

ESTIMATIVA DE PARÂMETROS DE MODELOS HIDROLÓGICOS UTILIZANDO O FILTRO DE KALMAN

Júlio Gomes e Miriam Rita Moro Mine

Centro de Hidráulica e Hidrologia Professor Parigot de Souza - Convênio COPEL/UFPR

Caixa Postal 1309 – CEP 80001-970 Curitiba, PR

julio@cch.copel.br - mrmine@cce.ufpr.br

RESUMO

O algoritmo de filtragem de erros, Filtro de Kalman é utilizado na estimativa e atualização em tempo real de parâmetros de modelos hidrológicos clássicos. O hidrograma unitário e o modelo auto-regressivo foram aplicados à bacia do rio Jangada, afluente do rio Iguaçu, com área de drenagem de 1050 km². Os dois algoritmos distintos do Filtro de Kalman foram aplicados no sentido crescente de generalidade. Os resultados apresentados indicaram a necessidade de se impor restrições às estimativas dos parâmetros para garantir a convergência para valores aceitáveis de acordo com a teoria dos modelos hidrológicos utilizados. Concluiu-se que o Filtro de Kalman é útil na construção de modelos hidrológicos com correção e atualização dos parâmetros em tempo real.

INTRODUÇÃO

Na operação contínua de sistemas de recursos hídricos, a previsão de vazões é extremamente importante para estabelecer estratégias de projeto e controle ótimos. Este fato justifica a considerável atenção que é dada ao controle de tais sistemas em tempo real.

A operação em tempo real de sistemas de recursos hídricos, destinados a múltiplos usos, como: controle de cheias, regularização de vazões, geração de energia elétrica, navegação, abastecimento de água, gerência de qualidade de água pode diminuir de forma significativa os custos e os riscos, quando as previsões de vazão são

feitas com segurança, a curtos intervalos de tempo e continuamente.

Segundo Nash e Sutcliffe (1970), o procedimento para previsões de vazão em tempo real requer, em adição aos modelos utilizados para estimativa das vazões futuras, um método de correção contínua das previsões a partir dos erros observados nas estimativas anteriores.

A estimativa e correção dos parâmetros dos modelos hidrológicos em tempo real deu origem aos modelos chamados adaptativos. De modo simples, os modelos adaptativos são aqueles cujos parâmetros são reavaliados no instante em que uma nova informação hidrológica é obtida.

Neste contexto, insere-se a utilização de um método de filtragem de erros, Filtro de Kalman, na estimativa de parâmetros de modelos hidrológicos, tendo como características principais: flexibilidade, recursividade e correção dos parâmetros em tempo real, isto é, à medida em que uma nova observação é realizada.

Atualmente, a aplicação do conceito de Modelos Dinâmicos de Estado e do Filtro de Kalman tem atraído considerável atenção em hidrologia. Uma das características principais na modelagem matemática, utilizando-se Modelos Dinâmicos de Estado, é a possibilidade de representação de diferentes sistemas hidrológicos.

No presente artigo é apresentada uma aplicação do conceito de Modelos Dinâmicos de Estado e do Filtro de Kalman na estimativa, correção e atualização dos parâmetros de dois modelos de uso corrente em hidrologia: hidrograma unitário e modelo auto-regressivo. Os referidos modelos são aplicados a uma bacia de 1.050 km², localizada no rio Jangada, afluente pela margem esquerda do rio Iguaçu.

FILTRO DE KALMAN

O Filtro de Kalman foi introduzido na literatura sobre teoria do controle por Kalman (1960) e Kalman e Bucy (1961). Particularmente no que se refere à utilização do Filtro de Kalman, nas últimas décadas, várias pesquisas têm sido publicadas mostrando sua aplicação na área de recursos hídricos.

Hino (1973) apresentou uma aplicação do Filtro de Kalman para a previsão de vazões em tempo real que permite a determinação das ordenadas do hidrograma unitário. Wood e Szollosi-Nagy (1978) usaram o Filtro de Kalman para a previsão de vazões com 6 h de antecedência para o rio Ombrone, Itália. Chiu (1978), citado por Bergman e Delleur (1985a), apresentou uma descrição do estado da arte na utilização de modelos dinâmicos de estado e do Filtro de Kalman nas áreas de hidrologia, hidrogeologia, qualidade da água e hidráulica.

Aplicações na previsão e controle em tempo real são descritas em O'Connell (1980) e pesquisas relacionadas à implementação do Filtro de Kalman associado a modelos hidrológicos conceituais são apresentadas em Kitadinis e Bras (1980a, 1980b).

Em trabalhos mais recentes, Cooper (1982) usou técnicas de aproximação estocástica para estimativa *on line* de parâmetros de modelos não lineares e Patry e Marino (1984) analisaram a identificação de parâmetros para modelos de previsão de vazões em tempo real com aplicações na hidrologia urbana. Kitadinis, Lara e Lane (1984) avaliaram, através da utilização do Filtro de Kalman, diferentes estratégias de coleta de dados de vazões e Bras e Rodriguez-Iturbe (1985) apresentaram um resumo da aplicação do Filtro de Kalman na estimativa de sistemas hidrológicos dinâmicos.

Prosseguindo nos exemplos de aplicações em hidrologia, Bergman e Delleur (1985a, 1985b) utilizaram o Filtro de Kalman para previsão de vazões diárias para o rio Potomac em Maryland, USA. Georgakakos (1986) aplicou o Filtro de Kalman na construção de um modelo hidrometeorológico estocástico para previsão de enchentes em tempo real na bacia de Bird Creek em Oklahoma, USA.

Aplicações do Filtro de Kalman na análise e projeto de redes de monitoramento de águas subterrâneas são descritas por Geer (1987). Kuo *et al.* (1990) desenvolveram e aplicaram um modelo estocástico para operação de reservatórios em tempo real na bacia do rio Tanshui, República da China, utilizando o Filtro de Kalman para atualização das previsões de vazão.

No Brasil, pode-se citar Mine (1984), como um dos primeiros trabalhos na aplicação do Filtro de Kalman na estimativa de parâmetros de modelos hidrológicos. Holz *et al.* (1989) aplicaram o Filtro de Kalman para a previsão de vazão no rio Doce. Gomes e Mine (1989) e Gomes e Mine (1991) apresentaram exemplos de aplicação do Filtro de Kalman na estimativa e atualização das ordenadas do hidrograma unitário e dos parâmetros de modelos auto-regressivos. Alves *et al.* (1991) utilizaram o Filtro de Kalman para estimativa e atualização dos parâmetros do modelo de transformação chuva-vazão IPH II.

Como se percebe, através do exposto, o Filtro de Kalman tem sido utilizado como ferramenta para a construção de modelos para estimativa de parâmetros e previsão de variáveis hidrológicas em tempo real, tendo como característica a flexibilidade na representação de diferentes modelos utilizados em hidrologia.

Modelos dinâmicos de estado

Em linhas gerais, diz-se que o processo x_t (escalar ou vetor), que descreve o comportamento ou as propriedades do sistema no tempo t , é chamado estado do sistema no tempo t , se os valores futuros de x_{t+i} , $i = 1, 2, \dots$, são bem descritos pelo conhecimento de x_t ou x_t e x_{t-i} , $i = 1, 2, \dots$

Em hidrologia, o estado do sistema pode ser representado pelo valor correto de uma quantidade mensurável, como: alturas linimétricas, vazões, totais precipitados, volumes de reservatórios, etc...

Uma boa representação do estado x_t , considerando um sistema linear, é dada pela equação:

$$x_t = \phi_{t-1}x_{t-1} + \Gamma_t w_t \quad (1)$$

onde: ϕ_{t-1} e Γ_t = matrizes de transição; w_t = ruídos do sistema; x_t = estado do sistema.

A Equação (1), denominada de equação de estado, apresenta-se corrompida pela presença de ruídos aleatórios w_t . Em consequência, as variáveis de estado são aleatórias e suas distribuições probabilísticas estão relacionadas às distribuições probabilísticas dos ruídos do sistema. A Equação (1) é dita estacionária se ϕ_{t-1} e Γ_t são constantes no tempo.

Em geral, o verdadeiro estado do sistema x_t não é sempre conhecido, mas acha-se corrompido pelos ruídos w_t . Pode, entretanto, ser estimado através de uma equação de mensuração. Para o caso de sistemas lineares, tem-se:

$$z_t = H_t x_t + v_t \quad (2)$$

onde: z_t = observação do estado x_t ; H_t = matriz de transição; v_t = erro de observação.

O objetivo da aplicação do algoritmo, apresentado por Kalman (1960), é minimizar a influência dos erros de modelagem w_t e observação v_t sobre a identificação do real estado do sistema x_t . As matrizes ϕ_{t-1} , Γ_t e H_t são supostamente conhecidas. Alguns sistemas podem ter matrizes de transição variando no tempo, mas se elas são conhecidas, a não estacionariedade não dificulta o problema de filtragem.

Na teoria original, Kalman (1960) apresentou uma nova solução para o problema de filtragem linear gaussiana. Sob a hipótese de que as seqüências aleatórias w_t e v_t são ruídos brancos e independentes entre si, tem-se como propriedades:

- média: $\bar{w} = E[w_t] = 0$
- matriz de covariância: $Q = E[w_t w_t^T]$
- média: $\bar{v} = E[v_t] = 0$
- matriz de covariância: $R = E[v_t v_t^T]$

Derivação do filtro de Kalman discreto

Uma das características do algoritmo apresentado por Kalman (1960) é a recursi-

vidade. De um modo simples, filtros recursivos são aqueles que calculam estimativas presentes, em função de observações recentes e das estimativas anteriores. As observações registradas no passado se encontram de algum modo condensadas nas estimativas anteriores. Mine (1984) apresenta um exemplo que ilustra o conceito de recursividade conforme a seguir.

Considerando-se o problema da estimativa de uma constante não aleatória x , baseada em observações z_i , corrompidas por ruídos brancos v_i , pode-se escrever:

$$z_i = x + v_i (i = 1, 2, \dots, t) \quad (3)$$

Uma estimativa não tendenciosa de x_t , de mínima variância, é dada por:

$$\hat{x}_t = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t z_i \quad (4)$$

Quando uma nova observação no instante $t+1$ é realizada, a nova estimativa será dada por:

$$\hat{x}_{t+1} = \frac{1}{t+1} \sum_{i=1}^{t+1} z_i \quad (5)$$

A Equação (5) pode ser manipulada, de tal forma que a estimativa de x no instante t , fique evidenciada, ou seja:

$$\hat{x}_{t+1} = \frac{t}{t+1} \hat{x}_t + \frac{1}{t+1} z_{t+1} \quad (6)$$

É importante destacar que utilizando-se a Equação (6) para calcular a estimativa de x no instante $t+1$ no lugar da Equação (5), a necessidade de armazenar informações é eliminada, pois toda informação anterior está contida na estimativa de x no instante t . Tem-se, portanto, um estimador linear recursivo ou filtro recursivo. Uma forma alternativa de representação da Equação (6) é dada por:

$$\hat{x}_{t+1} = \hat{x}_t + \frac{1}{t+1} (z_{t+1} - \hat{x}_t) \quad (7)$$

Uma interpretação interessante, analisando-se a Equação (7), é a de que a estimativa de x_{t+1} é função da estimativa anterior x_t somada a uma diferença ponderada entre a nova observação z_{t+1} e o seu valor esperado, dado pela estimativa x_t . A diferença entre a nova observação z_{t+1} e o seu valor esperado x_t representa justamente o ganho de informação que se obtém a partir do momento em que uma nova observação é obtida. Generalizando o exemplo apresentado para quantidades vetoriais, a Equação (6) pode ser escrita como:

$$\hat{x}_{t/t} = K_t' \hat{x}_{t/t-1} + K_t z_t \quad (8)$$

Analisando-se a Equação (8), observa-se que a nova estimativa $\hat{x}_{t/t}$ é uma ponderação entre a estimativa anterior $\hat{x}_{t/t-1}$ e a nova observação z_t , onde os pesos são representados por K_t' e K_t , matrizes variáveis no tempo. O problema agora reside em obter as matrizes K_t' e K_t que estabeleçam de uma maneira ótima a estimativa $\hat{x}_{t/t}$.

Antes de prosseguir, em função da forma como a Equação (8) foi apresentada, é importante reforçar a idéia de que o subscrito $t/t-1$ refere-se à previsão da quantidade x no instante t a partir do seu valor no instante $t-1$, enquanto o índice t/t refere-se à atualização da quantidade x no tempo t à medida em que uma nova observação z no instante t é obtida.

Em Mine (1984) são apresentadas as relações entre as matrizes K_t' e K_t e o desenvolvimento matemático para a escolha ótima de K_t , chamada matriz de ganho. Em O'Connell (1980) e Gomes (1995), pode-se encontrar a derivação do Filtro de Kalman discreto, considerando-se dois algoritmos distintos. A diferença básica entre eles consiste na correção ou não dos ruídos de modelagem w e de observação v e das respectivas matrizes de covariância Q e R .

A Tabela 1 apresenta uma forma mais simples do Filtro de Kalman, onde os ruídos de modelagem w e observação v são representados pelo seu valor esperado e, portanto, são nulos, considerando-se a hipótese de ruídos brancos. Além disso, as matrizes de covariância dos erros de modelagem Q e de observação R são consideradas constantes no tempo.

Todini, O'Connell e Jones (1980) apresentam desenvolvimento matemático para o estabelecimento de um algoritmo recursivo do Filtro de Kalman, onde são consideradas a estimativa e atualização dos ruídos w e v e das respectivas matrizes de covariância Q e R . A Tabela 2 apresenta uma forma mais sofisticada do Filtro de Kalman, onde os ruídos w e v e as respectivas matrizes de covariância Q e R são corrigidas a cada intervalo de tempo, a partir de uma nova observação z .

UTILIZAÇÃO DO FILTRO DE KALMAN PARA REPRESENTAÇÃO DE MODELOS HIDROLÓGICOS

A aplicação do Filtro de Kalman exige a definição dos elementos que compõem a equação do sistema, Equação (1), e a equação de mensuração, Equação (2), ou seja: ϕ_t = matriz de transição de estado; x_t = estado do sistema; H_t = matriz de transição; z_t = observação do estado x_t .

No presente trabalho são utilizados dois modelos hidrológicos de uso corrente: hidrograma unitário e modelo auto-regressivo. É importante destacar que a definição dos elementos das Equações (1) e (2) é função do tipo de modelo hidrológico utilizado, como abordado na sequência.

Representação do hidrograma unitário

Hino (1973) apresenta uma aplicação do Filtro de Kalman para a previsão de vazões em tempo real e que permite a determinação das ordenadas do hidrograma unitário. A vazão em um instante t é dada pela representação discreta da integral de convolução como apresentada a seguir:

$$q_t = \sum_{i=0}^{imax} h_i u_{t-i} \quad (9)$$

onde: u_{t-i} = precipitação efetiva no instante $t-i$; h_i = ordenada do hidrograma unitário no instante i ; q_t = vazão superficial no instante t .

Tabela 1. Equações do filtro de Kalman discreto sem correção dos ruídos w e v e das matrizes de covariância Q e R .

Equação de estado	$x_t = \phi_{t-1}x_{t-1} + \Gamma_t w_t$	$w_t \sim N(0, Q)$
Equação de mensuração	$z_t = H_t x_t + v_t$	$v_t \sim N(0, R)$
<u>Correção</u>		
Inovação	$v_t = z_t - H_t x_{t/t-1}$	
Matriz de ganho	$K_t = P_{t/t-1} H_t^T (H_t P_{t/t-1} H_t^T + R)^{-1}$	
Estado	$x_{t/t} = x_{t/t-1} + K_t v_t$	
Matriz de covariância dos erros de previsão de estado	$P_{t/t} = (I - K_t H_t) P_{t/t-1}$	
<u>Previsão</u>		
Estado	$x_{t+1/t} = \phi_t x_{t/t}$	
Matriz de covariância dos erros de previsão do estado	$P_{t+1/t} = \phi_t P_{t/t} \phi_t^T + \Gamma_{t+1} Q \Gamma_{t+1}^T$	

Tabela 2. Equações do filtro de Kalman discreto com correção dos ruídos w e v e das matrizes de covariância Q e R .

Equação de estado	$x_t = \phi_{t-1}x_{t-1} + \Gamma_t w_t$	$w_t \sim N(\bar{w}, Q)$
Equação de mensuração	$z_t = H_t x_t + v_t$	$v_t \sim N(\bar{v}, R)$
<u>Correção</u>		
Ruído de observação	$v_t = \frac{t-1}{t} v_{t-1} + \frac{1}{t} (z_t - H_t x_{t/t-1})$	
Inovação	$v_t = z_t - H_t x_{t/t-1} - v_t$	
Matriz de covariância dos erros de observação	$R_t = \frac{t-1}{t} R_{t-1} + \frac{1}{t} (v_t v_t^T - H_t P_{t/t-1} H_t^T)$	
Matriz de ganho	$K_t = P_{t/t-1} H_t^T (H_t P_{t/t-1} H_t^T + R_t)^{-1}$	
Estado	$x_{t/t} = x_{t/t-1} + K_t v_t$	
Matriz de covariância dos erros de previsão do estado	$P_{t/t} = (I - K_t H_t) P_{t/t-1}$	
<u>Previsão</u>		
Ruído de modelagem	$w_{t+1/t} = w_{t/t-1} + \frac{1}{t} (\Gamma_t^T \Gamma_t)^{-1} \Gamma_t^T K_t v_t$	
Matriz de covariância dos erros de modelagem	$Q_{t+1/t} = \frac{t-1}{t} Q_{t/t-1} + \frac{1}{t} (\Gamma_t^T \Gamma_t)^{-1} \Gamma_t^T (K_t v_t v_t^T K_t^T + P_{t/t} - \phi_{t-1} P_{t/t-1} \phi_{t-1}^T) \Gamma_t (\Gamma_t^T \Gamma_t)^{-1}$	
Estado	$x_{t+1/t} = \phi_t x_{t/t} + \Gamma_t w_{t+1/t}$	
Matriz de covariância dos erros de previsão do estado	$P_{t+1/t} = \phi_t P_{t/t} \phi_t^T + \Gamma_{t+1} Q_{t+1/t} \Gamma_{t+1}^T$	

Destaca-se que a variável $imax$, apresentada na Equação (9), representa, em termos gerais, o número de ordenadas do hidrograma unitário. A Equação (9) pode ser escrita matricialmente como:

$$q_t = u_t h_t \quad (10)$$

onde: $u_t = [u_t \ u_{t-1} \ u_{t-2} \ \dots \ u_{t-i} \ \dots]$;
 $h_t = [h_0 \ h_1 \ h_2 \ \dots \ h_i \ \dots]^T$.

Comparando-se a Equação (10) com a equação de mensuração, Equação (2), pode-se definir: z_t = vazão superficial no instante t ; H_t = precipitações efetivas observadas (*inputs* do sistema); x_t = ordenadas do hidrograma unitário.

A matriz de transição de estado ϕ_t , no caso da determinação das ordenadas do hidrograma unitário, foi definida como igual a matriz identidade e invariante no tempo. Adicionalmente, definiu-se a matriz de transição Γ_t , presente na Equação (1), como sendo um vetor-coluna cujos elementos são todos iguais a 1.

Destaca-se que as dimensões das matrizes envolvidas é função do número de ordenadas do hidrograma unitário a ser estimado. Gomes (1995) apresenta, considerando-se um exemplo de aplicação, as dimensões das matrizes utilizadas no algoritmo do Filtro de Kalman para determinação das ordenadas do hidrograma unitário.

Restrições às ordenadas do hidrograma unitário

Gomes (1995) verificou que, no processo de estimativa das ordenadas do hidrograma unitário, o Filtro de Kalman não conservou o volume unitário equivalente a uma precipitação efetiva de 10 mm, apresentando em alguns casos ordenadas negativas para o hidrograma unitário. No referido trabalho, introduziu-se no algoritmo do Filtro de Kalman, um procedimento colocando como restrições:

1. as ordenadas do hidrograma unitário não podem ser negativas;

2. o volume unitário deve ser conservado em cada intervalo de tempo.

Representação de um modelo auto-regressivo

Como mencionado anteriormente, a aplicação do Filtro de Kalman exige a definição dos elementos que compõem a equação do sistema, Equação (1), e a equação de mensuração, Equação (2).

Considerando-se o problema de estimativa de vazões em tempo real, um modelo auto-regressivo de ordem p pode ser representado genericamente, como a seguir.

$$\tilde{q}_t = \beta_1 \tilde{q}_{t-1} + \beta_2 \tilde{q}_{t-2} + \dots + \beta_p \tilde{q}_{t-p} \quad (11)$$

onde: \tilde{q}_t = desvio da vazão em relação à média no instante t ; β_1, \dots, β_p = parâmetros do modelo auto-regressivo.

A Equação (11) pode ser escrita matricialmente como:

$$\tilde{q}_t = \tilde{q}_{t-p} \beta_p \quad (12)$$

onde: $\beta_p = [\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_p]^T$
 $\tilde{q}_{t-p} = [\tilde{q}_{t-1} \ \tilde{q}_{t-2} \ \dots \ \tilde{q}_{t-p}]$

Comparando-se a Equação (11) com a equação de mensuração, Equação (2), pode-se definir: z_t = desvio da vazão em relação à média no instante t ; H_t = desvios das vazões observadas em relação à média (*inputs* do sistema); x_t = parâmetros do modelo auto-regressivo.

Como no caso da determinação das ordenadas do hidrograma unitário, a matriz de transição de estado ϕ_t foi definida como igual a matriz identidade e invariante no tempo. A matriz de transição Γ_t , presente na Equação (1), foi definida como um vetor-coluna cujos elementos são todos iguais a 1.

Destaca-se que as dimensões das matrizes envolvidas é função do número de parâmetros do modelo auto-regressivo. Gomes (1995) apresenta, considerando-se um

exemplo de aplicação, as dimensões das matrizes utilizadas no algoritmo do Filtro de Kalman para determinação dos parâmetros do modelo auto-regressivo.

Restrições aos parâmetros do modelo auto-regressivo

Gomes (1995), aplicando o Filtro de Kalman na determinação dos parâmetros de um modelo auto-regressivo de ordem 2, verificou que, no processo de estimativa dos parâmetros, o Filtro de Kalman estabeleceu valores para β_1 e β_2 que não satisfaziam os limites apresentados em Box e Jenkins (1976). A fim de respeitar os limites impostos para β_1 e β_2 , Gomes (1995) introduziu no algoritmo do filtro, um procedimento colocando restrições aos valores dos parâmetros β_1 e β_2 , considerando-se um modelo auto-regressivo de ordem 2.

O conjunto de restrições aos parâmetros β_1 e β_2 em um modelo auto-regressivo de ordem 2, como apresentado em Box e Jenkins (1976), é representado pelas inequações a seguir:

$$-2 < \beta_1 < 2$$

$$-1 < \beta_2 < 1$$

$$\beta_1 + \beta_2 > 1$$

$$\beta_2 - \beta_1 < 1$$

BACIA HIDROGRÁFICA E DADOS UTILIZADOS

O rio Jangada situa-se no trecho médio do rio Iguaçu, do qual é afluente pela margem esquerda, percorrendo em seu desenvolvimento o norte catarinense e o terceiro planalto paranaense. Esta região é constituída de derames basálticos espessos, regulares e quase horizontais e por arenitos mesozóicos. Os rios percorrem vales estreitos e possuem maiores declividades em relação ao trecho do Alto Iguaçu, a montante da cidade de União da Vitória. O rio Jangada apresenta, em um trecho de cerca de 60 km, a partir da sua foz no

rio Iguaçu, um desnível de 170 m, correspondente a uma declividade média no trecho de 0,283 cm/m. O clima apresenta-se temperado com verão ameno e sem estação seca definida. A precipitação média anual é de 1500 mm e a temperatura média anual é de 16° C.

Os dados de precipitação utilizados são referentes à estação pluviométrica Rio Farias (Código DNAEE: 02651027), sendo registrados os dados de chuva às 7:00 h e 17:00 h. Os dados de vazão utilizados são referentes à estação fluviométrica Jangada do Sul (Código DNAEE: 65370000), altitude 800 m, latitude 26° 22' S, longitude 51° 15' W, com área de drenagem de 1050 km² e leituras diárias às 7:00 h e 17:00 h. O período de dados utilizados compreendeu os anos de 1983 a 1992. A Figura 1 apresenta a bacia do rio Jangada e a localização das estações hidro-métricas utilizadas no estudo.

O trecho do rio Jangada, onde se situa a estação fluviométrica, caracteriza-se por apresentar trecho reto, lento em canal natural, com margens argilosas de pouca inclinação e com vegetação (árvores nas duas margens). A natureza do leito é rochosa sendo o controle exercido por corredeira a 150 m a jusante da seção de réguas. O nível de extravasamento considerado é de 3,0 m. Na determinação da curva-chave, os máximos valores de nível e vazão registrados nas campanhas de medição de vazão foram 2,50 m e 360 m³/s, respectivamente.

Caracterização dos eventos

A partir do registro histórico, foram selecionados 15 eventos, representando uma gama variada de vazões, incluindo a enchente de julho de 1983, correspondente à máxima vazão registrada na estação fluviométrica Jangada do Sul. A Tabela 3 apresenta as características principais dos 15 eventos selecionados.

Analisando-se os valores do coeficiente de deflúvio, apresentados na Tabela 3, verifica-se que o evento 15 apresenta coeficiente significativamente superior aos demais. Um fator que contribui para este alto valor é o grau de incerteza associado à extrapolação da curva-chave.

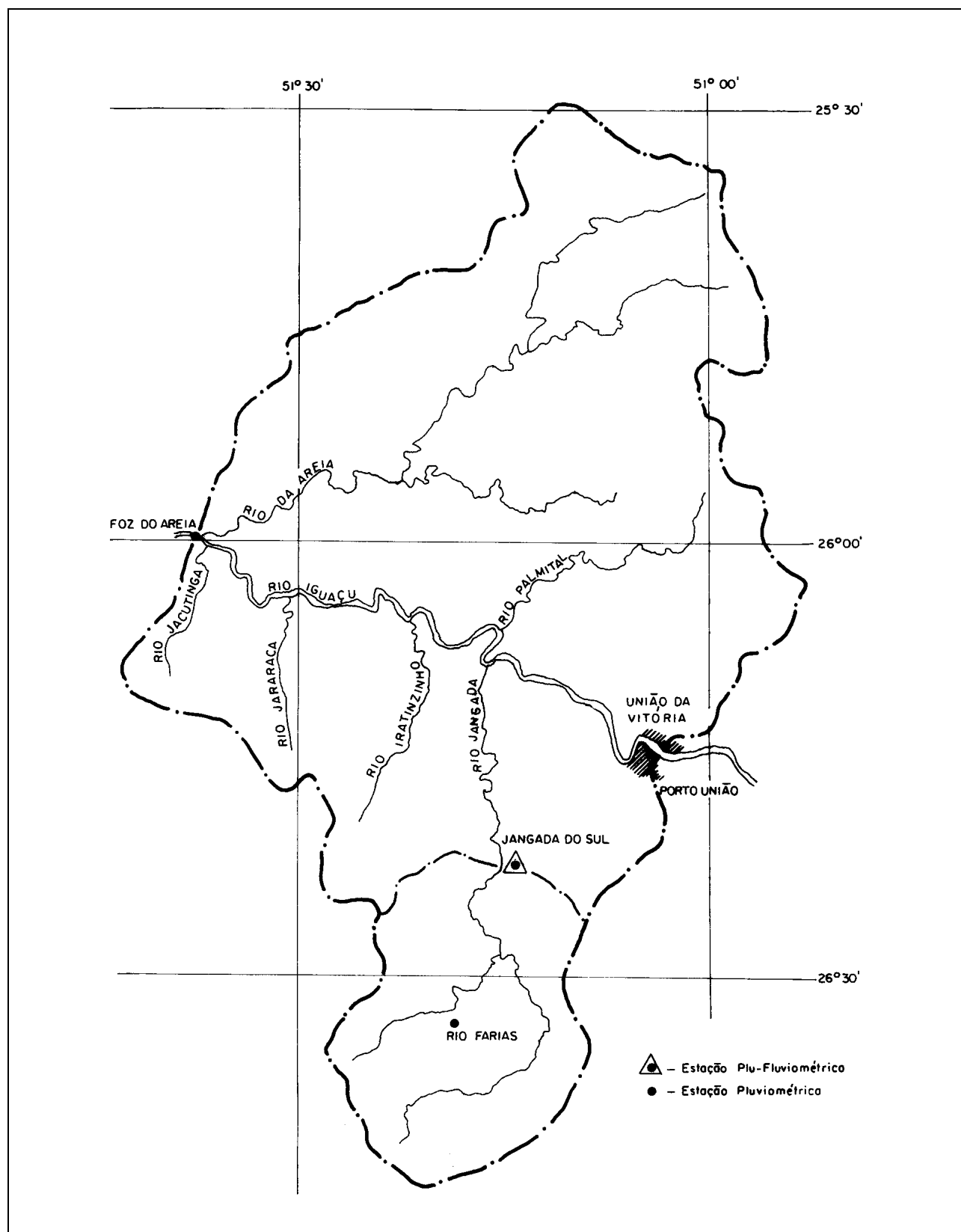


Figura 1. Bacia hidrográfica do rio Jangada. Localização das estações hidrométricas utilizadas no estudo.

Tabela 3. Características dos eventos selecionados.

Evento	Início	Chuva Total (mm)	Vazão Superficial (mm)	Coeficiente de Deflúvio	Vazão Máxima (m ³ /s)	Tempo de Pico (h)
01	26/10/1989	79,0	15,4	0,19	107,4	36
02	20/01/1990	130,1	39,3	0,30	223,3	36
03	28/04/1990	100,2	30,0	0,30	207,8	24
04	18/06/1990	81,6	24,9	0,30	173,2	24
05	22/10/1988	74,8	20,9	0,28	177,0	24
06	03/05/1989	111,5	26,3	0,24	135,4	48
07	15/08/1990	115,0	45,6	0,40	312,0	24
08	12/12/1990	89,8	21,6	0,24	154,2	24
09	05/10/1991	155,6	25,8	0,17	221,0	12
10	24/09/1984	90,0	19,9	0,22	154,2	24
11	06/07/1987	57,3	11,8	0,21	83,6	36
12	31/10/1985	49,8	13,5	0,27	119,3	24
13	05/08/1984	154,1	57,5	0,37	279,5	48
14	12/06/1984	173,8	58,8	0,34	262,4	60
15	05/07/1983	429,8	301,4	0,70	970,4	60

Como se observa na Tabela 3, os eventos não obedecem a uma seqüência cronológica. Os eventos 01 a 10 foram considerados como eventos de calibração, enquanto os eventos de 11 a 15 foram considerados eventos de verificação. Procurou-se montar os dois conjuntos de eventos com cheias de diferentes magnitudes. A enchente de julho de 1983 foi escolhida como último evento por representar a maior cheia registrada na bacia.

Determinação do escoamento superficial

A separação do escoamento foi necessária em função do uso do hidrograma unitário. A determinação do fim do escoamento foi feita utilizando-se o conceito de curva de depleção do escoamento subterrâneo, representada pela equação a seguir:

$$q_i = q_s e^{-\alpha(t_i - t_s)} \quad (13)$$

onde: q_i = vazão no instante t_i ; q_s = vazão no instante t_s ; t_s = instante correspondente ao fim do escoamento superficial; α = expoente da curva de depleção.

Em uma primeira tentativa, procurou-se obter um valor médio para a constante de depleção α a ser utilizado para todos os eventos. Procurou-se analisar os períodos de estiagem registrados na estação fluviométrica Jangada do Sul. Os resultados obtidos não permitiram definir um valor médio para α , devido, principalmente, ao fato dos períodos de estiagem na bacia do rio Iguaçu serem relativamente curtos.

A alternativa adotada foi analisar separadamente cada um dos quinze eventos selecionados. Para cada evento, identificou-se o fim do escoamento superficial, plotando-se os valores de vazão do ramo de recessão do hidrograma em um papel mono-log, com a escala aritmética representando tempo e a escala logarítmica representando vazão. A curva de depleção do escoamento subterrâneo, Equação (13), em papel mono-log é representada por uma reta. Portanto, adotou-se como fim do escoamento superficial o instante no qual a vazão fugia da tendência linear do ramo de recessão.

A separação dos escoamentos subterrâneo e superficial foi feita supondo-se uma variação linear do escoamento subterrâneo entre os instantes inicial e final do escoamento superficial. É importante citar que os escoamentos subterrâneo e sub-superficial foram considerados como um único componente do

hidrograma de escoamento, sendo citados apenas como escoamento subterrâneo.

A precipitação efetiva para cada evento foi determinada, considerando-se como hipótese simplificadora, um valor de infiltração constante para cada um dos 15 eventos selecionados, calculado de modo a fornecer o mesmo volume de escoamento superficial obtido na separação dos escoamentos subterrâneo e superficial.

APLICAÇÃO DO FILTRO DE KALMAN

O algoritmo do Filtro de Kalman, como apresentado nos Tabelas 1 e 2, foi aplicado na estimativa e atualização das ordenadas do hidrograma unitário e dos parâmetros de um modelo auto-regressivo de ordem 2, utilizando-se os 15 eventos hidrológicos selecionados. O intervalo unitário adotado foi de 12 h em função da frequência de observações (2 leituras diárias) das estações hidrométricas utilizadas. Uma análise dos eventos selecionados, principalmente em relação ao ramo de ascensão dos hidrogramas, mostrou que o intervalo de tempo adotado não era o mais indicado para a representação dos eventos de cheia da bacia em questão, prejudicando a qualidade dos resultados obtidos.

Inicialmente, aplicou-se o algoritmo do Filtro de Kalman *sem* correção dos ruídos e das matrizes de covariância, Tabela 1, e *sem* as restrições estabelecidas em Gomes (1995). Na sequência, aplicou-se o algoritmo do Filtro de Kalman *sem* correção dos ruídos e das matrizes de covariância, Tabela 1, e *com* restrições. Finalmente, utilizou-se o algoritmo do Filtro de Kalman *com* correção dos ruídos e das matrizes de covariância, Tabela 2, e *com* restrições.

Análise de desempenho do modelo

Utilizou-se como parâmetro de comparação, na avaliação dos resultados apresentados pela aplicação do Filtro de Kalman, a raiz do erro quadrático médio (REQM), considerando-se as diferenças entre as vazões observadas e estimadas para os eventos de números 11 a 15, conforme numeração apresentada na Tabela 3. Como mencionado anteriormente, os eventos 1 a 10 foram utilizados como eventos de calibração do modelo, com o objetivo de minimizar a

influência de hipóteses relativas ao estado inicial do sistema. A raiz do erro quadrático médio foi calculada como a seguir:

$$REQM = \sqrt{\frac{\sum (q_{obs} - q_{est})^2}{n}} \quad (14)$$

onde: REQM = raiz do erro quadrático médio (m^3/s); q_{obs} = vazão observada (m^3/s); q_{est} = vazão estimada (m^3/s); n = número de valores considerados.

ESTIMATIVA E ATUALIZAÇÃO DAS ORDENADAS DO HIDROGRAMA UNITÁRIO

Este item apresenta os resultados da aplicação do Filtro de Kalman na estimativa e correção em tempo real das ordenadas do hidrograma unitário.

Estimativa inicial do hidrograma unitário

A aplicação do Filtro de Kalman requer a estimativa do estado inicial do sistema. É interessante citar que Hino (1973) utiliza, inclusive, a hipótese de ordenadas nulas como aproximação inicial do estado do sistema. Portanto, não seguiu-se um critério muito rígido para a definição da estimativa inicial do hidrograma unitário.

Adotou-se, como condição inicial, um hidrograma unitário triangular. Os valores de tempo de pico e tempo de base do hidrograma unitário foram determinados em função de uma análise dos dados de precipitação efetiva e de vazão superficial dos 15 eventos hidrológicos selecionados. Definiu-se o tempo de pico igual a 1 dia e o tempo de base igual a 6 dias. Considerando-se um intervalo unitário de 12 h, definiu-se um hidrograma unitário composto por 13 ordenadas.

A vazão de pico (q_p) do hidrograma unitário foi calculada de modo a produzir um volume equivalente a uma chuva efetiva de 10 mm distribuída uniformemente sobre uma bacia de 1050 km^2 . A Tabela 4 apresenta a estimativa inicial do hidrograma unitário.

Tabela 4. Estimativa inicial do hidrograma unitário.

i ($\Delta t = 12$ h)	ordenada do hidrograma unitário (m^3/s)	i ($\Delta t = 12$ h)	ordenada do hidrograma unitário (m^3/s)
0	0,00	7	20,26
1	20,26	8	16,20
2	40,51	9	12,15
3	36,46	10	8,10
4	32,41	11	4,05
5	28,36	12	0,00
6	24,31		

Para efeito de comparação com os resultados obtidos através do uso do Filtro de Kalman, estimou-se as vazões dos eventos de 11 a 15, utilizando-se a aproximação inicial do hidrograma unitário, e calculou-se o valor da raiz do erro quadrático médio (REQM). O valor de REQM obtido foi de 68,45 m^3/s .

Algoritmo do filtro de Kalman sem correção dos ruídos e das matrizes de covariância e sem restrições

O algoritmo do Filtro de Kalman *sem* correção dos ruídos e das matrizes de covariância, Tabela 1, considera, por hipótese, que as matrizes de covariância Q e R são constantes no tempo e que os ruídos w e v constituem série de ruídos brancos, sendo representados por seu valor médio igual a zero. Como aproximação inicial da matriz de covariância do erros de estimativa P, adotou-se a matriz identidade.

Em uma primeira análise, procurou-se determinar a relação Q/R que produzisse a menor REQM. Para tanto, adotou-se $R = 0,01$ e aplicou-se o algoritmo do Filtro de Kalman para diferentes valores de Q/R. A Tabela 5 apresenta os valores de REQM para $R = 0,01$ e para diferentes valores de Q/R. O menor valor de REQM foi obtido para $Q/R = 0$.

Definida a melhor relação Q/R, pesquisou-se o valor de R que produzisse a menor REQM, considerando-se $Q/R = 0$. A Tabela 6 apresenta os valores de REQM

para $Q/R = 0$ e para diferentes valores de R. O menor valor de REQM foi obtido para $R = 10$.

Tabela 5. Valores de REQM para $R = 0,01$ e diferentes relações Q/R. Filtro de Kalman sem correção dos ruídos e das matrizes de covariância e sem restrições.

Relação Q/R	REQM (m^3/s)
0	37,76
0,01	43,02
0,1	50,21
1	60,34
10	62,83
100	68,75
aproximação inicial	68,45

Tabela 6. Valores de REQM para $Q/R = 0$ e diferentes valores de R. Filtro de Kalman sem correção dos ruídos e das matrizes de covariância e sem restrições.

R	REQM (m^3/s)
0,01	37,76
0,1	37,75
1	37,69
10	37,43
100	43,75
1000	62,01
10000	67,68
aproximação inicial	68,45

Algoritmo do filtro de Kalman *sem* correção dos ruídos e das matrizes de covariância e *com* restrições

No processo de estimativa e atualização das ordenadas do hidrograma unitário, verificou-se a ocorrência de ordenadas negativas e a não conservação do volume do hidrograma unitário. Portanto, adotou-se o esquema de restrições proposto em Gomes (1995).

O procedimento foi o mesmo adotado no item anterior. Em uma primeira análise, procurou-se determinar a relação Q/R que produzisse a menor REQM. Para tanto, adotou-se $R = 0,01$ e aplicou-se o algoritmo do Filtro de Kalman para diferentes valores de Q/R . A Tabela 7 apresenta os valores de REQM para $R = 0,01$ e para diferentes valores de Q/R . Novamente, o menor valor de REQM foi obtido para $Q/R = 0$.

Tabela 7. Valores de REQM para $R = 0,01$ e diferentes relações Q/R . Filtro de Kalman *sem* correção dos ruídos e das matrizes de covariância e *com* restrições.

Relação Q/R	REQM (m^3/s)
0	40,18
0,01	40,85
0,1	78,14
1	96,18
10	99,90
100	101,37
aproximação inicial	68,45

Definida a melhor relação Q/R , pesquisou-se o valor de R que produzisse a menor REQM, considerando-se $Q/R = 0$. A Tabela 8 apresenta os valores de REQM para $Q/R = 0$ e para diferentes valores de R . O menor valor de REQM, como anteriormente, foi obtido para $R = 10$.

Tabela 8. Valores de REQM para $Q/R = 0$ e diferentes valores de R . Filtro de Kalman *sem* correção dos ruídos e das matrizes de covariância e *com* restrições.

R	REQM (m^3/s)
0,01	40,18
0,1	40,16
1	39,96
10	38,99
100	43,51
1000	61,64
10000	67,63
aproximação inicial	68,45

Comparando-se os valores de REQM apresentados nas Tabelas 5 a 8, verifica-se que a adoção das restrições não melhorou o desempenho do modelo. A principal vantagem foi o atendimento aos conceitos básicos de ordenadas não negativas e de volume unitário de 10 mm.

Algoritmo do filtro de Kalman *com* correção dos ruídos e das matrizes de covariância e *com* restrições

O algoritmo do Filtro de Kalman *com* correção dos ruídos e das matrizes de covariância, Tabela 2, estabelece a correção dos ruídos w e v e das matrizes de covariância Q e R em tempo real. Como aproximação inicial da matriz de covariância dos erros de estimativa P , adotou-se a matriz identidade. Adicionalmente, introduziu-se as restrições de ordenadas não negativas e conservação do volume unitário.

Os valores de precipitação, vazão e aproximação inicial das ordenadas do hidrograma unitário foram os mesmos adotados anteriormente. O cálculo da REQM, como anteriormente, foi feito considerando-se os eventos de 11 a 15. O valor de REQM obtido na aplicação do algoritmo do Filtro de Kalman *com* correção dos ruídos e das matrizes de covariância e *com* restrições foi de $62,29 m^3/s$.

Portanto, o desempenho do modelo foi inferior aos algoritmos anteriores. O ganho em relação à aproximação inicial não foi muito significativo já que reduziu a REQM somente de 68,45 m³/s para 62,29 m³/s.

A Tabela 9 apresenta os valores dos ruídos w e v e das matrizes de covariância Q e R ao final de cada evento. Verifica-se que os ruídos w e v convergiram para valores pequenos quando comparados às ordenadas do hidrograma unitário, como sugere a hipótese de série de ruídos brancos. Destaca-se, também, que as matrizes de covariância Q e R convergiram para valores que confirmam a relação $Q/R = 0$ verificada nos algoritmos anteriores.

Comparação dos hidrogramas para a enchente de julho de 1983

Além da comparação entre os valores obtidos para a REQM, aplicando-se os diferentes algoritmos, apresenta-se os hidrogramas observado e estimados para a enchente de julho de 1983, a maior cheia já registrada na bacia do rio Jangada. A Figura 2 apresenta os hidrogramas observado e estimados utilizando o hidrograma unitário e o Filtro de Kalman

Os hidrogramas estimados para a enchente de 1983, apresentados na Figura 2, foram obtidos considerando-se três modelos distintos:

- Modelo HU1: vazões estimadas pela aproximação inicial do hidrograma unitário, apresentada na Tabela 4;
- Modelo HU2: vazões estimadas pelo hidrograma unitário atualizado pelo algoritmo do Filtro de Kalman *sem* correção dos ruídos w e v e das matrizes de covariância Q e R e *com* restrições. Adotou-se a relação $Q/R = 0$ e $R = 10$;
- Modelo HU3: vazões estimadas pelo hidrograma unitário atualizado pelo algoritmo do Filtro de Kalman *com* correção dos ruídos w e v e das matrizes de covariância Q e R e *com* restrições.

Verifica-se, na Figura 2, que o modelo HU3 acompanhou o desempenho do modelo HU1, ou seja, a utilização do algoritmo mais complexo, que corrige os ruídos w e v e as suas respectivas matrizes de covariância não melhorou o desempenho do modelo.

É importante destacar que a qualidade dos resultados é também função das limitações do modelo hidrológico adotado para a estimativa das vazões. Conceitualmente, o hidrograma unitário é uma função linear e uma das hipóteses básicas adotadas em sua formulação é a de que chuvas com mesmo tempo de duração produzem hidrogramas com mesmo tempo de base. O escoamento em canais é caracteristicamente não linear. A velocidade de propagação da onda de cheia é diretamente proporcional à vazão. Isto sem considerar problemas de extravasamento da calha e armazenamento nas planícies de inundação.

ESTIMATIVA E ATUALIZAÇÃO DOS PARÂMETROS DE UM MODELO AUTO-REGRESSIVO

Este item apresenta os resultados da aplicação do Filtro de Kalman na estimativa e correção em tempo real dos parâmetros de um modelo auto-regressivo de ordem 2.

Aproximação inicial dos parâmetros do modelo auto-regressivo

A aplicação do Filtro de Kalman, como mencionado anteriormente, exige a estimativa inicial do estado do sistema. Na identificação da ordem e na estimativa inicial dos parâmetros do modelo auto-regressivo seguiu-se o procedimento exposto em Box e Jenkins (1976), considerando-se somente os eventos de 1 a 10. A partir dos dados de vazão total, identificou-se um modelo de ordem 2 definido pela equação a seguir.

$$q_t = 0,844q_{t-1} - 0,308q_{t-2} + 31,598 \quad (15)$$

onde: q_t = vazão (m³/s) no instante t .

Tabela 9. Valores dos ruídos w e v e das matrizes de covariância Q e R ao final de cada evento. Filtro de Kalman com correção dos ruídos e das matrizes de covariância e com restrições.

Evento	w	Q	v	R
1	-0,020	$-3,2 \times 10^{-5}$	0,42	148,8
2	-0,021	$4,1 \times 10^{-5}$	0,21	325,4
3	-0,021	$5,8 \times 10^{-5}$	0,18	979,8
4	-0,022	$5,7 \times 10^{-5}$	0,16	1285,3
5	-0,022	$5,7 \times 10^{-5}$	0,14	1317,8
6	-0,022	$5,4 \times 10^{-5}$	0,13	1167,5
7	-0,022	$6,6 \times 10^{-5}$	0,15	1301,0
8	-0,022	$6,4 \times 10^{-5}$	0,14	1282,5
9	-0,022	$6,6 \times 10^{-5}$	0,14	1490,6
10	-0,022	$6,4 \times 10^{-5}$	0,13	1400,9
11	-0,022	$6,4 \times 10^{-5}$	0,13	1294,4
12	-0,022	$6,3 \times 10^{-5}$	0,12	1233,0
13	-0,022	$7,5 \times 10^{-5}$	0,13	1383,9
14	-0,022	$7,0 \times 10^{-5}$	0,13	1295,3
15	-0,023	$70,2 \times 10^{-5}$	0,35	2409,9

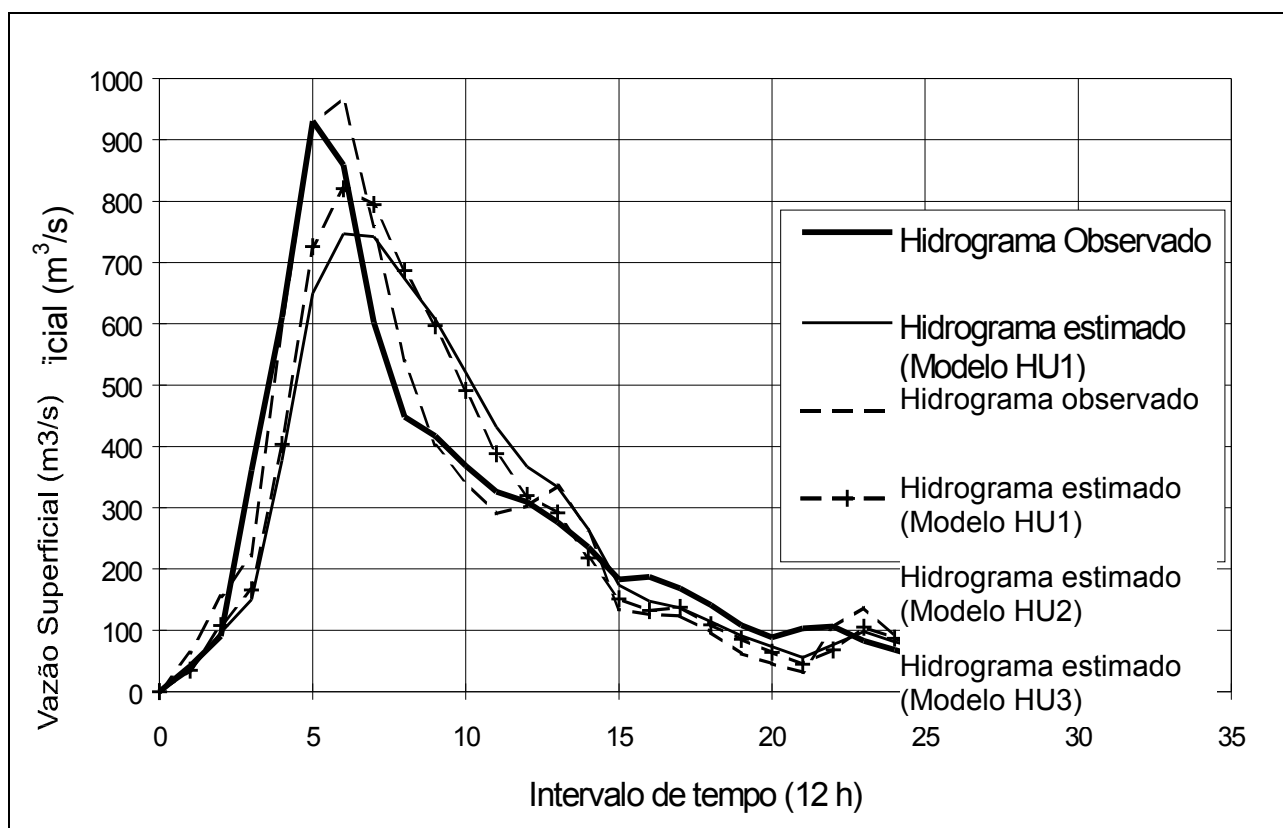


Figura 2. Cheia de julho de 1983. Comparação dos hidrogramas observado e estimados utilizando-se o hidrograma unitário (modelos HU1, HU2 e HU3).

Intervalo de tempo (12h)

Para efeito de comparação, estimou-se as vazões dos eventos de 11 a 15, utilizando-se a aproximação inicial do modelo auto-regressivo, Equação (15), e calculou-se o valor da REQM. O valor de REQM obtido foi de 94,51 m³/s.

Os valores de $\beta_1 = 0,844$ e $\beta_2 = -0,308$, apresentados na Equação (15), foram adotados como aproximação inicial do estado do sistema. A vazão média calculada considerando-se somente os eventos de 01 a 10 não foi corrigida na aplicação do algoritmo do Filtro de Kalman. Justifica-se pela uniformidade de tratamento, já que na previsão com a aproximação inicial sem atualização dos parâmetros, Equação (15), não se corrigiu a média das vazões. A adoção da correção da vazão média a cada intervalo de tempo não traria dificuldades do ponto de vista de implementação computacional.

Algoritmo do filtro de Kalman sem correção dos ruídos e das matrizes de covariância e sem restrições

Como mencionado anteriormente, o algoritmo do Filtro de Kalman *sem* correção dos ruídos e das matrizes de covariância, Tabela 1, considera as matrizes de covariância Q e R constantes no tempo e que os ruídos w e v constituem série de ruídos brancos, com valor médio igual a zero. Como aproximação inicial da matriz de covariância dos erros de estimativa P, adotou-se a matriz identidade.

Em uma primeira análise, procurou-se determinar a relação Q/R que produzisse a menor REQM. Para tanto, adotou-se R = 0,01 e aplicou-se o algoritmo do Filtro de Kalman para diferentes valores de Q/R. A Tabela 10 apresenta os valores de REQM para R = 0,01 e para diferentes valores de Q/R. O menor valor de REQM foi obtido para Q/R = 0. Destaca-se que, para relações de Q/R \neq 0, os resultados foram inferiores aos resultados obtidos através da aproximação inicial.

A partir da definição da melhor relação Q/R, pesquisou-se o valor de R que produzisse a menor REQM. A Tabela 11 apresenta os

valores de REQM para Q/R = 0 e para diferentes valores de R. Verifica-se que para a relação Q/R = 0, o valor de REQM mostrou-se pouco sensível a variações de R.

Tabela 10. Valores de REQM para R = 0,01 e diferentes relações Q/R. Filtro de Kalman sem correção dos ruídos e das matrizes de covariância e sem restrições.

Relação Q/R	REQM (m ³ /s)
0	64,39
0,01	220,98
0,1	403,56
1	466,96
10	471,03
100	470,18
aproximação inicial	94,51

Tabela 11. Valores de REQM para Q/R = 0 e diferentes valores de R. Filtro de Kalman sem correção dos ruídos e das matrizes de covariância e sem restrições.

R	REQM (m ³ /s)
0,01	64,39
0,1	64,39
1	64,39
10	64,39
100	64,39
1000	64,41
10000	64,56
aproximação inicial	94,51

Algoritmo do filtro de Kalman sem correção dos ruídos e das matrizes de covariância e com restrições

No processo de estimativa e atualização dos parâmetros do modelo auto-regressivo, verificou-se a ocorrência de valores para os parâmetros do modelo que não respeitavam os limites apresentados em Box e Jenkins (1976) para modelos auto-regressivos

de ordem 2. Portanto, adotou-se restrições como proposto em Gomes (1995).

O procedimento foi o mesmo adotado no item anterior. Em uma primeira análise, procurou-se determinar a relação Q/R que produzisse a menor REQM. Para tanto, adotou-se $R = 0,01$ e aplicou-se o algoritmo do Filtro de Kalman para diferentes valores de Q/R . A Tabela 12 apresenta os valores de REQM para $R = 0,01$ e para diferentes valores de Q/R . O menor valor de REQM foi obtido novamente para $Q/R = 0$.

A partir da definição da melhor relação Q/R , pesquisou-se o valor de R que produzisse a menor REQM. A Tabela 13 apresenta os valores de REQM para relação $Q/R = 0$ e para diferentes valores de R . O menor valor de REQM foi obtido para $R = 10$.

Tabela 12. Valores de REQM para $R = 0,01$ e diferentes relações Q/R . Filtro de Kalman sem correção dos ruídos e das matrizes de covariância e com restrições.

Relação Q/R	REQM (m^3/s)
0	64,27
0,01	88,97
0,1	87,95
1	86,36
10	86,22
100	86,20
aproximação inicial	94,51

Tabela 13. Valores de REQM para $Q/R = 0$ e diferentes valores de R . Filtro de Kalman sem correção dos ruídos e das matrizes de covariância e com restrições.

R	REQM (m^3/s)
0,01	64,27
0,1	64,27
1	64,27
10	64,27
100	64,27
1000	64,34
10000	64,56
aproximação inicial	94,51

Comparando-se os valores de REQM apresentados nas Tabelas 10 a 13, verifica-se que a adoção das restrições melhoraram o desempenho do modelo, principalmente quando se analisam os resultados obtidos para relações de $Q/R \neq 0$. Novamente, para a relação $Q/R = 0$, o valor de REQM não se mostrou muito sensível a variações de R .

Algoritmo do filtro de Kalman com correção dos ruídos e das matrizes de covariância e com restrições

O algoritmo do Filtro de Kalman com correção dos ruídos e das matrizes de covariância, Tabela 2, estabelece a correção dos ruídos w e v e das matrizes de covariância Q e R em tempo real. Como aproximação inicial da matriz de covariância dos erros de estimativa P , adotou-se a matriz identidade. Adicionalmente, introduziu-se as restrições aos parâmetros do modelo auto-regressivo de ordem 2, respeitando os limites estabelecidos em Box e Jenkins (1976).

Os valores de vazão e a aproximação inicial dos parâmetros do modelo auto-regressivo foram os mesmos adotados anteriormente. O cálculo da REQM, como anteriormente, foi feito considerando-se os eventos de 11 a 15. O valor de REQM obtido na aplicação do algoritmo do Filtro de Kalman com correção dos ruídos e das matrizes de covariância e com restrições resultou em $49,83 m^3/s$. Portanto, o desempenho do modelo foi superior aos algoritmos anteriores. O ganho em relação à aproximação inicial foi significativo, reduzindo a REQM de $94,51 m^3/s$ para $49,83 m^3/s$.

A Tabela 14 apresenta os valores dos ruídos w e v e das matrizes de covariância Q e R ao final de cada evento. Os valores dos ruídos w e v convergiram para valores relativamente altos quando comparados à ordem de grandeza dos parâmetros do modelo auto-regressivo. Destaca-se que as matrizes de covariância Q e R convergiram para valores que confirmam a relação $Q/R = 0$ verificada nos algoritmos anteriores.

Tabela 14. Valores dos ruídos w e v e das matrizes de covariância Q e R ao final de cada evento. Filtro de Kalman com correção dos ruídos e das matrizes de covariância e com restrições.

Evento	w	Q	v	R
1	-0,12	4,4	12,0	$-0,3 \times 10^4$
2	0,18	3,8	14,0	$-2,1 \times 10^4$
3	0,37	3,6	7,9	$-6,0 \times 10^4$
4	0,39	2,4	7,4	$-6,0 \times 10^4$
5	0,39	2,4	4,4	$-4,6 \times 10^4$
6	0,39	1,9	3,1	$-3,8 \times 10^4$
7	0,38	1,8	2,4	$-4,1 \times 10^4$
8	0,38	1,5	1,2	$-4,1 \times 10^4$
9	0,39	1,4	-0,5	$-4,0 \times 10^4$
10	0,39	1,4	-0,7	$-3,7 \times 10^4$
11	0,39	1,2	-0,8	$-3,1 \times 10^4$
12	0,39	1,1	-1,1	$-2,9 \times 10^4$
13	0,36	1,0	0,4	$-3,0 \times 10^4$
14	0,35	0,9	0,0	$-2,8 \times 10^4$
15	0,38	0,8	-1,3	$-7,1 \times 10^4$

Comparação dos hidrogramas para a enchente de julho de 1983

Além da comparação entre os valores obtidos para a REQM, aplicando-se os diferentes algoritmos, apresenta-se os hidrogramas observado e estimados para a enchente de julho de 1983, a maior cheia já registrada na bacia do rio Jangada. A Figura 3 apresenta os hidrogramas observado e estimados utilizando um modelo auto-regressivo de ordem 2 e o Filtro de Kalman.

Os hidrogramas estimados para a enchente de 1983, apresentados na Figura 3, foram obtidos considerando-se três modelos distintos:

- Modelo AR1: vazões estimadas pela aproximação inicial do modelo auto-regressivo, apresentada na Equação (15);
- Modelo AR2: vazões estimadas pelo modelo auto-regressivo atualizado pelo Filtro de Kalman *sem* correção dos ruídos w e v e das matrizes de covariância Q e R e *com* restrições. Adotou-se os valores de $Q/R = 0$ e $R = 0,01$;
- Modelo AR3: vazões estimadas pelo modelo auto-regressivo atualizado pelo algoritmo do Filtro de Kalman *com* cor-

reção dos ruídos w e v e das matrizes de covariância Q e R e *com* restrições.

Nota-se, na Figura 3, ao contrário do verificado em relação ao uso do hidrograma unitário, que a utilização do algoritmo mais complexo que corrige os ruídos w e v e as suas respectivas matrizes de covariância, melhorou significativamente o desempenho do modelo AR3 em relação ao modelo AR1, que representa a aproximação inicial.

Novamente, é importante destacar que a qualidade dos resultados é também função das limitações do modelo hidrológico adotado para a estimativa das vazões. A estrutura dos modelos auto-regressivos tende a produzir atraso do pico dos hidrogramas.

CONCLUSÕES

O algoritmo do Filtro de Kalman foi aplicado, no contexto deste artigo, com o objetivo de avaliar sua utilização na obtenção de modelos cujos parâmetros possam ser reavaliados à medida em que uma nova informação hidrológica seja obtida. A adoção do Filtro de Kalman permitiu a construção de modelos com correção e atualização dos parâmetros em tempo real.

No caso da obtenção e atualização das ordenadas do hidrograma unitário, a aplicação

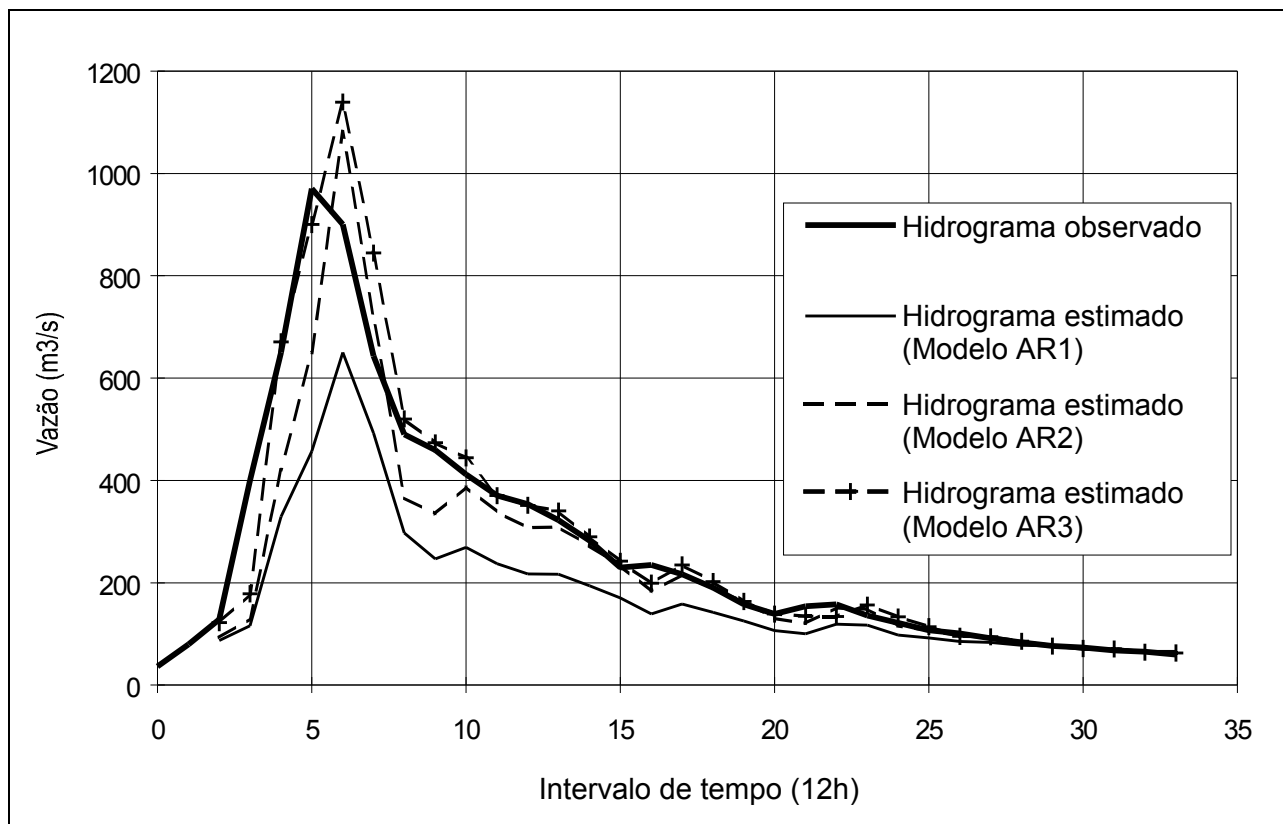


Figura 3. Cheia de julho de 1983. Comparação dos hidrogramas observado e estimados utilizando-se um modelo auto-regressivo de ordem 2 (modelos AR1, AR2 e AR3).

do Filtro de Kalman *sem* a correção dos ruídos e das matrizes de covariância e *sem* restrições melhorou o desempenho do modelo para uma ampla faixa de relação Q/R. Os melhores resultados obtidos foram para relação Q/R = 0.

A adoção de restrições aos valores das ordenadas não melhorou o desempenho do modelo, mas garantiu a manutenção do volume unitário e valores não negativos das ordenadas do hidrograma unitário, de acordo com os conceitos básicos relativos à teoria do hidrograma unitário.

A aplicação do Filtro de Kalman *com* a correção dos ruídos e das matrizes de covariância e *com* restrições não melhorou o desempenho do modelo.

No caso da obtenção e atualização dos parâmetros do modelo auto-regressivo, os resultados obtidos pela aplicação do Filtro de Kalman *sem* a correção dos ruídos e das matrizes de covariância e *sem* restrições apresentou melhores resultados somente para a relação Q/R = 0.

A adoção de restrições permitiu a melhoria do modelo para uma ampla faixa da relação Q/R. Portanto, para o modelo auto-regressivo de ordem 2, é recomendável a utilização de restrições para garantir a convergência dos parâmetros do modelo dentro dos limites apresentados em Box e Jenkins (1976).

A aplicação do Filtro de Kalman *com* a correção dos ruídos e das matrizes de covariância e *com* restrições melhorou significativamente o desempenho do modelo.

Destaca-se a flexibilidade que o Filtro de Kalman proporciona na representação de modelos, através do conceito de modelos dinâmicos de estado.

REFERÊNCIAS

ALVES, M. H., MAGALHÃES, P. C. de, KELMAN, J. 1991, Previsão em tempo real de vazão associada a uma incerteza e utilizando técnica de filtragem de erros. In: SIMPÓSIO

- BRASILEIRO DE RECURSOS HÍDRICOS, 9., 1991, Rio de Janeiro. *Anais*. São Paulo: ABRH. v. 3., p. 111-123.
- BERGMAN, M. J., DELLEUR, J. W. 1985a, Kalman filter estimation and prediction of daily streams flows: I. Review, algorithm, and simulation experiments. *Water Resources Bulletin*, v. 21, n. 5, p. 815-825, Oct.
- BERGMAN, M. J., DELLEUR, J. W. 1985b, Kalman filter estimation and prediction of daily streams flows: II. Applications to the Potomac river. *Water Resources Bulletin*, v. 21, n. 5, p. 815-827-832, Oct.
- BOX, G. E. P., JENKINS, G. 1976, *Time series analysis, forecasting and control*. Oakland: Holden Day.
- BRAS, R. L., RODRIGUEZ-ITURBE, I. 1985, *Random functions and hydrology*. Reading: Addison-Wesley, 559 p.
- COOPER, D. M. 1982, Adaptive parameter estimation for non-linear hydrological models with general loss functions. *Journal of Hydrology*, v. 58, n. 1/2, p. 29-45, Aug.
- GEER, F. C. 1987, van. *Applications of Kalman filtering in the analysis and design of groundwater monitoring networks*. S. 1: TNO Institute of Applied Geoscience, 118 p.
- GEORGAKAKOS, K. P. 1986, A generalized stochastic hydrometeorological model for flood and flash-flood forecasting. 2. Case Studies. *Water Resources Research*, v. 22, n. 13, p. 2096-2106, Dec.
- GOMES, J. 1995, *Estimativa de parâmetros de modelos hidrológicos utilizando o método do filtro de Kalman*. Curitiba: UFPR, 179 p. Dissertação (Mestrado) - UFPR.
- GOMES, J., MINE, M. R. M. 1989, Estimativa do hidrograma unitário através da técnica do filtro de Kalman. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE RECURSOS HÍDRICOS, 8., 1989, Foz do Iguaçu. *Anais*. São Paulo: ABRH. v. 2., p. 92-100.
- GOMES, J., MINE, M. R. M. 1991, Estimativa dos parâmetros de um modelo autoregressivo através da técnica do filtro de Kalman. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE RECURSOS HÍDRICOS, 9., 1991, Rio de Janeiro. *Anais*. São Paulo: ABRH. v. 1., p. 428-435.
- HINO, M. 1973, On-line prediction of hydrologic systems. In: CONGRESS IAHR (15.: 1973: Istambul). *Proceedings*. Istambul: IAHR, v. 4., p. 121-129.
- HOLZ, C. A., SARMENTO, R., LOUREIRO, G. V. 1989, Previsão de vazão do rio Doce através do filtro de Kalman. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE RECURSOS HÍDRICOS, 8., 1989, Foz do Iguaçu. *Anais*. São Paulo: ABRH. v. 2., p. 35-40.
- KALMAN, R. E. 1960, A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering*, Transactions of the ASME, Series D, v. 82, p. 35-45.
- KALMAN, R. E., BUCY, R. 1961, New results in linear filtering and prediction theory. *Journal of Basic Engineering*, Transactions of the ASME, Series D, v. 83, n. 1, p. 95-108, Mar.
- KITADINIS, P. K., BRAS, R. L. 1980a, Real-time forecasting with a conceptual hydrological model. 1. Analysis of uncertainty. *Water Resources Research*, v. 16, n. 6, p. 1025-1033, Dec.
- KITADINIS, P. K., BRAS, R. L. 1980b, Real-time forecasting with a conceptual hydrological model. 2. Applications and results. *Water Resources Research*, v. 16, n. 6, p. 1034-1044, Dec.
- KITADINIS, P. K., LARA, O. G., LANE, R. W. 1984, Evaluation of the efficiency of streamflow data collection strategies for alluvial rivers. *Journal of Hydrology*, v. 72, n. 1/2, p. 85-103, Apr.
- KUO, Jan-Tai *et al.* 1990, Real time operation of Tanshui river reservoirs. *Journal of Water Resources Planning and Management*, v. 116, n. 3, p. 349-361, May/June.
- MINE, M. R. M. 1984, *Modelos estocásticos lineares para previsão de cheias em tempo real*. São Paulo: USP. 127 p. Dissertação (Mestrado) - USP.
- NASH, J. E., SUTCLIFFE, J. V. 1970, River flow forecasting through conceptual models, part I - a discussion of principles. *Journal of Hydrology*, v. 10, p. 282-290.
- O'CONNELL, P. E. 1980, *Real-time hydrological forecasting and control*. London: NERC, 1980. 264 p. Proceedings of 1st International Workshop, Institute of Hydrology.
- PATRY, G. G., MARINO, M. A. 1984, Parameter identification of time-varying noisy difference equations for real-time urban runoff forecasting. *Journal of Hydrology*, v. 72, n. 1/2, p. 25-55, Apr.
- TODINI, E., O'CONNELL, P. E., JONES, D. A. 1980, Basic methodology: Kalman filter estimation problems. In: O'CONNELL, P. E. *Real-time hydrological forecasting and control*. London: NERC, 1980. 264 p. Proceedings of 1st International Workshop, Institute of Hydrology.
- WOOD, E. F., SZOLLOSI-NAGY, A. 1978, An adaptive algorithm for analyzing short-term structural and parameter changes in hydrologic prediction models. *Water Resources Research*, v. 14, n. 4, p. 577-581, Aug.

Estimation of Hydrological Models Parameters Using Kalman Filter

ABSTRACT

The filtering algorithm, Kalman Filter was used in real-time estimation and correction of classical hydrological models parameters. The Unit Hydrograph and Autoregressive Model were applied to Jangada river basin, with a drainage area of 1050 km². Two different algorithms of Kalman Filter were described in a crescent level of generality. The results showed it is necessary to impose restrictions to the values of the models parameters to guarantee the convergence to acceptable values according to theory of the hydrological models used here. It concludes that Kalman Filter is useful to formulate hydrological models with real-time correction of the models parameters.