó 1 (8 l/s) e da vazão de entrada no nó 5 (42 l/s) pelas variáveis  $X_2$  e  $X_1$ , respectivamente. Com o sistema livre foi possível a otimização. Para efeito comparativo, novamente, maximizou-se  $X_1$  (caso C.1) e  $X_2$  (caso C.2), com os resultados mostrados na Tabela 10. A título de ilustração, foram adicionadas restrições ao modelo de forma que no equacionamento fossem consideradas as condições de vazões máximas permitidas nas tubulações segundo a norma brasileira, conforme equações do tipo (7). Impostas essas novas restrições, obteve-se os resultados mostrados na Tabela 11. Com a capacidade original do trecho 6, não foi obtida solução factível, indicando a presença de um “gargalo” de capacidade de transporte de vazão na rede. Portanto, foi necessário aumentar a capacidade de vazão do trecho 6 para que fosse obtida solução factível.

Aproveitando a geometria da rede C, realizou-se um novo estudo de forma a verificar qual a vazão máxima que poderia ser retirada pelo nó 4, respeitando a capacidade de cada trecho e a demanda nos nós. Utilizando a ferramenta da otimização, torna-se possível saber quais trechos são “gargalos” para a rede e, desta forma, no caso de se desejar aumentar a vazão de saída (no nó 4, por exemplo), podariam ser definidos os trechos que deveriam ser modificados. Este estudo pode ser utilizado em casos reais quando, devido ao surgimento de uma nova área a ser abastecida, há necessidade de ser construída uma nova “adutora” ou, alternativamente, utilizar a rede antiga para fornecer a vazão necessária na nova área.

Para esta análise, as demandas nos nós 2, 3, 4 foram substituídas por três novas variáveis  $X_3$ ,  $X_4$ ,  $X_5$  respectivamente. Ao maximizar  $X_5$  ( $F = \max X_5$ ), observa-se que a capacidade do trecho 6 deve ser alterada pois, caso contrário, a solução obtida para o problema de máximo fluxo torna-se infactível. Então, este trecho pode ser caracterizado como um “gargalo para a rede analisada. Modificada sua capacidade, até atingir a condição de solução factível, verifica-se que a vazão máxima de saída no nó 4 é de 14 l/s. Este resultado era esperado em função das equações de equilíbrio nos nós (as variáveis  $X_3$  e  $X_4$  foram ajustadas para terem como limite inferior, as respectivas demandas nos nós).

Neste caso, se a opção é utilizar a rede para fornecer vazão para uma nova área a jusante do nó 4, deve-se alterar a capacidade do trecho 6 de forma a aumentar o valor do fluxo máximo a ser obtido neste mesmo nó. Os exemplos e estudos realizados demonstram a adequação e a consistência da metodologia desenvolvida, bem como, revelam seu potencial para análise de redes sob diferentes cenários (restrições) e expectativas (função objetivo).

## CONCLUSÕES

Foi apresentada uma metodologia que permite, através da aplicação de um algoritmo de Programação Linear, a análise de redes hidráulicas visando o interesse para projeto ou operação.

A otimização é sugerida com base no Método da Teoria Linear, com recursos específicos para superar o problema da não linearidade pre-

**Tabela 8. Dados da rede C.**

Trecho	Comprimento (m)	Diâmetro (mm)	Valores iniciais da vazão (l/s)	
			M. Linear	H. Cross
1	1100	150	30.000	6.000
2	1000	220	30.000	30.000
3	1100	150	30.000	6.000
4	500	80	30.000	4.000
5	500	80	30.000	4.000
6	1100	80	30.000	2.000
7	1000	200	30.000	10.000
8	1100	200	30.000	2.000

**Tabela 9. Resultados não otimizados para a rede C.**

Trecho	N <sub>inicial</sub>	N <sub>final</sub>	Hardy-Cross Q(l/s)	Método linear Q(l/s)
1	5	1	8.452	8.618
2	5	2	23.972	24.764
3	5	3	9.576	8.618
4	2	1	0.380	0.327
5	2	3	1.270	0.327
6	1	4	0.832	0.945
7	2	4	10.322	12.109
8	3	4	2.846	0.945
Número de iterações			38	14

**Tabela 10. Resultados otimizados para a rede C.**

Função objetivo Pacote comercial	Caso C.1 (MAX X1) Minos Q(l/s)	Caso C.2 (MAX X2) Minos Q(l/s)
X1	34.000	0.000
X2	0.000	34.000
Q1	4.940	-10.700
Q2	21.220	6.180
Q3	7.840	4.520
Q4	-3.320	-18.800
Q5	0.940	3.560
Q6	1.620	4.490
Q7	11.600	9.420
Q8	0.780	0.080
Iterações	6	6

sente em algumas equações da modelagem de redes. A flexibilidade de adaptação a diferentes topologias de rede, cenários de demanda e suprimento, bem como o potencial de análise fornecido pelo exame dos resultados ótimos caracterizam as

**Tabela 11. Resultados ótimos com restrições de capacidade para a rede C.**

Função objetivo Pacote comercial	Caso C.3 (MAX X1) Minos Q(l/s)	Caso C.4 (MAX X2) Minos Q(l/s)
X1	34.000	33.990
X2	0.000	0.010
Q1	6.410	6.410
Q2	19.690	19.690
Q3	7.900	7.900
Q4	-0.390	-0.004
Q5	1.800	1.800
Q6	6.020	6.020
Q7	6.290	6.280
Q8	1.700	1.700
Iterações	2	2

principais vantagens da modelagem apresentada. O pequeno esforço computacional (ambiente de micro-informática) e a ampla disponibilidade de softwares de programação linear, reforçam as vantagens do algoritmo apresentado. Espera-se

que os resultados deste trabalho possam ser úteis não apenas em termos acadêmicos, oferecendo uma nova alternativa para o emprego da otimização em problemas de redes hidráulicas, mas que também venham subsidiar estudos posteriores visando sua aplicação nos sistemas de abastecimento de água municipais do País.

## REFERÊNCIAS

- BARBOSA, P. S. F., GRACIANO, A. (1993). *Optimal Design of Hydraulic Networks for Water Supply*, The Fifth International Conference on Civil Engineering Computing, Edimburg, UK;
- COLLINS, M., COOPER, L., HELGASON, R., KENNINGTON, J., LeBLANC, L. (1978). Solving the Pipe Network Analysis Problem Using Optimization Techniques, *Management Science*, v.24, nº 7, p747- 760.
- EIGER, G., SHAMIR, U., BEN-TAL, A. (1994). Optimal Design of Water Distribution Networks, *Water Resources Research*, v.30, nº9, p2637-2646.
- GUERCIO, R., XU, Z. (1997). Linearized Optimization Model for Reliability-Based Design of Water Systems, *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, v. 123, nº 11, p1020-1026.
- HALL, M. A. (1976). Hydraulic Network Analysis Using (Generalized) Geometric Programming, *Networks*, 6, p105-130.
- LANSEY, K. L., MAYS, L. W. (1989). Optimization Model for Water Distribution System Design, *Journal of Hydraulic Engineering*, v. 115, p1401-1418.
- SHAMIR, U. (1974). Optimal Design and Operation of Water Distribution Systems, *Water Resources Research*, 10 (1):27-36.
- WOOD, D., CHARLES, C. (1972). Hydraulic Network Analysis Using Linear Theory, *Journal of Hydraulics Division*, ASCE, v. 98, nº HY7, p1157-1170.

## A Linear Programming Algorithm to Analyze Hydraulic Networks

### ABSTRACT

The analysis of hydraulic networks, both for design or operation purposes, has called the attention of many researchers, especially considering the growing demands for water supply as a result of urbanization processes. These problems accept a broad diversity of focuses and approaches. Analysis can be useful for sizing pipes and reservoirs and control components such as reservoirs and valves. Although a large number of studies have already been performed concerning operational problems, it is a field in which not all techniques have been transferred to the practice of firms in charge of water supply systems. In both problems there is a phase during which flows established in different segments of the network are analyzed, considering a given configuration of demands and piezometric heads on the nodes. In the context of available optimization techniques, it is proposed to use a model which employs Linear Programming (LP), with several mechanisms used to get around the problem of non-linearity, thus overcoming the limitations of using LP in this problem of network analysis. Optimization is suggested based on the Linear Theory Method, with specific resources to deal with the non-linearity present in some equations used for network modeling. The flexibility of adaptation to different network topologies, supply and demand scenarios, and also the analysis potential supplied by examining optimum results characterize the main advantages of the modeling presented.