

## OTIMIZAÇÃO DA OPERAÇÃO DE RESERVATÓRIO PELA PROGRAMAÇÃO DINÂMICA EM UM PROCESSO DE DECISÃO MARKOVIANO

**Arisvaldo Vieira Mélo Jr.**

CNPq – Universidade Federal de Sergipe - Depto. Engenharia Civil  
[arivimel@infonet.com.br](mailto:arivimel@infonet.com.br)

**Leonardo Nogueira Matos**

Universidade Federal de Sergipe – Depto. Ciências da Computação e Estatística  
[lnmatos@sergipe.ufs.br](mailto:lnmatos@sergipe.ufs.br)

### RESUMO

*Apesar de se constituir em uma técnica bastante utilizada na otimização da política operacional de reservatórios, a Programação Dinâmica (PD) ainda padece do mal da dimensionalidade. Um modelo de PD estocástico foi proposto para otimizar o uso da água de um reservatório para fins de regularização, considerando o influxo e a demanda de irrigação como variáveis aleatórias, arranjadas em um processo Markoviano de primeira ordem. O modelo foi aplicado ao reservatório Poção da Ribeira, Estado de Sergipe, e forneceu uma solução ótima para a descarga mensal. Não ocorreram problemas de alocação de memória e de velocidade de processamento quando se utilizaram cinco níveis da variável de estado (volume armazenado), cinco níveis da variável de decisão (descarga) e cinco classes de probabilidades condicionais, em um computador de média capacidade de processamento. Níveis mais elevados dessas variáveis contribuem para se obter soluções mais confiáveis, mas podem comprometer a resolubilidade do modelo. Os resultados obtidos por este modelo coincidem com aqueles encontrados com um modelo estocástico de programação linear no fato de o reservatório poder operar com descarga de aproximadamente 5 hm<sup>3</sup>/mês, em dez meses do ano.*

### INTRODUÇÃO

A aplicação de técnicas de pesquisa operacional vem, cada vez mais, sendo utilizada na análise de sistemas de recursos hídricos, devido à sua elevada capacidade de determinar decisões ótimas sob vários aspectos. O processo de decisão de múltiplo estágio, ou a Programação Dinâmica (PD), tem uma grande aceitação no planejamento da operação de reservatórios porque, nestes modelos, a tomada de decisão assume uma natureza seqüencial. Além disso, podem ser incorporados

aspectos não lineares e estocásticos na formulação do problema.

A operação ótima de reservatórios consiste em se estabelecer uma vazão de descarga que maximize ou minimize uma função objetivo e que está sujeita a equações restrições. O equacionamento básico de um problema de PD também envolve uma função de mudança de estado e uma função recursiva. Muitos autores sugeriram formulações para otimizar a operação de reservatórios utilizando a PD estocástica, podendo-se citar Nemhauser (1966), Heidari et al. (1971), Dudley e Burt (1973), Askew (1974), Becker e Yeh (1974), Murray e Yakowitz (1979), Maidment e Chow (1981), Stedinger et al. (1984), Yeh (1985), Pereira e Pinto (1985), Mariño e Loaigiga (1985), Trezos e Yeh (1987 e 1989), Kelman et al. (1989), Paudyal et al. (1990), Labadie (1990), Braga et al. (1991).

Ao considerarmos os influxos e as demandas aleatórios, o número de variáveis de estado do modelo é demasiadamente discretizado, provocando o problema de dimensionalidade. Nestes casos, o número de alternativas a serem verificadas em cada estágio é elevado, o que dificulta a busca do caminho ótimo, comprometendo a eficiência computacional do modelo (Heidari et al., 1971; Trezos e Yeh, 1989 e; Barros, 1997). Para reduzir o problema de dimensionalidade, vários autores utilizaram diferentes técnicas de otimização, podendo-se citar Becker e Yeh (1974) que aplicaram a técnica da programação linear e dinâmica, Pereira e Pinto (1985) que utilizaram o princípio de decomposição de Benders, Simonovic e Mariño (1980) que empregaram o método de convolução iterativa, um procedimento de busca Fibonacci e um método de programação não linear para calcular os valores ótimos das variáveis de decisão, e Mélo Jr. et al. (1997) que utilizaram o método de convolução em um modelo de programação linear com restrições probabilísticas para estabelecer a política operacional ótima de um reservatório.

Neste trabalho, é apresentada uma alternativa de solução para o problema de otimização

do uso da água de um reservatório para fins de regularização, utilizando um modelo de PD estocástico. A calibração do modelo será feita tomando-se como exemplo o abastecimento de um centro urbano e de um projeto de irrigação, no Estado de Sergipe.

## MÉTODO DE ANÁLISE

O problema consistiu em estabelecer a operação ótima de um reservatório para regularizar a vazão de abastecimento da cidade de Itabaiana e de um projeto de irrigação. O influxo e a demanda de irrigação são variáveis sujeitas à incerteza e, por isso, o emprego do modelo de programação dinâmica estocástico poderia fornecer uma solução mais realista ao problema. A variável de estado assumida no modelo, foi o volume armazenado e a variável de decisão foi a descarga. Os estágios foram representados pelos intervalos de tempo fixados para a decisão (Yeh, 1985). A equação de mudança de estado foi caracterizada pela equação da continuidade:

$$S_{t+1} = S_t + (q_t - d_t) - k_t - e_t \cdot A(S_t) - x_t \quad (1)$$

em que  $S_t$  é o volume de água no início do mês  $t$ ,  $q_t$  é o influxo estocástico no mês  $t$ ,  $d_t$  é a demanda estocástica de irrigação no mês  $t$ ,  $k_t$  é a demanda determinística de água para abastecimento municipal no mês  $t$ ,  $e_t$  é a evaporação líquida no mês  $t$  (isto é, a evaporação menos precipitação sobre a superfície do reservatório),  $A$  é a área da superfície do reservatório calculada da curva área-volume dado  $S_t$ ,  $x_t$  é a descarga de água liberada a jusante do reservatório no período, e  $t$  o período de tempo mensal, numerado a partir do término do horizonte de planejamento (numerado regressivamente em relação ao tempo real). As unidades das variáveis da Equação (1) são  $\text{hm}^3$ .

A função objetivo (2) é uma função da descarga operada e do armazenamento e representa a soma máxima entre a descarga máxima e a mensal  $B_t(S_t, x_t)$ :

$$\max \left[ \sum_{t=1}^T B_t = \frac{x_{\max} + x_t}{x_{\max}} \right] \quad (2)$$

em que  $x_{\max}$  é a descarga máxima e  $B_t$  é a função de retorno.

A presença das variáveis aleatórias  $q_t$  e  $d_t$  limitam a eficiência do modelo porque os níveis de probabilidade a serem considerados seriam elevados, o que aumentaria o número de alternativas a

serem verificadas em cada estágio. Esta dificuldade de poderá ser reduzida se as variáveis forem agrupadas em uma apenas. Simonovic e Mariño (1980) e Mélo Jr. et al. (1997) utilizaram o método de convolução para obter uma nova variável aleatória  $r_t$ , definida pela diferença entre as variáveis aleatórias originais  $q_t$  e  $d_t$ . Na Equação (1) estas variáveis seriam substituídas pela variável convolucionada. O emprego da convolução pressupõe que as variáveis originais sejam independentes.

## Convolução para obter a distribuição da nova variável aleatória

A distribuição da nova variável aleatória  $r = q - d$  é obtida pela convolução entre as duas variáveis originais. Spiegel (1978) demonstra que a função densidade da subtração das duas variáveis aleatórias contínuas  $q$  e  $d$ , isto é,  $R = Q - D$ , tendo função de densidade conjunta  $f(q, q-r)$ , é dada por:

$$g(r) = \int_{-\infty}^{\infty} f(q, q-r) dq \quad (3)$$

Supondo-se  $q$  e  $d$  independentes,  $f(q, d) = f_1(q) f_2(d)$ . Assim, a Equação (3) é reduzida à (4), passando a ser chamada de convolução de  $f_1$  e  $f_2$ :

$$g(r) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(q) f_2(q-r) dq \quad (4)$$

Expressando as variáveis  $Q$  e  $D$  na forma discreta, para facilitar as operações numéricas, obtém-se a Equação (5), equivalente à (6):

$$P(Q = q, D = q-r) = P(Q = q) P(D = q-r) \quad (5)$$

$$f(q, q-r) = f_1(q) f_2(q-r) \quad (6)$$

A função de probabilidade conjunta  $f(q, q-r)$  pode ser representada como o produto de uma função só de  $q$  e uma função só de  $q-r$ , pois  $Q$  e  $D$  são consideradas independentes. De (5) e (6), pode-se definir a função de probabilidade conjunta de  $Q$  e  $D$  como sendo:

$$P(Q = q, D = q-r) = f(q, q-r) \quad (7)$$

onde:

$$\begin{aligned} f(q, q-r) &\geq 0 \\ \sum_q \sum_{q-r} f(q, q-r) &= 1 \end{aligned}$$

Supondo que Q possa assumir qualquer um dos m valores  $x_1, x_2, \dots, x_m$  e D possa assumir qualquer um dos n valores  $d_1, d_2, \dots, d_n$ , a probabilidade do evento " $Q = q_j, D = d_k$ " é dada pela Equação (8).

$$P(Q = q_j, D = (q - r)_k) = f(q_j, (q - r)_k) \quad (8)$$

A função de distribuição de r é definida pela Equação (9). Os valores min r e max r são verificados para  $\min r = \min q - \max (q - r)_n$  e  $\max r = \max q_m - \min (q - r)$ .

$$P\{R \leq r\} = P(Q \leq q, D \leq q - r) = \sum_{q \leq m} \sum_{q-r \leq n} f(q_j) f(q - r)_k \quad (9)$$

$$\min r \leq r \leq \max r$$

A representação tabular da probabilidade conjunta (Equação 7) é apresentada na Tabela 1. No emprego do método da convolução, os dados mensais de influxo e os de demanda de irrigação, foram ajustados a uma função de distribuição assintótica de extremos do tipo I (distribuição de Gumbel). Os testes do  $\chi^2$  e de Kolmogorov-Smirnov indicaram um ajuste satisfatório para todos os meses.

**Tabela 1. Tábua de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias Q e D.**

D	$d_1$	$d_2$	...	$d_n$
Q	$(q - r)_1$	$(q - r)_2$		$(q - r)_n$
q1	$f(q_1, (q - r)_1)$	$f(q_1, (q - r)_2)$	...	$f(q_1, (q - r)_n)$
q2	$f(q_2, (q - r)_1)$	$f(q_2, (q - r)_2)$	...	$f(q_2, (q - r)_n)$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
qm	$f(q_m, (q - r)_1)$	$f(q_m, (q - r)_2)$	...	$f(q_m, (q - r)_n)$

### Matriz de transição de probabilidades

Os influxos ocorridos ao reservatório podem ser considerados um processo Markoviano (Stedinger et al., 1984; Yeh, 1985; Braga et al., 1991 e Barros, 1997). Genericamente, este modelo representa um processo estocástico no qual o estado do sistema, em qualquer estágio, depende somente do estado no estágio anterior, e das probabilidades conhecidas.

Dividindo-se a variável aleatória R em m intervalos de classes, em cada estágio (por exemplo, o mês), e considerando que as classes compõem estados mutuamente exclusivos, pode-se construir uma matriz de transição mxm mostrando a fre-

quência com que um dado intervalo de classe é sucedido por outro. Esta matriz representa uma maneira concisa de expressar a ocorrência de um estado seguido de outro (Figura 1).

	DE i ( $m_i$ )	Total da linha
PARA j ( $m_{j+1}$ )	$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$	$\sum_{i=1}^m a_j$
Total da coluna	$\sum_{j=1}^m a_i$	$\sum a_j$

**Figura 1. Matriz de transição de frequência.**

A tendência de um estado suceder outro pode ser enfatizada na matriz pela conversão das frequências em frações decimais ou percentagens. Se cada elemento (classe) da  $j^{\text{ésima}}$  linha for dividido pelo seu total, a fração resultante expressará o número de vezes que o estado i é sucedido por outro. No sentido probabilístico, estes números relativos são estimativas da probabilidade condicional  $P(j/i)$ , ou seja a probabilidade que o estado j ocorrerá, dado que o estado presente é i (Figura 2).

	DE i ( $m_i$ )	Total da linha
PARA j ( $m_{j+1}$ )	$\begin{pmatrix} a_{11} / \sum_{i=1}^m a_j & \dots & a_{1m} / \sum_{i=1}^m a_j \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} / \sum_{i=1}^m a_j & \dots & a_{mm} / \sum_{i=1}^m a_j \end{pmatrix}$	1
		1

**Figura 2. Matriz de transição de probabilidade.**

Desde que os estados sejam mutuamente exclusivos e exaustivos, é possível obter a probabilidade de ocorrência de um evento, sendo sua soma é igual a um (Equações 10 e 11).

$$0 \leq P(j/i) \leq 1 \quad (10)$$

$$\sum_j P(j/i) = 1 \quad (11)$$

A sequência na qual um estado é parcialmente dependente de outro precedente é chamada de cadeia de Markov. Quando existe dependência estatística entre os pontos e seus predecessores imediatos, a cadeia é de primeira ordem.

No cálculo das probabilidades de transição, a variável convolucionada  $r_t$  foi dividida em intervalos de classe e contado, o mesmo número de vezes que um dado intervalo foi sucedido por outro. Dividindo-se cada frequência pelo total de casos em cada linha obter-se-á a probabilidade condicional. A série histórica das variáveis aleatórias originais ( $q_t$  e  $d_t$ ) e o número de intervalos de classe da variável convolucionada ( $r_t$ ) podem provocar um grande número de valores de probabilidade iguais a zero a cada transição mensal. Segundo Braga et al. (1991) este fato pode conduzir a soluções não ótimas quando a função objetivo é a maximização do benefício esperado. Por outro lado, quanto maior o número de intervalos de classe, maior o número de probabilidades e também o número de alternativas a serem verificadas. Isso pode agravar o problema de dimensionalidade do modelo. Neste modelo, foi usada uma série histórica das variáveis aleatórias originais de 32 anos e 5 intervalos de classe da variável convolucionada, para calcular a matriz de transição de probabilidade mês a mês ao longo do ano. O ponto médio dos intervalos de classe foi utilizado para representar as respectivas classes nos meses considerados.

A Tabela 2 apresenta um exemplo da matriz de transição, indicando a probabilidade de um determinado intervalo de classe de  $r$  ocorrer em dezembro, dado que ocorreu um outro em novembro.

### Equacionamento do modelo

As probabilidades de transição da variável convolucionada foram utilizadas no modelo Markoviano na tentativa de viabilizar a solução do problema, uma vez que o número de possibilidades a ser verificado será diminuído. A função recursiva (12) e as restrições do modelo ((13) a (16)) estão apresentadas pelas seguintes equações:

$$f_t(S_t, r_{t+1}) = \max_{x_t} \left\{ \sum_{r_t}^{r_{t\max}} P[r_t / r_{t+1}] [B(x_t) + f_{t-1}(S_{t-1}, r_t)] \right\} \quad (12)$$

sujeito a:

$$S_{t-1} = S_t + (q_t - d_t) - k_t - e_t \cdot A(S_t) - x_t \quad (13)$$

**Tabela 2. Matriz de transição de probabilidade para a variável convolucionada.**

$r$ em dezembro ( $hm^3$ )	$r^{(1)}$ em novembro ( $hm^3$ )				
	-1,695 <sup>(2)</sup>	-0,070	1,555	3,180	4,805
-2,044	0,933	0,067	0	0	0
-0,743	0	0	1	0	0
0,559	0	0	1	0	0
1,861	0	0	0,6	0,4	0
3,162	0	0	0	0,5	0,5

<sup>(1)</sup> Variável convolucionada ( $q_t - d_t$ ); <sup>(2)</sup> Ponto médio do intervalo de classe variando de -2,507 a -0,882.

$$f_1(S_1, r_2) = \max_{x_1} \left\{ \sum_{r_1}^{r_{1\max}} P[r_1 / r_2] \cdot B(x_1) \right\} \quad (14)$$

$$m_t \leq S_t \leq c - v_t \quad (15)$$

$$x_{t\min} \leq x_t \leq x_{t\max} \quad (16)$$

em que  $f_t(S_t, r_{t+1})$  é o retorno da operação ótima,  $r_t$  a nova variável aleatória (variável convolucionada) no período  $t$ ,  $B$  o retorno obtido da descarga durante o período de tempo  $t$ ,  $P(r_t / r_{t+1})$  a probabilidade de transição conectando  $r_t$  com  $r_{t+1}$ ,  $c$  a capacidade total do reservatório,  $v_t$  o volume reservado para amortecimento de cheia,  $m_t$  o volume mínimo do reservatório,  $x_{t\min}$  a descarga mínima possível no período  $t$ ,  $x_{t\max}$  a descarga máxima possível no período  $t$ , e  $t$  o período de tempo mensal, numerado a partir do término do horizonte de planejamento (numerado regressivamente em relação ao tempo real).

A Equação (13) representa a mudança de estado e a Equação (14) a solução inicial do problema. Esta equação assume um primeiro valor para o volume armazenado  $S_0$  (zero ou outro qualquer) e resolve  $f_1(S_1, r_2)$  com a probabilidade condicional  $P(r_1 / r_2)$ . As Equações (15) e (16) representam as restrições de não excedência do armazenamento máximo e mínimo, e de descarga do reservatório, respectivamente.

Resolvendo a Equação (12) regressivamente, obtém-se o retorno esperado  $f_t(S_t, r_{t+1})$ . Este valor esperado é verificado sobre todos os possíveis de  $r_t$  ( $r_{t\min}$  a  $r_{t\max}$ ), durante o período de tempo corrente  $t$ , com probabilidade  $P(r_t / r_{t+1})$ . Este procedimento permitirá identificar os possíveis valores de  $x_t$  e selecionar aqueles que maximizem o retorno total esperado.

## Algoritmo de solução

O algoritmo empregado na solução do problema é apresentado a seguir. O programa computacional desenvolvido poderá ser obtido com os autores desse trabalho. As instruções de uso do programa estarão incluídas em arquivo específico a ser lido antes da abertura do executável.

Início

```
obter dados do problema
calcular solução inicial
para mês de 2 até 12 faça
  calcular solução (mês)
imprimir resultados
```

Fim

Calcular Solução Inicial

Início

```
para s de 1 até max nível faça
  para x de 1 até x max faça
    para k de 1 até p max faça
      para l de 1 até p max faça
        f [1, s, x, k, l] ← prob-condicional [12, k, l] *
        B(x)
```

Fim

A matriz prob-condicional [mês, lin, col] contém os valores de probabilidade condicional de um mês dado o mês anterior, para lin x col níveis de "r".

Calcular Solução (mês = inteiro)

Início

```
para s de 1 até min-nível
  para x de 1 até num-descarga
    para k de 1 até num-p
      para l de 1 até num-p
        Sa ← Santerior (mês, s, x, k);
        se ∃ Sa
          então f [mês, s, x, k, l] ← 0
          senão f [mês, s, x, k, l] ← prob-condicional
            [13-mês, k, l] * (B(x) + max {f mês, nível do
            reservatório})
          mês = mês anterior
          nível do reservatório = Sa
        fim se
```

Fim

"Santerior" é a função que retorna o valor do nível do reservatório no mês anterior com base na equação da continuidade e nos valores discretizados dos níveis do reservatório. Inicialmente calcula-se o nível do reservatório no mês anterior, levando-se em consideração apenas a equação da continuidade, em seguida aproxima-se o valor do nível do reservatório calculado para algum dos valores constantes no vetor de níveis do reservatório, caso o nível calculado esteja dentro dos limites preestabelecidos do mês em questão (Smin e Smax). Caso o valor calculado esteja fora destes limites, a função retorna um sinal que indica a não existência de S no mês anterior.

Santerior (mês, s, x, k: inteiro) // Interpolação

Início

```
Scalc ← nível s + r [mês]-k [mês]-e [mês]-vazão
[x];
se Scalc ∈ [Smin, Smax]
  então retorne nível [n], onde n = arg min { | nível
  [n]-Scalc | }
  senão retorne s inexistente
fim se
```

Fim

Quando um próximo estado fica entre dois valores discretizados é necessário usar um procedimento de interpolação para calcular a função de retorno deste ponto. O valor do estado seguinte é sempre aproximado para o valor discretizado mais próximo entre os dois em que ele está inserido. Isto é verificado pelo valor absoluto da diferença entre o nível discretizado e o estado calculado. O espaço a ser verificado é aquele delimitado pelo volume armazenado máximo e mínimo.

## Série histórica de vazões afluentes ao reservatório

Os dados de influxo de água ao reservatório foram obtidos por modelagem chuva x vazão, uma vez que só existiam dois anos de leitura de vazão. A vazão afluente é proveniente de dois rios que deságuam diretamente na área inundada pelo reservatório. Por isso, estas vazões foram simuladas separadamente. Na simulação utilizou-se o modelo Smap, com intervalo de tempo mensal (Lopes et al., 1982). Primeiro, fez-se a calibração do modelo para o rio das Pedras e o rio Traíras, cujas áreas de drenagem são 56 e 142 km<sup>2</sup> res-

pectivamente, usando dois anos de dados observados de vazão e precipitação (1995 e 1996). Depois, foi feita uma modificação na rotina de cálculo do modelo Smap para simular uma série de 32 anos de vazão, tomando-se como base, dados de precipitação conhecidos.

Os coeficientes de correlação linear entre as vazões observada e calculada, na etapa de calibração, foram de 0,931 e 0,753 para as sub-bacias dos rios das Pedras e Traíras, respectivamente. A correlação entre as vazões simuladas e observadas, para os dois últimos anos da série, apresentaram coeficientes ligeiramente maiores que os obtidos na calibração (0,933 e 0,77 para os rios das Pedras e Traíras, respectivamente), indicando boa consistência dos dados simulados.

### Série histórica de demanda de irrigação

O volume de água estimado para a irrigação das culturas plantadas na área do projeto foi calculado pelo balanço hídrico climatológico, baseado na série de 32 anos de dados mensais de precipitação e nos valores médios mensais de evapotranspiração. O balanço assumiu uma capacidade fixa de armazenamento de água no solo de 100 mm, que é um valor médio para uma grande variedade de solos e para uma profundidade da ordem de 1 m. O processo de contabilização indicou a lâmina de água que faltou às plantas, em  $\text{m}^3/\text{ha}$ , para que o desenvolvimento fosse realizado em condições ideais (Reichardt, 1987).

No cálculo da lâmina de água necessária para a irrigação, o coeficiente de cultura de todas as plantas cultivadas no local foi considerado igual a um. A demanda mensal de irrigação foi calculada para a área total do projeto (1100 ha), abastecida pelo reservatório. A demanda de irrigação mudará com a variação da área para a qual se quer analisar o problema.

### Características físicas do reservatório

A capacidade total de armazenamento de água do reservatório (c) é de  $16,13 \text{ hm}^3$ . Em recente visita ao reservatório, pôde-se observar acúmulo de sedimentos em seu leito, causando uma diminuição do volume total. Devido a impossibilidade de se quantificar o volume ocupado pelos sedimentos, optou-se por trabalhar com o volume original. Da relação área-volume ajustou-se a seguinte equação:

$$A = 4,4858 + 22,2688 S - 0,493 S^2 \quad (17)$$

onde A é obtido em  $\text{hm}^2$  e S dado em  $\text{hm}^3$ . O coeficiente de correlação foi próximo de 100%. A Equação (17) foi utilizada na determinação do volume médio mensal evaporado do reservatório, conforme mostrado em (13).

A quantidade mensal de água evaporada da superfície do reservatório foi calculada multiplicando-se a área do espelho d'água pela evaporação líquida local ( $e_t$ ). No mês em que a evaporação foi menor que a precipitação,  $e_t$  assumiu o valor zero, e quando isso não ocorreu  $e_t$  assumiu o valor da própria diferença entre as duas variáveis climáticas. Os dados mensais de  $e_t$  estão apresentados na Tabela 3.

Outros dados do reservatório, considerados na análise do problema foram: volume reservado para amortecimento de cheia ( $v_t$ ) = 0,4; 0,4; 0,4; 0,4; 0,81; 0,81; 0,81; 0,81; 0,4; 0,4; 0,4; 0,4  $\text{hm}^3$  para os meses de janeiro a dezembro, respectivamente, volume mínimo ( $m_t$ ) =  $0,8 \text{ hm}^3$ , descarga máxima possível ( $x_{t \max}$ ) =  $5 \text{ hm}^3$  e descarga mínima possível ( $x_{t \min}$ ) =  $0,5 \text{ hm}^3$ .

**Tabela 3. Evaporação líquida da superfície do reservatório e demanda mensal de água para abastecimento urbano.**

Mês	Evaporação líquida ( $e_t$ ), $\text{m}^3/\text{m}^2$	Demanda municipal ( $k_t$ ), $\text{hm}^3$
Janeiro	0,167	0,2168
Fevereiro	0,136	0,2173
Março	0,116	0,2178
Abril	0,059	0,2183
Maio	0,015	0,2188
Junho	0,000	0,2193
Julho	0,000	0,2198
Agosto	0,030	0,2204
Setembro	0,076	0,2209
Outubro	0,133	0,2214
Novembro	0,133	0,2219
Dezembro	0,156	0,2224

### Demanda municipal de água

A demanda mensal de água para abastecimento urbano foi calculada em função do número de habitantes a ser abastecido e da quantidade de água necessária à cada indivíduo. A estimativa do número de habitantes na localidade, ao fim de cada mês, foi feita com base no processo aritmético, que utiliza o incremento populacional observado entre

os dois últimos censos. O valor assumido para a quantidade de água necessária por habitante foi de 150 litros/hab dia (Yassuda e Nogami, 1984). A demanda mensal calculada está apresentada na Tabela 3.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

O modelo estocástico de otimização da política operacional do reservatório consistiu em: se maximizar o retorno total esperado da operação ótima com o objetivo de se obter a máxima soma entre a descarga máxima e a descarga mensal, tendo como restrições uma equação de mudança de estado, uma solução inicial  $f_1(S_1, S_0 = 0, r_2)$  e a não excedência dos armazenamentos máximo e mínimo do reservatório.

O volume reservado à proteção de enchente nos meses mais chuvosos (maio, junho, julho e agosto) foi de  $0,81 \text{ hm}^3$ , enquanto que nos meses restantes foi de  $0,4 \text{ hm}^3$ . Isso fez com que o limite do armazenamento máximo fosse de 15,32 e  $15,73 \text{ hm}^3$  para os meses chuvosos e os menos chuvosos, respectivamente. Foi observado um certo acúmulo de sedimentos no leito do reservatório. Apesar da diminuição do volume total, optou-se por trabalhar com o volume original devido a impossibilidade de se quantificar o volume ocupado pelos sedimentos, em tempo hábil. Esta aproximação não afetou a análise do desempenho do modelo em questão. Entretanto, para se obter uma solução mais acurada do problema, é necessário resolvê-lo com informações correntes.

A quantidade de níveis da variável de estado ( $S_t$ ) e da variável de decisão ( $x_t$ ) pode ser definida dentro dos seus respectivos limites máximos e mínimos de armazenamento e descarga. O número de intervalos de classe da variável convolucionada ( $r_t$ ) terá que ser definido para que se possa calcular as matrizes de transição de probabilidades. O programa computacional desenvolvido fornece a opção de se trabalhar com vários níveis de variáveis de estado, de decisão e de probabilidade, desde que se modifiquem as rotinas de leitura de dados. De acordo com o computador utilizado, quantidades elevadas dessas variáveis podem provocar problemas de alocação de memória (capacidade de armazenamento de dados) e de velocidade de processamento. No presente caso, foram utilizados cinco níveis de armazenamento de água no reservatório  $S_t = \{0,8; 4,3; 7,8; 11,3 \text{ e } 14,8 \text{ hm}^3\}$ , cinco níveis de descarga mensal  $x_t = \{0,5; 1,7; 2,9; 4,1 \text{ e } 4,9 \text{ hm}^3/\text{mês}\}$  e cinco classes da variável convolucionada  $r_t$  em cada mês. O uso de um computador com 32 Mbytes de memória principal e velocidade

de processamento de 166 Mhz, foi capaz de ler o arquivo de entrada dados, resolver o problema e salvar os resultados em arquivo de saída em poucos segundos.

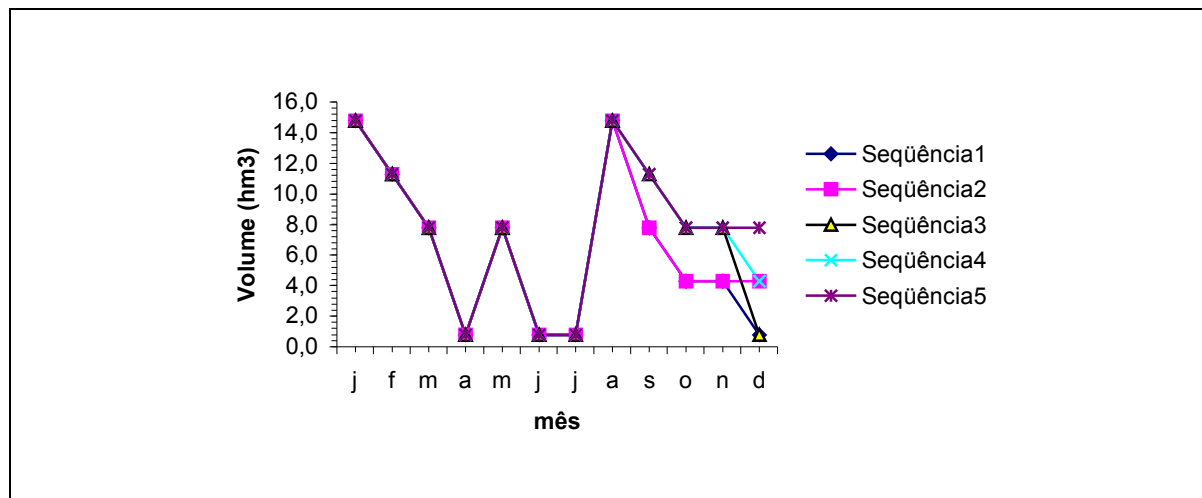
Heidari et al. (1971) propuseram um modelo de PD diferencial discreta no qual é definido uma trajetória que satisfaz um conjunto de condições iniciais e finais, onde é aplicada a equação recursiva em sua vizinhança, resolvendo o problema iterativamente. O problema composto por quatro reservatórios, considerando os influxos determinísticos, foi resolvido em poucos segundos utilizando-se um computador IBM 360/75.

Pereira e Pinto (1985) e Mariño e Loaiciga (1985) também sugeriram algoritmos de PD para sistemas de multireservatórios, que mantêm o requerimento computacional e problemas de dimensionalidade em baixos níveis, podendo ser resolvidos através de modernos microprocessadores.

A solução do problema produziu cinco alternativas ótimas. Todas elas apresentaram as mesmas variáveis para todos os meses e produziram o mesmo valor da função de retorno esperado [ $f_t(S_t, r_{t+1}) = 20,67$  para  $t = 12$ ]. Pode-se afirmar portanto, que a operação ótima de descarga, de janeiro a dezembro, foi de 2,9; 4,9; 4,1; 4,9; 4,9; 4,9; 4,9; 4,9; 4,9; 4,9; 4,9;  $4,9 \text{ hm}^3/\text{mês}$ , respectivamente.

As variáveis de estado calculadas para as cinco alternativas estão apresentadas na Figura 3. Estas possibilidades surgem de acordo com a variação mensal dos valores da variável de decisão, com a variável convolucionada ( $r = q - d$ ) e com as probabilidades condicionais calculadas. Qualquer uma das cinco seqüências de valores da variável de estado (volume de água do reservatório), tem a mesma chance de ocorrência. Isso pode ser verificado se calcularmos a probabilidade de ocorrência de uma das cinco seqüências, por exemplo:  $14,8 \rightarrow 11,3 \rightarrow 7,8 \rightarrow 0,8 \rightarrow 7,8 \rightarrow 0,8 \rightarrow 0,8 \rightarrow 14,8 \rightarrow 7,8 \rightarrow 4,3 \rightarrow 4,3 \rightarrow 0,8$  de janeiro a dezembro. As matrizes de transição de janeiro a dezembro indicam probabilidades condicionais de 1; 1; 1; 1; 1; 1; 0,821; 1; 1; 1; 1; 1, respectivamente. Multiplicando-se estes valores verifica-se que a probabilidade da seqüência é de 82,1%. Utilizando o mesmo procedimento para as outras seqüências obter-se-ão valores idênticos de probabilidade.

Probabilidades iguais a um nas matrizes de transição, podem mascarar a possibilidade de se encontrar chances diferentes de ocorrência das seqüências, dificultando a identificação de uma alternativa mais provável para os volumes mensais armazenados no reservatório.



**Figura 3. Seqüências de valores do volume armazenado no reservatório de janeiro a dezembro.**

Cada seqüência deve ser analisada isoladamente. Caso o volume do reservatório observado em setembro seja de  $7,8 \text{ hm}^3$ , em outubro e novembro só poderá ser de  $4,3 \text{ hm}^3$ . Em dezembro pode-se chegar a  $4,3$  ou  $0,8 \text{ hm}^3$ . Do ponto de vista prático, o que mais importa é a obtenção da política operacional ótima. Obtendo-se as variáveis de decisão, e satisfazendo as demandas requeridas, o volume do reservatório passa a ser uma consequência da dinâmica do balanço hídrico do reservatório.

Um grande número de probabilidades condicionais igual a zero pode conduzir a soluções não ótimas. No presente caso, este problema apareceu quando se utilizaram cinco níveis de probabilidades condicionais. É recomendado que se trabalhe com número maior de intervalos de classe da variável convolucionada ( $r_i$ ) no sentido de evitar este problema. Não obstante, um grande número de probabilidades poderá provocar um aumento no número de alternativas a serem verificadas, o que comprometerá a resolubilidade do modelo, mesmo considerando a vantagem de se utilizar a convolução para agrupar as variáveis aleatórias (Simonic e Mariño, 1980; Trezos e Yeh, 1989 e Barros, 1997).

Paudyal et al. (1990) e Braga et al. (1991) defrontaram-se com problema semelhante e disseram que o grande número de elementos zero na matriz de transição, não só causam o aumento do tempo e da memória computacional, mas podem afetar a performance global do modelo.

Maidment e Chow (1981) disseram que a discretização das probabilidades do influxo, no modelo de PD, constitui fonte de imprecisão. Por isso, recomendaram uma distribuição contínua de

probabilidade. Entretanto, o tempo de processamento e o requerimento de memória computacional aumentaram de tal forma que se tornou difícil a consideração simultânea de vários reservatórios.

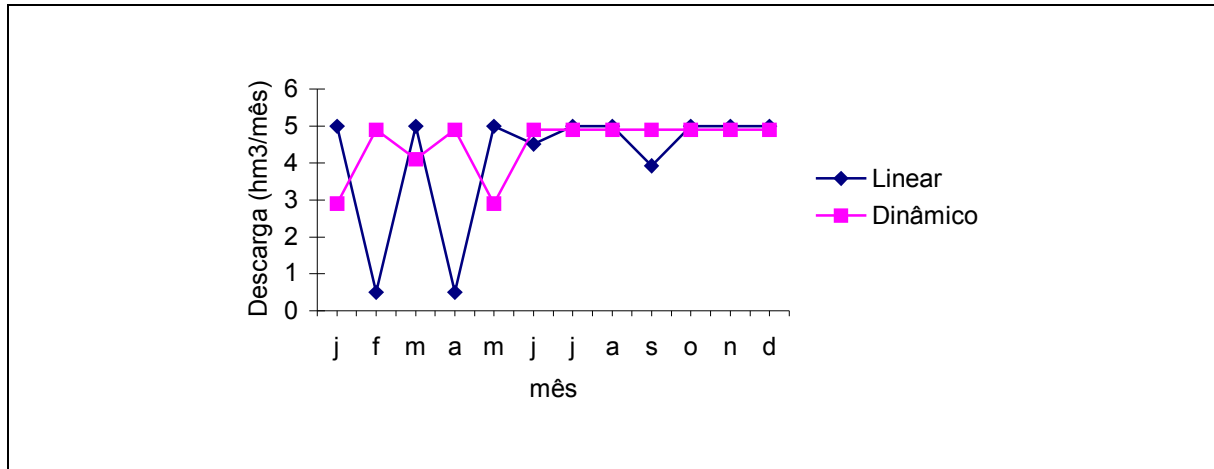
Como visto, a discretização das variáveis de estado, de decisão e das probabilidades condicionais relacionadas à variável convolucionada, pode influenciar o resultado e a eficiência computacional do modelo de otimização. Neste caso, cabe a observação feita por Askew (1974) de que a intensidade da discretização deve ser decidida com base no compromisso entre a acuracidade desejada e o tempo e custo disponíveis para a análise.

Confrontando os resultados obtidos com aqueles encontrados com o modelo estocástico de programação linear, usado no mesmo problema (Méllo Jr. et al., 1997), pode-se dizer que as diferenças observadas na solução ótima para a operação do reservatório são inerentes à própria concepção de cada modelo.

O modelo linear inclui em suas restrições, níveis preestabelecidos de probabilidades para que sejam respeitadas a não excedência do armazenamento máximo e mínimo. O modelo oferece soluções viáveis para condições específicas de trabalho e se mostra eficaz pelo fato de usar o algoritmo simplex.

A Figura 4 mostra as descargas mensais obtidas com a resolução dos modelos estocásticos de programação linear e de programação dinâmica. Pode-se notar uma forte variação das descargas calculadas pelo modelo linear, nos primeiros cinco meses. Isto ocorreu porque o modelo não penaliza possíveis violações nas restrições probabilísticas e não promove ações recursivas para corrigir tais violações como uma penalidade.





**Figura 4. Descargas calculadas pelos modelos de programação linear e dinâmica para os meses de janeiro a dezembro.**

As descargas selecionadas pelo modelo dinâmico são limitadas aos valores definidos no vetor de variáveis de decisão. Quanto maior o número de variáveis, maiores as chances de se obter soluções mais realistas. No modelo linear, os valores possíveis das descargas são aqueles pertencentes ao conjunto dos números reais que estiverem incluídos dentro dos limites das restrições.

Também é observado na Figura 4 uma menor variação das descargas obtidas com o uso do modelo dinâmico nos primeiros cinco meses. Isto pode ser atribuído ao procedimento recursivo de solução do problema e à inclusão da cadeia de Markov no equacionamento do modelo.

A política operacional ótima obtida pelos modelos indicam que, no presente caso de estudo, ocorre coincidência nos valores de descarga em oito meses, e que é possível operar com descargas próximas da máxima, em dez meses do ano. Isto sugere a possibilidade de dispor de mais água para abastecimento urbano e para satisfazer o aumento da área irrigada, caso se resolva diminuir o limite superior da restrição de descarga ou até mesmo zerar a descarga. Esta decisão dependerá do destino que se quer dar à água a jusante do reservatório, ou seja, do planejamento integrado do uso da água em toda a bacia hidrográfica, na qual está inserido o reservatório.

Os modelos apresentam valores opostos de descarga nos meses de fevereiro e abril. Isto pode ser devido ao fato do modelo linear ter optado por usar uma descarga elevada em janeiro e ter que armazenar água em fevereiro, para satisfazer o objetivo de minimizar a diferença entre a descarga máxima e a de março. O modelo dinâmico com-

penha de forma mais equilibrada as descargas nos três primeiros meses, selecionando uma descarga menor em janeiro, um valor elevado em fevereiro e outro menor em março. Raciocínio idêntico pode ser empregado para entender a variação das descargas nos meses subsequentes para os dois modelos.

Os modelos estudados apresentam particularidades inerentes às suas formulações, que devem ser consideradas ao serem utilizados para auxiliar a tomada de decisão na operação de descarga de reservatórios. A escolha de um deles dependerá das particularidades de cada caso.

É importante ressaltar que, um modelo matemático de um sistema é uma simplificação da realidade. Os modelos apenas indicam propostas de solução, que devem ser interpretados em conformidade com as pressuposições utilizadas e as simplificações do mundo real.

## CONCLUSÕES

O modelo proposto fornece uma solução ótima para a retirada mensal de água do reservatório, levando em consideração restrições de não excedência dos limites máximos e mínimos do volume armazenado e da descarga, níveis de probabilidades condicionais de uma variável aleatória, agrupada pelo método da convolução, e valores preestabelecidos de volumes e descargas mensais.

Níveis elevados de variáveis de estado e de decisão, assim como o uso de vários intervalos de classe nas matrizes de transição de probabilidades, contribuem para a obtenção de soluções mais confiáveis, mas podem comprometer a reso-

lubilidade do modelo devido à sua dimensão. A escolha do número e dos valores das variáveis do problema são determinantes para a qualidade e a representatividade dos resultados.

Os valores de descarga obtidos por este modelo de programação dinâmica, coincidem com os obtidos por um modelo de programação linear, em oito meses. O primeiro produziu uma menor variação nos valores de descarga nos cinco primeiros meses do ano. Os dois modelos indicam a possibilidade de se operar com descargas próximas da máxima, em dez meses do ano.

## REFERÊNCIAS

- ASKEW, A. J. (1974). Chance-constrained dynamic programming and the optimization of water resource systems. *Water Resources Research*, v.10, n° 6, p1099-84, 1106.
- BARROS, M. T. L. (1997). A programação dinâmica aplicada à engenharia de recursos hídricos. In: Porto, R. L. L. org. *Técnicas quantitativas para o gerenciamento de recursos hídricos*, Porto Alegre, ed. Universidade/UFRGS/ARRH, p239-303.
- BECKER, L.; YEH, W. W. G. (1974). Optimization of real time operation of multiple-reservoir system. *Water Resources Research*, v.10, n° 6, p1107-12.
- BRAGA, B. P. F.; YEH, W. W. G.; BEKER, L.; BARROS, M. T. L. (1991). Stochastic optimization of multiple-reservoir-system operation. *Journal of Water Resources Planning and Management*, v.117, n° 4, p471-81.
- DUDLEY, N. J.; BURT, O. R. (1973). Stochastic reservoir management and system design for irrigation. *Water Resources Research*, v.9, n° 3, p507-21.
- HEIDARI, M. A.; CHOW, V. T.; KOKOTOVIC, P. V.; MEREDITH, D. D. (1971). Discrete differential dynamic programming approach to water resources systems optimization. *Water Resources Research*, v.7, n° 2, p273-82.
- KELMAN, J.; COOPER, L. A.; HSU, E.; YUAN, S. Q. (1989). Use of probabilistic constraints in reservoir operation policies with sampling stochastic dynamic programming. In: *Water Resources Operations Management Workshop*, 3., Fort Collins, 1988. *Computerized decision support systems for water managers: proceedings*. New York, ASCE, p509-15.
- LABADIE, J. W. (1990). Dinamic programming with the microcomputer. In: *Encyclopedia of microcomputer*. Ed. Kent, A.; Williams, J. G., p275-338, (mimeografado).
- LOPES, J. E. G.; BRAGA, B. P. F.; CONEJO, J. G. L. (1982). *SMAP – Soil moisture accounting*. *Water Resources Publications*.
- MAIDMENT, D. R.; CHOW, V. T. (1981). Stochastic state variable dynamic programming for reservoir systems analysis. *Water Resources Research*, v.17, n° 6, p1578-84.
- MARIÑO, M. A.; LOAICIGA, H. A. (1985). Dynamic model for multireservoir operation. *Water Resources Research*, v.21, n° 5, p619-30.
- MÉLLO JR, A. V.; BRAGA, B. P. F.; ROCHA, J. C. S. (1997). Otimização estocástica linear aplicada à operação de reservatórios. In: Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos, 12., Vitória. *Anais. ABRH*, p451-57.
- MURRAY, D. M.; YAKOWITZ, S. J. (1979). Constrained differential dynamic programming and its application to multireservoir control. *Water Resources Research*, v.15, n° 5, p1017-27.
- NEMHAUSER, G. L. (1966). *Introdution to dynamic programming*, Jonh Wiley, New York.
- REICHARDT, K. (1987). *A água em sistemas agrícolas*. São Paulo, Manole.
- PAUDYAL, G. N.; SHRESTHA, D. L.; BOGARDI, J. J. (1990). Optimal hydropower system configuration based on operational analysis. *Journal of Water Resources Planning and Management*, v.116, n° 2, p233-46.
- PEREIRA, M. V. F.; PINTO, L. M. V. G. (1985). Stochastic optimization of a multireservoir hydroelectric system: a decomposition approach. *Water Resources Research*, v.21, n° 6, p779-92.
- REIS, L. F. R.; CHAUDHRY, F. H. (1991). Caracterização estocástica da resposta ótima de um sistema hidrelétrico via programação dinâmica. In: Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos, 9, Rio de Janeiro, *Anais. ABRH*, p357-67.
- SIMONOVIC, S. P.; MARIÑO, M. A. (1980). Reliability programming in reservoir management, 1, single multipurpose reservoir. *Water Resources Research*, v.16, n° 5, p844-48.
- SPIEGEL, M. R. (1978). *Probabilidade e estatística*. São Paulo, McGraw-Hill.
- STEDINGER, J. R.; SULE, B. F.; LOUCKS, D. P. (1984). Stochastic dynamic programming models for reservoir operation optimization. *Water Resources Research*, v.20, n° 11, p1499-1505.
- TREZOS, T.; YEH, W. W. G. (1987). Use of stochastic dynamic programming for reservoir

- management. *Water Resources Research*, v.23, n° 6, p983-96.
- TREZOS, T.; YEH, W. W. G. (1989). Stochastic dynamic programming applied to multireservoir systems. In: *Water Resources Operations Management Workshop*, 3., Fort Collins, 1988. *Computerized decision support systems for water managers: proceedings*. New York, ASCE, p559-71.
- YASSUDA, E. R.; NOGAMI, P. S. (1984). Consumo de água. In: Oliveira, W. E. et al. *Técnicas de abastecimento e tratamento de água*. São Paulo, CETESB, p107-134.
- YEH, W. W. G. (1985). Reservoir management and operations models: a state-of-the-art review. *Water resources Research*, v.21, n° 12, p1797-818.

## **Reservoir Operation Optimization Using Dynamic Programming in a Markovian Decision Process**

### **ABSTRACT**

Although it is a technique which is frequently used to optimize the operational policy of reservoirs, dynamic programming (PD) still has dimensionality problems. A stochastic PD model was proposed to optimize water use in a reservoir for regulation purposes, considering the inflow and irrigation demand as random variables organized in a first order Markovian process. The model was applied to Poção da Ribeira reservoir, in the state of Sergipe, and offered an optimal solution for monthly discharge. No problems of memory allocation and processing speed occurred when five levels of the state variable (stored volume), five levels of the decision variable (discharge) and five conditional probability classes were used, in a computer with medium processing capacity. Higher levels of these variables help obtain more reliable information, but they could compromise model resolvability. The results obtained by this model are the same as those found in the stochastic linear programming model in that the reservoir can operate with an approximately 5 hm<sup>3</sup>/month discharge ten months a year.