

ESTIMAÇÃO CONJUNTA DOS PARÂMETROS DE UM MODELO ESTOCÁSTICO MULTIVARIADO CONTEMPORÂNEO PERIÓDICO AUTO-REGRESSIVO - PAR(P)

Ailton de Mesquita Vieira

ELETROBRÁS - Projeto Paraíba do Sul/PQA (SEMA/SERLA-PNUD-MPO-ABC-COPPE/UFRJ)
Caixa Postal 68540 - CEP 21.945-970 - Rio de Janeiro, RJ
ailton@hidro.ufrj.br

Basílio de Bragança Pereira

Instituto de Matemática/UFRJ e Programa de Engenharia de Produção-COPPE/UFRJ
Caixa Postal 68507 - CEP 21945-970 - Rio de Janeiro, RJ
basilio@pep.ufrj.br

Paulo Roberto de Holanda Sales

Diretoria de Operação de Sistemas/ELETROBRÁS, Grupo Coordenador para Operação Interligada/GCOI e
Instituto de Matemática e Estatística/UERJ - Caixa Postal 1639 - CEP 20091-000 - Rio de Janeiro, RJ
gcoi@eletrobras.gov.br

RESUMO

O artigo propõe procedimentos lineares que utilizam o estimador SURE - "Seemingly Unrelated Regression Equations" (Sistema de equações aparentemente não-relacionadas) - que permitem a estimação conjunta dos parâmetros de um Modelo Estocástico Multivariado Contemporâneo Periódico Auto-regressivo - PAR(p) - de geração de cenários hidrológicos sintéticos.

INTRODUÇÃO

A modelagem de séries de vazões para múltiplos locais é largamente utilizada no planejamento da operação de sistemas de recursos hídricos de grande porte que usualmente abrangem extensas regiões, contemplando mais de uma bacia hidrográfica, como é o caso do Setor Elétrico Brasileiro. Neste contexto é desejável, como por exemplo, os estudos do GCOI (Grupo Coordenador para Operação Interligada) sobre complementariedades entre bacias e/ou intercâmbios, que os modelos estocásticos de vazões preservem as correlações cruzadas das afluências naturais entre os diferentes locais.

Inicialmente considere-se algumas relações de dependência cruzada que podem ser encontradas entre duas ou mais séries hidrológicas temporais. Os três tipos mais fundamentais de relacionamento podem ser classificados como contemporâneo, unidirecional e de retroação. Duas ou mais séries apresentam um relacionamento contemporâneo somente se os valores correntes são relacionados, isto é, as séries mostram uma de-

pendência instantânea. A dependência unidirecional, por exemplo, entre duas séries X e Y, pode ser definida como se os valores de Y são melhor explicados a partir do passado de seus próprios valores e os de X. Um exemplo óbvio em hidrologia é a relação chuva x vazão. Outro exemplo seria o de que as vazões naturais afluentes a um aproveitamento são importantes na explicação das vazões naturais afluentes a um outro aproveitamento, a jusante do primeiro, no mesmo curso d'água, mas não vice-versa. Já a relação de retroação é dita existir se, e só se o relacionamento é simétrico, isto é, X causa Y e Y causa X. Como exemplo, podem ser citadas as séries de precipitação e evapotranspiração de uma bacia hidrográfica, ou ainda, a relação entre precipitação, evaporação e o armazenamento em um reservatório. Para o caso específico de séries de vazões, a relação de retroação é incomum, no sentido de que para fenômenos físicos o futuro não pode causar o passado. Finalmente, uma quarta situação seria um relacionamento misto entre três ou mais séries, onde, por exemplo, poderia haver um relacionamento apenas contemporâneo entre duas séries, as quais por sua vez apresentam um relacionamento unidirecional com uma terceira série.

A literatura mostra a existência de um grande número de modelos estocásticos multivariados para séries temporais (Pereira, 1984), ainda que para séries temporais sazonais haja um número bem menor de trabalhos, podendo ser destacado o artigo de Salas & Pegram (1977). O motivo da timidez na proposição de modelos multivariados para séries temporais sazonais está em que estes são modelos claramente não-parcimoniosos, que tem identificação complexa e onde a estimação dos parâmetros é sujeita a uma

grande imprecisão. Uma boa referência sobre o uso de modelos estocásticos multivariados em hidrologia é o trabalho de Camacho et al. (1985).

Felizmente, para o caso de modelos estocásticos multivariados de vazões existem razões físicas que permitem simplificações na modelagem multivariada. A principal delas é a constatação freqüente da existência apenas de relacionamento contemporâneo entre séries de vazões. A explicação física é devida ao fato de que precipitações de grande duração em geral são decorrentes da ação frontal entre massas de ar quente e frio. Ao longo da linha de descontinuidade que se forma entre as massas de características diferentes ocorre a precipitação, que atinge de forma relativamente homogênea áreas de grandes extensões.

A análise dos resíduos serialmente independentes dos modelos univariados ajustados às séries de vazões sazonais fornece um instrumento seguro para a identificação do tipo de relação de causalidade entre as séries. Como mostrado em Box & Jenkins (1976) o processo de identificação é mais adequado se executado com as séries de resíduos, e não com as séries originais, dado que a função de correlação cruzada pode ser fortemente influenciada pela magnitude das autocorrelações. Para o experimento foram selecionadas oito séries de vazões médias mensais. Quatro séries são de cursos de água da bacia do rio Paraíba do Sul, respectivamente, Jaguari, Paraibuna, Santa Branca e Funil, e quatro de cursos de água contribuintes ao rio Paraná, respectivamente, Furnas no rio Grande, Itumbiara no rio Paranaíba, Barra Bonita no rio Tietê e Jurumirim no rio Paranapanema. As Figuras 1a, 1b e 1c mostram os gráficos das correlações cruzadas dos resíduos produzidos pelo ajuste de modelos periódicos univariados (Vieira, 1997; Kelman & Vieira, 1997). Uma única série de resíduos foi montada para cada local, a partir do agrupamento das séries sazonais de resíduos transformados (normais) serialmente independentes decorrentes dos ajustes do modelo PAR(p), identificados segundo critério proposto em Vieira (1997). É razoável haver a estimação das funções de correlação cruzada com as séries totais de resíduos. Em séries de vazões é muito raro a existência de um relacionamento espacial que se altere com as estações.

A hipótese de relacionamento nulo considera os limites de um intervalo de confiança de 95% dados por $\pm 1,96/\sqrt{T}$, onde T é o número

total de pares de observação. A análise dos 28 gráficos permite observar uma enorme predominância do relacionamento apenas contemporâneo. Uma única exceção é o caso da série de Funil, que indica um comportamento um pouco distinto das demais, no sentido que registra também, ainda que em menor escala, um relacionamento unidirecional com as séries de montante (Paraibuna, Santa Branca e Jaguari), bem como, com as séries da bacia dos rios Tietê (Barra Bonita) e Paranapanema (Jurumirim). Uma explicação física para a existência de um relacionamento unidirecional com as séries de montante pode ser intuída pelo fato dos aproveitamentos de Paraibuna e Jaguari estarem situados na parte mais alta da bacia, sujeitos assim a precipitações localizadas de origem orográfica, cujos efeitos a jusante consideram o tempo de trânsito da água. Já uma explicação para relacionamentos unidirecionais com séries das bacias dos rios Tietê e Paranapanema é de elaboração mais complexa, podendo ter origem em perturbações no regime de precipitações decorrentes do fato de que estas bacias caracterizam a transição do regime hidrológico entre a região Sul, de fraca sazonalidade, e a região Sudeste, de forte sazonalidade.

Havendo a constatação de correlações significativas para lags diferentes de zero, outros modelos como Função de Transferência ou Multivariado Completo devem ser pesquisados. Contudo, o analista deve julgar se a adoção de um modelo mais complexo trará ganho relevante. As incertezas no processo de identificação e estimação de um modelo multivariado mais complexo podem não justificar o esforço.

Face a predominância do relacionamento instantâneo é natural haver uma opção pelo aprofundamento de uma modelagem contemporânea para uma versão multivariada do modelo PAR(p) proposto.

Seja $\left\{ \begin{matrix} Z \\ \sim_t \end{matrix} , t = 1, \dots, T \right\}$ um conjunto de

séries temporais, com período sazonal s, observadas simultaneamente em n anos para ℓ locais distintos. O indexador de tempo t pode alternativamente ser escrito como $t = t(r, m) = (r-1)s + m$, onde: $r = 1, \dots, n$; $m = 1, \dots, s$ e $ns = T$.

Em um instante t qualquer o conjunto de observações simultâneas nos ℓ locais distintos pode ser representado por um vetor coluna com elementos $\left(Z_{t(r,m)_1}, Z_{t(r,m)_2}, \dots, Z_{t(r,m)_\ell} \right)'$.

Sob a hipótese de relacionamento apenas contemporâneo entre as séries temporais observadas nos ℓ locais é possível descrever uma versão

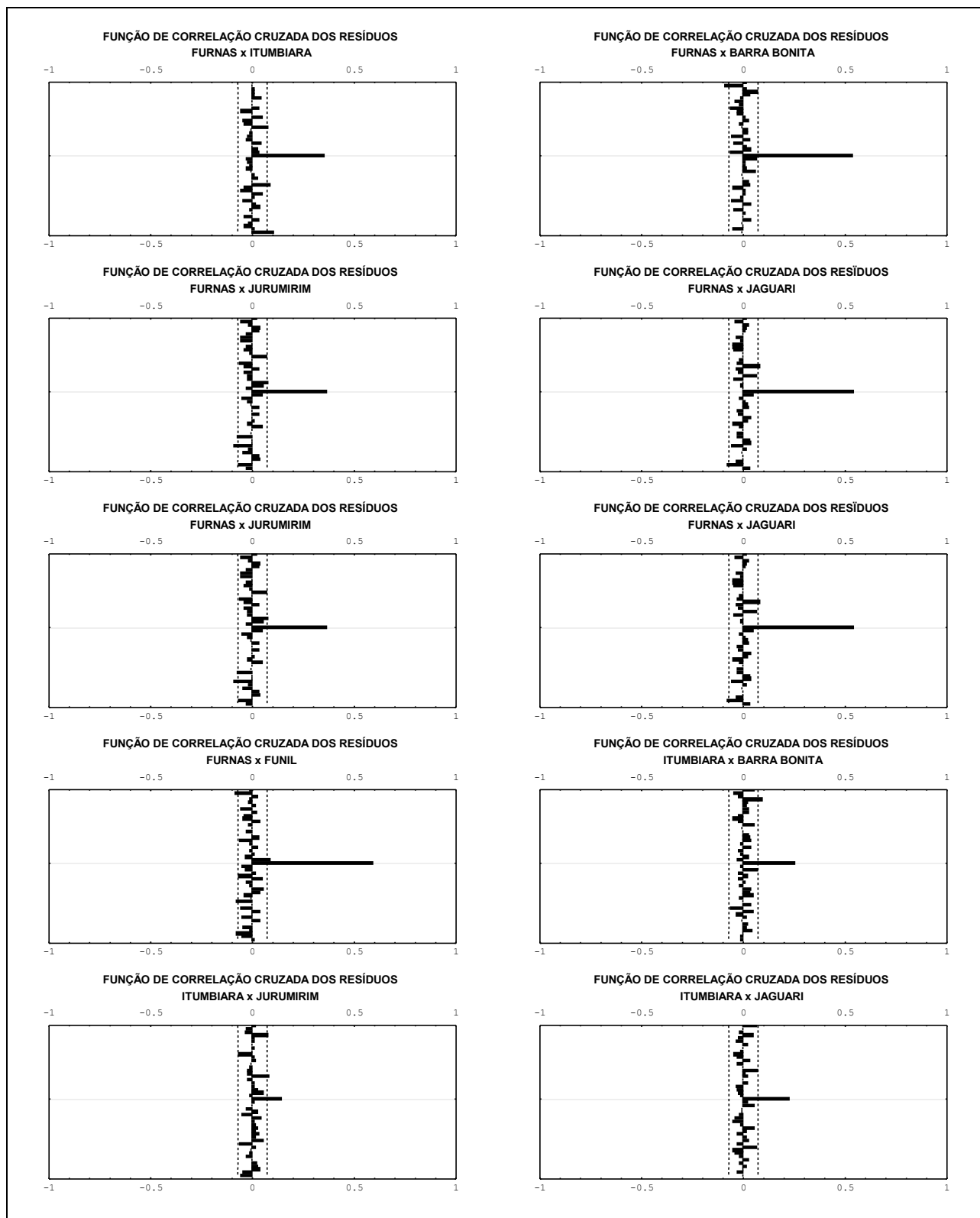


Figura 1a. Função de correlação cruzada $[k \times \hat{R}(k)]$ dos resíduos das séries filtradas de vazões médias mensais de Furnas, Itumbiara, Barra Bonita, Jurumirim, Jaguari, Paraibuna, Santa Branca e Funil. Indicação de predominância do relacionamento contemporâneo.

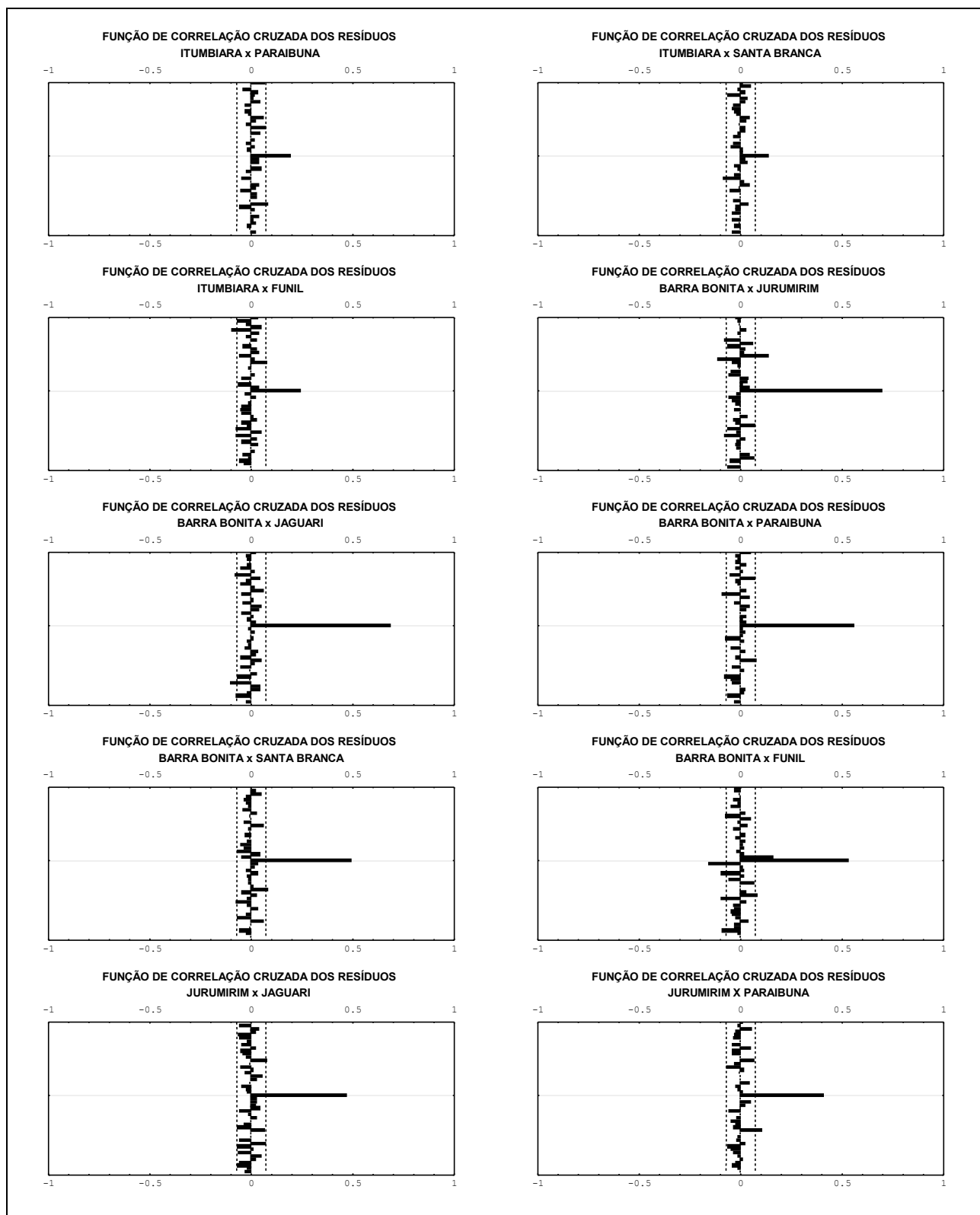


Figura 1b. Função de correlação cruzada $[k \times \hat{R}(k)]$ dos resíduos das séries filtradas de vazões médias mensais de Furnas, Itumbiara, Barra Bonita, Jurumirim, Jaguari, Paraibuna, Santa Branca e Funil. Indicação de predominância do relacionamento contemporâneo.

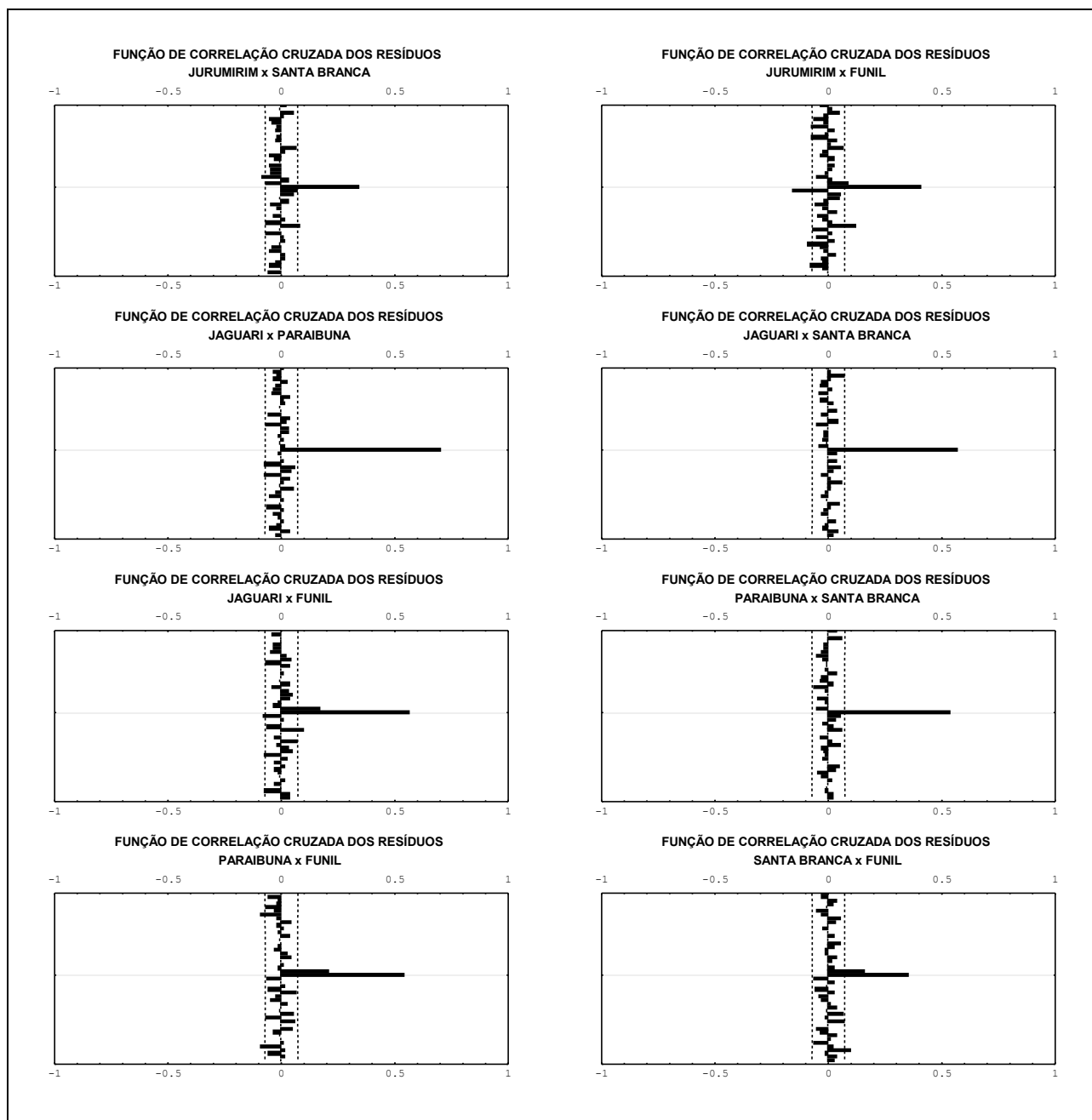


Figura 1c. Função de correlação cruzada $[k \times \hat{R}(k)]$ dos resíduos das séries filtradas de vazões médias mensais de Furnas, Itumbiara, Barra Bonita, Jurumirim, Jaguari, Paraibuna, Santa Branca e Funil. Indicação de predominância do relacionamento contemporâneo.

multivariada do modelo PAR(p) univariado pela seguinte expressão:

$$\hat{Z}_{t(r,m)} = \sum_{j=1}^{p_m} \phi_{m,j} \hat{Z}_{t(r,m)-j} + a_{t(r,m)} \quad (1)$$

onde: $\hat{Z}_{t(r,m)}$ é um vetor coluna cujos elementos são variáveis padronizadas correspondentes aos ℓ locais e que são correlacionadas no tempo (autocorrelacionadas) e correlacionadas espacialmente (correlação cruzada) entre si. Assim:

$$Z_{t(r,m)_i} = \mu_{m_i} + \sigma_{m_i} \dot{Z}_{t(r,m)_i}, i = 1, \dots, \ell \quad (2)$$

onde μ_{m_i} e σ_{m_i} são, respectivamente, a média e o desvio padrão periódicos de $Z_{t(r,m)_i}$ correspondentes ao i -ésimo local e estação m . Já $\begin{pmatrix} \phi_{m,j} \\ \sim_{m,j} \end{pmatrix}, j = 1, \dots, p_m$ são matrizes $[\ell \times \ell]$ de parâmetros auto-regressivos periódicos e $\mathbf{a}_{\sim_{t(r,m)}} = (a_{t(r,m)_1}, a_{t(r,m)_2}, \dots, a_{t(r,m)_\ell})'$ é o vetor coluna com resíduos serialmente independentes, normalmente distribuídos com média zero e matriz simétrica de variância-covariância Ω .

O modelo definido pela Equação (1) é chamado de PAR(p) Multivariado Contemporâneo.

Nos modelos contemporâneos, a diagonalização das matrizes de parâmetros $\begin{pmatrix} \phi_{m,j} \\ \sim_{m,j} \end{pmatrix}, j = 1, \dots, p_m$ permite que o modelo possa

ser decomposto em suas ℓ equações componentes. Neste caso, os parâmetros do modelo não precisam ser estimados conjuntamente e, por este motivo, procedimentos univariados podem ser empregados, dado que nenhuma das variáveis ou parâmetros das ℓ equações componentes precisam ser relacionadas; a conexão entre as equações reside, somente, nos termos relativos aos resíduos, os quais são contemporaneamente relacionados nas diferentes equações, ainda que sejam serialmente independentes. Como mostrado por Sales (1989), a estrutura de correlação espacial entre os ℓ locais é obtida a partir de um modelo multivariado simples de ordem zero aplicado aos resíduos multivariados independentes no tempo.

Se os resíduos em cada uma das ($i = 1, \dots, \ell$) equações obedecem as hipóteses clássicas de um modelo de regressão, isto é, valor esperado nulo, variância finita e covariância dependendo exclusivamente do defasamento, tem-se:

$$E(a_{t(r,m)_i}) = 0, i = 1, \dots, \ell \quad (3)$$

e,

$$E(a_{t(r,m)_i} \cdot a'_{t(r,m)_j}) = \omega_{ij} \mathbf{I}_\ell, i = 1, \dots, \ell \quad (4)$$

onde \mathbf{I}_ℓ indica a matriz identidade de dimensão $[\ell \times \ell]$.

A covariância entre os resíduos pode ser caracterizada como (Sales et al., 1989):

$$E(a_{t(r,m)_i} \cdot a'_{t(r,m)_j}) = \omega_{ij}, \text{ para } i, j = 1, \dots, \ell \quad (5)$$

e todos os demais resíduos não-contemporâneos são não-correlacionados, ou seja:

$$E(a_{t(r,m)_i} \cdot a'_{t(r,m)-k_j}) = 0, \text{ para } k \neq 0. \quad (6)$$

A informação concernente a estrutura de correlação dos resíduos pode, desta forma, ser resumida nas matrizes periódicas de variância-covariância, $\Omega_m [\ell \times \ell]$, onde o seu elemento de ordem ij é dado por ω_{ij} .

Assim, para efeito de uma geração multivariada, $\mathbf{a}_{\sim_{t(r,m)}}$ pode ser modelado como:

$$\mathbf{a}_{\sim_{t(r,m)}} = \beta_m \cdot \xi_{\sim_{t(r,m)}} \quad (7)$$

$$\text{tal que } E\left(\xi_{\sim_{t(r,m)}} \cdot \xi'_{\sim_{t(r,m)}}\right) = \mathbf{I}$$

$$\text{e } E\left(\xi_{\sim_{t(r,m)}} \cdot \xi'_{\sim_{t(r,m)-k}}\right) = 0, \text{ para } k \neq 0.$$

Conhecidas as matrizes periódicas de variância-covariância dos resíduos Ω_m pode ser mostrado que estas satisfazem a equação:

$$\beta_m \cdot \beta'_m = \Omega_m \quad (8)$$

onde Ω_m é não-singular.

A maneira usual e mais simples de resolver a Equação (8) é assumindo que β_m seja uma matriz triangular. Empregando este recurso Young & Pisano (1968) e Lane (1979) provêem métodos de solução para a Equação (8).

Estimadores SURE (Equações de Regressão Aparentemente não-Relacionadas)

Nas situações em que os resíduos de uma particular equação de regressão são contemporaneamente correlacionados com os resíduos de uma outra equação de regressão, o sistema que

contempla ambas as equações é denominado de sistema de equações de regressão aparentemente não-relacionadas. Da referência em inglês - *Seemingly Unrelated Regression Equations* - vem a denominação de estimador SURE, o qual pode ser aplicado na melhoria das estimativas do modelo PAR(p) Multivariado Contemporâneo apresentado anteriormente.

Harvey (1982), Sales (1989), Sales et al. (1989), Sales et al. (1994) e Vieira (1997) mostram que é possível obter melhores estimativas para os parâmetros de modelos auto-regressivos ajustados a ℓ séries para as quais se verifica o relacionamento contemporâneo entre os resíduos, onde os modelos univariados são considerados como parte de um sistema. Isto não implica em contradição com a propriedade BLUE (*Best Linear Unbiased Estimator*) do estimador de Mínimos Quadrados Ordinários adotado em estimativas univariadas, dado que na construção do estimador SURE mais informação estará sendo agregada.

Como mostrado por Box & Jenkins (1976), as estimativas conjuntas de máxima verossimilhança, condicionada a matriz de variância-covariância dos resíduos tem complicada solução analítica. Entretanto, pela expansão dos resíduos em séries de Taylor, as quais utilizam séries auxiliares obtidas de derivadas parciais dos resíduos em relação aos parâmetros e, pela utilização de mínimos quadrados lineares generalizados, um procedimento iterativo pode ser empregado a partir das estimativas iniciais univariadas. O emprego de Mínimos Quadrados Generalizado (GLS - *Generalized Least Squares*) prende-se ao fato de que os resíduos são contemporaneamente correlacionados.

Para efeito de simplicidade de notação considere a omissão dos índices que indicam tratar-se de um modelo periódico. O modelo da Equação (1) pode ser escrito numa forma reduzida como:

$$\phi_i(B)\dot{Z}_t = a_{ti}, 1 \leq i \leq \ell \quad (9)$$

onde: B é o operador atraso; $\phi_i(B)$ é o polinômio em B auto-regressivo da série i; e:

$$\dot{Z}_t = \left(\frac{Z_t - \mu_t}{\sigma_t} \right) \quad (10)$$

Seja também $\phi_{i,0}$ uma estimativa inicial para o vetor de parâmetros ϕ_i . Assim, para cada

equação i ($1 \leq i \leq \ell$) do sistema (Sales, 1989), tem-se:

$$a_{ti,0} = \phi_{i,0}(B)\dot{Z}_t \quad (11)$$

e,

$$-\left. \frac{\partial a_{ti}}{\partial \phi_{ji}} \right|_{\phi_{i,0}} = u_{t-j_i} \quad (12)$$

onde:

$$u_{ti} = \phi_{i,0}^{-1}(B)a_{ti,0} \quad (13)$$

As séries $\{a_{ti}\}$, bem como as auxiliares $\{u_{ti}\}$, podem ser obtidas recursivamente, fazendo-se os valores iniciais iguais a zero, isto é,

$$a_{ti,0} = \dot{Z}_t - \phi_{1,0}\dot{Z}_{t-1} - \dots - \phi_{p_i,0}\dot{Z}_{t-p_i} \quad (14)$$

$$u_{ti} = \phi_{1,0}u_{t-1} - \dots - \phi_{p_i,0}u_{t-p_i} + a_{ti,0} \quad (15)$$

onde p indica a ordem do modelo auto-regressivo.

Expandindo-se $\{a_{ti}\}$ em séries de Taylor no entorno de $\phi_{i,0}$, tem-se aproximadamente:

$$a_{t,0_i} = \sum_{j=1}^{p_i} (\phi_{ji} - \phi_{j,0})u_{t-j_i} + a_{ti} \quad (16)$$

Os ajustamentos são, para cada equação i ($1 \leq i \leq \ell$) do sistema, os coeficientes da regressão linear simples de $a_{ti,0}$ em u_{t-j_i} . Pela adição dos valores ajustados as primeiras estimativas $\phi_{i,0}$, um conjunto de segundas estimativas é formado e o processo iterativo continua até que a convergência seja obtida.

O sistema de Equações dado por (16) pode ser escrito em notação vetorial como:

$$a_{t,0} = \sum_{j=1}^{k_i} (\phi_{ji} - \phi_{j,0})X_{t-j_i} + a_{ti} \quad (17)$$

onde:

$$X_{t-j_i} = -\frac{\partial a_{t_i}}{\partial \phi_{j_i}} \Big|_{\phi_i = \phi_{0_i}} \quad (18)$$

ou, ainda, sob forma matricial, como:

$$a_{0_i} = X_i \phi_i + a_i, i = 1, \dots, \ell \quad (19)$$

onde cada a_{0_i} é um vetor $[T \times 1]$ e o número de variáveis independentes para uma dada equação i é representado por k_i . O número total de

variáveis no sistema é dado por: $K = \sum_{i=1}^{\ell} k_i$.

Nenhuma das variáveis ou parâmetros nas ℓ equações precisam ser relacionadas; a conexão entre as equações reside, somente, nos termos relativos aos resíduos, os quais são contemporaneamente relacionados nas diferentes equações.

As ℓ Equações de (19) podem ser escritas juntas como:

$$a_{t,0} = X_t \phi + a_t, t = 1, 2, \dots, T \quad (20)$$

onde $a_{t,0}$ é um vetor $[\ell \times 1]$ e X_t é uma matriz $[\ell \times k]$ dada por:

$$X_t = \begin{bmatrix} X'_{t1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X'_{t2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & X'_{t\ell} \end{bmatrix} \quad (21)$$

onde X_{t_i} , dado pela Equação (18), é um vetor $[k_i \times 1]$ com as variáveis independentes da i -ésima equação. O vetor ϕ é $[k \times 1]$ e é definido exatamente como em (19) e os resíduos a'_t são serialmente não-correlacionados com média zero e matriz de covariância $E(a_t \cdot a'_t) = \Omega$.

As ℓ Equações de (20) possuem uma matriz de covariância dos resíduos $a^* = (a'_1, \dots, a'_\ell)'$, dada por:

$$E(a^* \cdot a^{*'}) = \begin{bmatrix} \Omega & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Omega & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Omega \end{bmatrix} \quad (22)$$

a qual pode ser escrita de forma mais concisa como:

$$E(a^* \cdot a^{*'}) = I \otimes \Omega \quad (23)$$

Não é necessário a utilização dos produtos de Kronecker no sentido de se mostrar que o estimador de Mínimos Quadrados Generalizados (GLS) de ϕ é dado por:

$$\hat{\phi} = \left(\sum_{t=1}^T X'_t \Omega^{-1} X_t \right)^{-1} \cdot \sum_{t=1}^T X'_t \Omega^{-1} a_{t,0} \quad (24)$$

É importante observar que, em geral, Ω é desconhecida. Assim, a Equação (24) não pode ser utilizada diretamente. Entretanto, ela pode ser estimada pela aplicação de Mínimos Quadrados Ordinários (OLS) separadamente a cada uma das ℓ Equações definidas em (19). Após a convergência do processo individual se a_i representa o vetor $[T \times 1]$ dos resíduos OLS na i -ésima equação, o estimador do elemento ij de Ω é dado por:

$$\hat{\omega}_{ij} = \frac{a'_i \cdot a_j}{T}, i, j = 1, \dots, \ell \quad (25)$$

Pela substituição de $\hat{\Omega}$ em (24) e, pela utilização das estimativas iniciais de ϕ_i , ao final do processo de convergência das ℓ equações iniciais, obtêm-se um estimador SURE factível.

O estimador da matriz de variância-covariância assintótica do estimador SURE é dado por:

$$Var(\hat{\phi}) = \left(\sum_{t=1}^T X'_t \Omega^{-1} X_t \right)^{-1} \quad (26)$$

Como $\hat{\phi}$ é um estimador linear, a sua distribuição de probabilidade será multivariada normal, quando os resíduos são normais.

A adaptação do algoritmo de dois estágios para séries sazonais no contexto do modelo PAR(p) proposto, pode ser resumida na seguinte seqüência de passos:

Estágio 1. Neste estágio é realizada a etapa de identificação do modelo multivariado, ou seja, a partir da identificação e estimação univariada de modelos auto-regressivos para um conjunto de ℓ séries temporais sazonais, a verificação do tipo de relacionamento existente entre as séries é feita através da análise das funções de correlação cruzada amostrais dos resíduos transformados (normais). Em geral a estimação das funções de correlação cruzada pode ser feita com as séries totais de resíduos, face as poucas justificativas físicas para uma situação em que o relacionamento espacial entre séries de vazões se alterem com as estações. Se o modelo multivariado contemporâneo for adequado somente as correlações de ordem zero serão significativamente diferentes de zero. Sob a hipótese de que o modelo é adequado, os limites de um intervalo de confiança de 95% são dados por $\pm 1,96\sqrt{T}$. Havendo a constatação de relacionamento apenas contemporâneo entre as séries caminha-se para o estágio 2; caso contrário, o procedimento não se aplica.

Estágio 2. Neste estágio é realizada a estimação final dos parâmetros. O processo iterativo tem início com uma estimativa da matriz de variância-covariância dos resíduos, Ω , a partir da Equação (25). Na seqüência são utilizadas as Equações (24) e (26) para a obtenção das estimativas de mínimos quadrados generalizados, bem como a matriz de variância-covariância das estimativas e as novas séries de resíduos. O processo continua pela aplicação das Equações (18), (21), (25), (24) e (26), até que a convergência final seja obtida.

Cabe registrar que o possível ganho na eficiência dos estimadores, no caso específico dos modelos multivariados contemporâneos só ocorre quando as correlações de ordem zero são significativas. No exemplo mostrado pelas Figuras 1a, 1b e 1c o relacionamento contemporâneo é altamente relevante para a maioria dos casos. Se no entanto, estas correlações fossem fracas, seria preferível a utilização somente de técnicas de modelagem univariadas.

É relevante citar que uma dificuldade na aplicação em modelos periódicos do algoritmo linear de estimação descrito, está nas dimensões que as matrizes da Equação (21) podem atingir. A Tabela 1 mostra as ordens p identificadas para as 8 séries consideradas na geração.

Da Tabela 1 constata-se que o conjunto de oito séries em etapa mensal, considera um total de 364 parâmetros auto-regressivos. Assim, a Equação (24) implica, no caso, em operações de matrizes com dimensões de até $[364 \times 364]$. Ainda que as matrizes X_t sejam diagonais por partes, o esforço computacional para atingir a convergência pode ser excessivo em situações que contemplem um grande número de séries. Para o exemplo em tela, o procedimento linear de estimação convergiu em 11 iterações. O tempo de processamento despendido ficou em torno de 100 minutos para um microcomputador *Pentium* de 150 MHz com memória de 32 MB.

A comprovação da eficiência do estimador SURE em relação ao estimador OLS pode ser vista para o exemplo em questão. A preservação da correlação cruzada entre as séries de vazões anuais é utilizada como critério de avaliação. Neste sentido foram realizadas duas gerações com 400 seqüências sintéticas de comprimento igual a 63 anos. A Tabela 2 mostra as correlações cruzadas obtidas da geração com os estimadores OLS e a Tabela 3 mostra as correlações cruzadas obtidas com o estimador SURE. A comparação entre as tabelas permite constatar que a geração com o estimador SURE proporciona uma melhor aproximação para a preservação da correlações cruzadas verificadas no histórico.

CONCLUSÕES

Os procedimentos lineares de estimação dos parâmetros do modelo PAR(p) mostraram-se estáveis numericamente, tanto quanto viáveis em termos de tempo de processamento em microcomputadores. A utilização do estimador SURE - "*Seemingly Unrelated Regression Equations*" propiciou a estimação conjunta dos parâmetros do modelo. Os resultados obtidos mostraram que na geração de cenários hidrológicos sintéticos os parâmetros assim estimados proporcionam uma melhor reprodução das correlações cruzadas das vazões anuais em relação aquelas obtidas a partir de modelos com parâmetros estimados univariadamente por Mínimos Quadrados Ordinários, melhorando a aderência à realidade do modelo para séries de vazões, podendo incrementar, com

isso, os ganhos da operação eletroenergética coordenada otimizada do Setor Elétrico Brasileiro.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem as valiosas contribuições dos revisores anônimos.

REFERÊNCIAS

- BOX, G. E. P. & JENKINS, G. M. (1976). Time series analysis - forecasting and control, Holden-Day, USA.
- CAMACHO, F., McLEOD, A. I., HIPEL, K. W. (1985). *Developments in multivariate ARMA modeling in hydrology*, Int. Symp. on Multivariate Analysis of Hydrologic Processes, Colorado State University, Fort Collins, CO, USA.
- HARVEY, A. C. (1982). *The econometric analysis of time series*, Philip Allan, Oxford.
- KELMAN, J. & VIEIRA, A.M. (1997). *Modelo PAR(p) dinâmico*, XII Simpósio brasileiro de recursos hídricos, Vitória, ES.
- LANE, W. L. (1979). *Applied stochastic techniques, User manual*. Division of Planning Technical Services, Eng. Res. Center, U.S. Bureau of Reclamation.
- PEREIRA, B. B. (1984). *Séries temporais multivariadas*. Instituto de Matemática. UFRJ, Rio de Janeiro.
- SALAS, J. D. & PEGRAM, G. G. S. (1977). *A seasonal multivariate multilag autoregressive model in hydrology*, Proc. Third Int. Symp. on Theoretical and Applied Hydrology, Colorado State Univ., Fort Collins, CO, USA.
- SALES, P. R. H. (1989). *Procedimentos lineares para identificação e estimação de parâmetros de modelos para séries temporais uni e multivariadas*. Tese D. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- SALES, P. R. H., PEREIRA, B. B. e VIEIRA, A. M. (1989). *Identificação e estimação recursiva de modelos de séries temporais*. 3ª Escola de Séries Temporais e Econometria. Fundação Getúlio Vargas. Rio de Janeiro.
- SALES, P. R. H., PEREIRA, B. B. e VIEIRA, A. M. (1994). *Linear procedures for time series analysis in hydrology. Stochastic and Statistical Methods in Hydrology and Environmental Engineering*. v3, Kluwer Academic Publishers. The Netherlands.
- VIEIRA, A. M. (1997). *Hidrologia Estocástica e Operação de Reservatórios*. Tese D. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- YOUNG, G. K. & PISANO, W. C. (1968). *Operational hydrology using residuals*. *Journal Hyd. Div. ASCE*, 94, 4, p909-923.

Tabela 1. Ordens dos modelos PAR(p) identificados.

Série	Ordem p das auto-regressões periódicas												Σ
	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Agos	Set	Out	Nov	Dez	
Furnas	6	6	6	6	4	2	4	1	3	6	1	4	49
Itumbiara	5	4	3	5	5	6	6	2	4	2	5	1	48
B. Bonita	2	5	1	6	5	3	5	2	3	6	5	5	48
Jurumirim	5	4	1	6	2	6	5	2	6	1	6	5	49
Jaguari	4	5	5	5	5	4	4	1	6	6	5	4	54
Paraibuna	6	5	6	6	1	5	4	5	6	6	3	4	57
S. Branca	4	5	5	6	3	3	4	6	6	6	4	6	58
Funil	4	3	6	4	5	6	4	5	4	5	6	5	57
Σ													364

Tabela 2. Correlações cruzadas lag-0 das séries históricas e sintéticas anuais [Nov-Out] - Geração com estimadores univariados (OLS) - 400 seqüências sintéticas de 63 anos.

Furnas	Itumbiara	B. Bonita	Jurumirim	Jaguari	Paraibuna	S. Branca	Funil
Histórica	0,76	0,76	0,61	0,72	0,67	0,70	0,72
Mínimo	-0,10	0,05	-0,10	0,07	0,16	0,15	0,27
Quartil 1	0,23	0,37	0,21	0,40	0,40	0,40	0,51
Quartil 2	0,30	0,46	0,29	0,46	0,47	0,48	0,57
Quartil 3	0,38	0,53	0,36	0,54	0,55	0,56	0,64
Máximo	0,64	0,70	0,57	0,75	0,73	0,75	0,77
Itumbiara	B. Bonita	Jurumirim	Jaguari	Paraibuna	S. Branca	Funil	
Histórica	0,49	0,46	0,52	0,45	0,47	0,48	
Mínimo	-0,21	-0,30	-0,19	-0,30	-0,26	-0,18	
Quartil 1	0,11	0,00	0,10	0,09	0,09	0,14	
Quartil 2	0,20	0,10	0,20	0,18	0,18	0,23	
Quartil 3	0,30	0,18	0,28	0,26	0,27	0,30	
Máximo	0,52	0,44	0,53	0,51	0,53	0,55	
B. Bonita	Jurumirim	Jaguari	Paraibuna	S. Branca	Funil		
Histórica	0,88	0,80	0,70	0,71	0,73		
Mínimo	0,35	0,29	0,16	0,23	0,38		
Quartil 1	0,58	0,59	0,42	0,46	0,57		
Quartil 2	0,65	0,66	0,50	0,54	0,62		
Quartil 3	0,69	0,70	0,57	0,60	0,67		
Máximo	0,85	0,83	0,73	0,76	0,77		
Jurumirim	Jaguari	Paraibuna	S. Branca	Funil			
Histórica	0,61	0,50	0,50	0,52			
Mínimo	0,05	-0,12	-0,05	0,04			
Quartil 1	0,35	0,27	0,29	0,36			
Quartil 2	0,42	0,35	0,37	0,43			
Quartil 3	0,49	0,43	0,45	0,50			
Máximo	0,68	0,65	0,66	0,68			
Jaguari	Paraibuna	S. Branca	Funil				
Histórica	0,80	0,84	0,94				
Mínimo	0,45	0,48	0,54				
Quartil 1	0,62	0,65	0,69				
Quartil 2	0,67	0,70	0,73				
Quartil 3	0,72	0,74	0,77				
Máximo	0,81	0,83	0,85				
Paraibuna	S. Branca	Funil					
Histórica	0,99	0,90					
Mínimo	0,96	0,58					
Quartil 1	0,98	0,73					
Quartil 2	0,98	0,77					
Quartil 3	0,98	0,80					
Máximo	0,99	0,88					
S. Branca	Funil						
Histórica	0,93						
Mínimo	0,62						
Quartil 1	0,75						
Quartil 2	0,78						
Quartil 3	0,81						
Máximo	0,90						

Tabela 3. Correlações cruzadas *lag-0* das séries históricas e sintéticas anuais [Nov-Out] - Geração com estimador multivariado (SURE) - 400 seqüências sintéticas de 63 anos.

Furnas	Itumbiara	B. Bonita	Jurumirim	Jaguari	Paraibuna	S. Branca	Funil
Histórica	0,76	0,76	0,61	0,72	0,67	0,70	0,72
Mínimo	0,04	0,15	-0,07	0,32	0,27	0,27	0,43
Quartil 1	0,39	0,47	0,26	0,50	0,49	0,49	0,62
Quartil 2	0,46	0,53	0,34	0,58	0,55	0,56	0,68
Quartil 3	0,53	0,60	0,41	0,64	0,62	0,62	0,72
Máximo	0,77	0,75	0,66	0,79	0,76	0,77	0,84
Itumbiara	B. Bonita	Jurumirim	Jaguari	Paraibuna	S. Branca	Funil	
Histórica	0,49	0,46	0,52	0,45	0,47	0,48	
Mínimo	-0,12	-0,21	-0,03	-0,11	-0,13	-0,11	
Quartil 1	0,18	0,04	0,21	0,16	0,16	0,24	
Quartil 2	0,27	0,13	0,29	0,25	0,25	0,33	
Quartil 3	0,36	0,22	0,37	0,35	0,34	0,40	
Máximo	0,56	0,51	0,61	0,58	0,61	0,64	
B. Bonita	Jurumirim	Jaguari	Paraibuna	S. Branca	Funil		
Histórica	0,88	0,80	0,70	0,71	0,73		
Mínimo	0,44	0,41	0,27	0,29	0,39		
Quartil 1	0,68	0,67	0,52	0,55	0,64		
Quartil 2	0,73	0,72	0,60	0,62	0,69		
Quartil 3	0,77	0,76	0,65	0,68	0,73		
Máximo	0,89	0,88	0,79	0,81	0,85		
Jurumirim	Jaguari	Paraibuna	S. Branca	Funil			
Histórica	0,61	0,50	0,50	0,52			
Mínimo	0,13	0,04	0,08	0,09			
Quartil 1	0,41	0,31	0,32	0,40			
Quartil 2	0,48	0,39	0,40	0,47			
Quartil 3	0,54	0,47	0,49	0,54			
Máximo	0,77	0,64	0,66	0,76			
Jaguari	Paraibuna	S. Branca	Funil				
Histórica	0,80	0,84	0,94				
Mínimo	0,51	0,57	0,57				
Quartil 1	0,70	0,73	0,76				
Quartil 2	0,75	0,77	0,79				
Quartil 3	0,78	0,80	0,82				
Máximo	0,86	0,89	0,90				
Paraibuna	S. Branca	Funil					
Histórica	0,99	0,90					
Mínimo	0,94	0,66					
Quartil 1	0,97	0,78					
Quartil 2	0,98	0,82					
Quartil 3	0,98	0,84					
Máximo	0,99	0,89					
S. Branca	Funil						
Histórica	0,93						
Mínimo	0,66						
Quartil 1	0,79						
Quartil 2	0,83						
Quartil 3	0,85						
Máximo	0,91						

***Joint Parameters Estimation of the
Stochastic Multivariate
Contemporaneous Periodic
Autoregressive Model – PAR(p)***

ABSTRACT

Linear procedures based on SURE – “Seemingly Unrelated Regression Equations” - are proposed in the paper, in order to obtain the Multivariate Contemporaneous Periodic Autoregressive – PAR(p) – joint parameters estimation of a stochastic model for synthetic hydrological scenarios.