

## ALGORITMOS ADAPTATIVOS DE ALTA-RESOLUÇÃO NO ESTUDO DE ESCOAMENTOS SUPERCRÍTICOS COM DISCRETIZAÇÕES NÃO-ESTRUTURADAS

Paulo Roberto Maciel Lyra

Departamento de Engenharia Mecânica - CTGC-UFPE  
Av. Acadêmico Hélio Ramos, S/N, CEP 50740-530, Recife/PE - Brasil

### RESUMO

No presente trabalho descrevem-se as hipóteses simplificadoras do modelo matemático investigado, que governa o escoamento de um fluido "ideal" em canal retangular, e o desenvolvimento teórico das formulações numéricas propostas para solução do referido modelo. Diversas ferramentas numéricas desenvolvidas originalmente no contexto do estudo de fluidos compressíveis em aerodinâmica são estendidas para solução das equações que regem a hidrodinâmica em canais aberto. Estas estratégias englobam, entre outras, a utilização da formulação "edge-based" do método dos elementos finitos (MEF) e a incorporação de métodos de alta-resolução para a captura de descontinuidades que se baseiam nos métodos "upwind" de discretização. No desenvolvimento dos métodos de alta-resolução faz-se uso do conceito de "Local Extremum Diminishing" (LED) ou da estratégia denominada MUSCL (Monotonic Upstream Centered Schemes for Conservation Laws) para estender o método de "upwind" de primeira ordem de Roe. Uma avaliação do desempenho das formulações propostas no estudo de escoamentos supercríticos em canais é apresentada no final deste trabalho, onde utiliza-se ainda um procedimento de adaptabilidade de malhas versão H (redefinição de malhas ou subdivisão dos elementos) para melhorar a precisão dos resultados.

### INTRODUÇÃO

A correta modelagem da hidrodinâmica quando do estudo de problemas da engenharia costeira e ambiental é de grande importância e o desenvolvimento de algoritmos numéricos para simulação de problemas nestas áreas tem atraído um crescente interesse da comunidade científica. A utilização de algoritmos baseados em métodos adequados para o uso com malhas não-estruturadas (por ex., o método dos elementos finitos) se apresenta como bastante atraente devido à flexibilidade na simulação de problemas que envolvem geometrias complexas e a possibilidade da incorporação de técnicas adaptativas. Dentro deste contexto, diversos pesquisadores têm adotado o método dos elementos finitos no estudo de escoamentos a superfície livre (Kawahara et al. 1982; Navon, 1988; Peraire et al. 1986; Zienkiewicz e Ortiz, 1995). O presente trabalho foi motivado pelo trabalho de Zienkiewicz e Ortiz (1995) que apresenta um algoritmo para a solução do problema geral das equações bidimensionais do escoamento em águas rasas. Assim como outras formulações que se apresentam na literatura, a formulação descrita no referido trabalho possui inúmeras características promissoras, no entanto apresenta deficiências nos casos de escoamentos supercríticos, onde tem-se oscilações na proximidade dos saltos hidráulicos. A incorporação de técnicas desenvolvidas para lidar com escoamentos compressíveis em problemas da aerodinâmica, onde a existência de descontinuidades (por ex. ondas de choque) são freqüentes, representa uma possível melhoria para os problemas mencionados anteriormente.



Neste trabalho, o modelo matemático que governa os fenômenos em estudo e as simplificações adotadas são descritos. Em seguida, duas formulações diferentes baseadas na incorporação de métodos de alta-resolução tipo "upwind" e que utilizam o método dos elementos finitos para extensão multidimensional são propostas. Descreve-se então alguns detalhes referentes à implementação numérica das formulações apresentadas, assim como as estratégias de adaptabilidade de malhas empregadas. O desempenho dos algoritmos resultantes é avaliado através da simulação do escoamento que se segue após a ruptura brusca de uma barragem em um canal e do escoamento supercrítico em canais retangulares de largura variável. Nas diversas aplicações tem-se a presença de ondas positivas de frente abrupta (ou salto hidráulico positivo), ondas negativas de variação gradual (ou salto negativo) e a combinação dos mesmos com ondas cruzadas. Apesar da presença destes fenômenos, com gradientes elevadíssimos (ou "descontinuidades") na solução, os resultados são muito bons, o que demonstra a importância da utilização em conjunto dos métodos de alta-resolução e das técnicas adaptativas de refinamento de malhas. Finalmente, destacam-se as principais vantagens e extensões possíveis dos procedimentos propostos.

## MODELO MATEMÁTICO

As equações das águas rasas, em duas dimensões, podem ser escritas por meio de uma notação vetorial compacta, na forma conservativa, como

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}^j}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{G}^j}{\partial x_j} + \mathbf{Q} = 0 \quad \text{em } (\Omega \times \mathbf{I}) \quad (1)$$

com  $j = 1, 2$  e que expressa a conservação de massa, momento e energia num domínio fechado  $\Omega$  e intervalo de tempo  $\mathbf{I}$ , utilizando-se um sistema de referências Cartesiano, onde  $x_j$  representa a coordenada espacial e  $t$  a

coordenada temporal. Os efeitos térmicos não são considerados nas aplicações analisadas, com a equação de conservação de energia podendo ser desacoplada do sistema de equações e tendo sido eliminada no presente trabalho. Este sistema de equações pode ser obtido diretamente das equações completas de Navier-Stokes (Peraire et al. 1986). Na equação (1),  $\mathbf{U}$  representa o vetor das variáveis conservativas,  $\mathbf{F}^j(\mathbf{U})$ ,  $\mathbf{G}^j(\partial \mathbf{U} / \partial x_j)$  são, respectivamente, os fluxos inviscidos e viscosos na direção  $x_j$  e  $\mathbf{Q}(\mathbf{U}, \mathbf{x})$  contém os termos de "fonte ou sumidouro". A convenção de soma para índices repetidos é adotada.

Com o intuito de simplificar o modelo matemático no presente trabalho, os termos referentes às tensões cisalhantes no fluido e na superfície (variações na pressão barométrica e ação do vento), fricção na base do canal e aceleração de Coriolis são considerados irrelevantes. Tem-se assim  $\mathbf{G}^j \equiv 0$  e os vetores remanescentes são descritos como:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ hu_1 \\ hu_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}^j = \begin{bmatrix} hu_1 \\ hu_1 u_1 + p \delta_{1j} \\ pu_1 u_1 + p \delta_{1j} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g(h-H) \partial H / \partial x_1 \\ -g(h-H) \partial H / \partial x_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

que governa a dinâmica de um fluido ideal incompressível e inviscido em canais. Nas expressões em (2),  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker,  $u_j$  é a componente da velocidade média ao longo da profundidade na direção  $x_j$ ,  $h$  representa a profundidade total do fluido,  $H$  a profundidade com relação a um plano de referência fixo e  $g$  é a aceleração da gravidade. Uma nova variável  $p = g(h^2 - H^2)/2$  foi definida para estabelecer uma equivalência direta com as equações que governam o escoamento de fluidos compressíveis e inviscidos, i. e. equações de Euler.

A solução do sistema de equações é investigada em um domínio fechado  $\Omega$  com um contorno  $\Gamma$ . Condições de contorno e iniciais devem ser impostas, o que é feito considerando-se



$$\begin{aligned} \mathbf{F}^n - n^j \mathbf{F}^j &= \mathbf{F}^n \in (\Gamma \times \mathbf{I}); \\ \mathbf{U}(\mathbf{x}, t^n) &= \bar{\mathbf{U}}^n(\mathbf{x}) \in (\Omega \times t^n) \end{aligned} \quad (3)$$

onde  $n^j$  representa a componente, na direção  $x_j$ , do vetor unitário normal à  $\Gamma$  e  $\mathbf{F}^n$  é a componente normal do fluxo no contorno. A forma exata de  $\mathbf{F}^n$  é função da solução local e das condições de contorno consideradas, já  $\bar{\mathbf{U}}^n$  é uma função conhecida em  $t^n$ .

## PROCEDIMENTOS NUMÉRICOS

Nesta seção, os aspectos relevantes das formulações numéricas usadas são apresentados. Para um maior detalhamento consultar os trabalhos de Morgan et al (1992), Lyra et al (1994) e Lyra (1994) que tratam da solução das equações de Euler e Navier-Stokes para fluidos compressíveis e representam a base para a extensão aqui descrita para as equações do escoamento em canais abertos.

Nas aplicações analisadas, os termos  $\mathbf{Q}(\mathbf{U}, \mathbf{x})$  se anulam porque os canais utilizados têm  $H$  constante. Os procedimentos numéricos para discretização dos termos de fonte são portanto omitidos neste trabalho.

## Formulação "edge-based" do MEF

Na construção de uma aproximação via método dos elementos finitos (MEF) para o problema descrito nas equações (1-3), procura-se inicialmente identificar uma formulação variacional para o problema (Johnson, 1987). Em seguida uma formulação variacional aproximada é estabelecida definindo-se um subespaço do espaço de soluções  $\mathbf{T}$  e do espaço das funções de peso  $\mathbf{W}$ . Neste trabalho admite-se uma discretização do domínio computacional em elementos finitos triangulares lineares, com pontos nodais numerados de 1 até  $p$ . Os subespaços  $\mathbf{T}^{(p)}$  e  $\mathbf{W}^{(p)}$ , na formulação de Galerkin do MEF são definidos como

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{(p)} &= \left\{ \hat{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, t) \mid \hat{\mathbf{U}} = \sum_{j=1}^p \mathbf{U}_j(t) N_j(\mathbf{x}); \mathbf{U}_j(t^n) = \bar{\mathbf{U}}^n(\mathbf{x}) = \mathbf{U}_j^n \right\} \\ \mathbf{W}^{(p)} &= \left\{ \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{W} = \sum_{j=1}^p a_j N_j(\mathbf{x}) \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

onde  $N_j$  representa as funções de forma convencionais dos elementos finitos associadas ao ponto nodal  $J$  (localizado em  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_J$ ),  $\mathbf{U}_j$  é o valor de  $\hat{\mathbf{U}}$  no ponto nodal  $J$  e  $a_j$  são constantes. Considerando-se os subespaços dados na equação (4), uma formulação variacional aproximada, na forma fraca, do problema (1-3), com  $\mathbf{G}^j$  e  $\mathbf{Q}$  nulos, pode ser expressa como

$$\begin{aligned} \text{Obter } \hat{\mathbf{U}} \in \mathbf{T} \text{ tal que } \forall t > t^n \\ \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}}{\partial t} N_l d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{F}^j(\hat{\mathbf{U}}) \frac{\partial N_l}{\partial \mathbf{x}} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{F}^n N_l d\Gamma \end{aligned} \quad (5)$$

para todo  $l = 1, 2, \dots, p$ . As integrais que aparecem na expressão (5) podem ser avaliadas como a soma das contribuições individuais dos elementos, e tendo em vista a forma compacta das funções  $N_j$  esta pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \text{Obter } \hat{\mathbf{U}} \in \mathbf{T} \text{ tal que } \forall t > t^n \\ \sum_{E \in \mathcal{T}} \int_E \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}}{\partial t} N_l d\Omega = \sum_{E \in \mathcal{T}} \int_E \mathbf{F}^j(\hat{\mathbf{U}}) \frac{\partial N_l}{\partial \mathbf{x}} d\Omega - \sum_{B \in \mathcal{B}} \int_B \mathbf{F}^n N_l d\Gamma \end{aligned} \quad (6)$$

para todo  $l = 1, 2, \dots, p$ , onde o somatório se estende apenas aos elementos  $E$  e faces do contorno  $B$  que contêm o ponto nodal  $l$ .

A equação discreta (6) pode ser escrita de forma conveniente (Morgan et al, 1992; Lyra, 1994), conforme



$$\mathbf{M} \frac{d\mathbf{U}}{dt} \Big|_I = - \sum_{s=1}^{m_I} L_{Is} \frac{(\mathbf{F}_I^T S_{Is}^T + \mathbf{F}_{Is}^T S_{Is}^T)}{2} + \sum_{f=1}^2 \mathbf{D}_f (4\mathbf{F}_f^* + 2\mathbf{F}_{fI}^* + \mathbf{F}_I^* - \mathbf{F}_{fI}^*) \quad (7)$$

onde utilizou-se uma estrutura de dados composta dos lados ao invés da estrutura de dados convencional do MEF baseada nas conectividades dos elementos. O símbolo chapéu  $\wedge$  foi eliminado da expressão acima, com  $\mathbf{U}$  representando a solução aproximada no que se segue neste artigo. Ainda nesta equação,  $\mathbf{F}_I^T$  representa o fluxo  $\mathbf{F}^T$  no ponto nodal  $I$  e  $\mathbf{F}_{Is}$  representa o fluxo resultante do método de Galerkin em um nó do interior do domínio computacional.  $\mathbf{M}$  representa a matriz de massa consistente do método dos elementos finitos. Finalmente,  $m_I$  representa o número de lados ( $S$ ) da malha que concorrem no ponto nodal  $I$ , o segundo termo à direita na equação (7) denota uma correção para pontos nodais nas faces do contorno computacional e

$$\mathbf{C}_{Is} = \begin{bmatrix} C_{Is}^1 \\ C_{Is}^2 \end{bmatrix}, \quad L_{Is} = \mathbf{C}_{Is}^T; \quad S_{Is}^T = \mathbf{C}_{Is}^T / \mathbf{C}_{Is} \quad (8)$$

com  $\mathbf{C}_{Is}$  e  $\mathbf{D}_I$  sendo coeficientes dependentes das funções de interpolação dados por

$$C_{Is}^1 = - \sum_{f \in S_I} \frac{2\Omega_f}{3} \left[ \frac{\partial N_I}{\partial x_f} \right]_e + \left\langle \frac{\Gamma_f}{6} n_{Is}^1 \right\rangle_{Is} \quad (9)$$

$$D_f = - \frac{\Gamma_f}{12}$$

Um método explícito em multi-estágio (tipo Runge-Kutta) é utilizado na discretização temporal do sistema de equações diferenciais ordinárias dado em (7). A matriz de massa consistente  $\mathbf{M}$  é substituída pela matriz diagonalizada ou "lumped"  $\mathbf{M}_L$  permitindo assim a integração explícita no tempo, sem prejuízo na precisão da solução obtida no regime estacionário. Com o intuito de acelerar a convergência, durante o falso transiente,

para o regime estacionário, utiliza-se ainda intervalos de tempo locais. Esta técnica é implementada tomando-se um valor fixo, sobre toda malha, para o parâmetro de estabilidade da integração temporal, "CFL ou número de Courant" (Courant et al. 1967), e avaliando-se um valor do incremento de tempo para cada ponto nodal (Lyra, 1994).

A discretização tipo centrada (Galerkin) empregada é inadequada para a representação do comportamento de sistemas físicos que envolvem o fenômeno de convecção. Isto se agrava pois o modelo matemático em estudo ignora os efeitos da viscosidade física (dissipação) do problema.

## Métodos de alta-resolução

Para se obter um algoritmo viável de solução para as equações em estudo é necessário substituir o fluxo resultante do método de Galerkin  $\mathbf{F}_{Is}$  (discretização centrada) por um fluxo numérico  $\mathbf{F}_{IIs}$  que incorpora a viscosidade numérica ou artificial  $\mathbf{V.A.}$  (i. e.  $\mathbf{F}_{IIs} = \mathbf{F}_{Is} + \mathbf{V.A.}$ ), indispensável para estabilizar a formulação e aproximar gradientes elevados e "descontinuidades" presentes na solução sem a presença de oscilações espúrias. Diversas são as escolhas possíveis para  $\mathbf{F}_{IIs}$  e abaixo apresentamos algumas possibilidades baseadas no uso da formulação denominada "Flux Difference Splitting" (FDS) proposta por Roe (1981) e estendida para duas dimensões usando a formulação "edge-based" do MEF por Lyra et al (1994) e Lyra (1994) para lidar com as equações de Euler e Navier-Stokes compressíveis.

**Método upwind (Roe FDS)** - O fluxo numérico do método "upwind" proposto por Roe (1981) quando estendido para duas dimensões, dentro do contexto da formulação "edge-based" do MEF, pode ser escrito na forma

$$\mathbf{F}_{Is} = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{F}_{Is}^* (\mathbf{U}_I, \mathbf{U}_{Is}) - \left| \mathbf{A}^* (\mathbf{U}_I, \mathbf{U}_{Is}) \right| (\mathbf{U}_{Is} - \mathbf{U}_I) \right\} \quad (10)$$



onde a matriz Jacobiana  $\mathbf{A}_{u_s}^S$  é calculada na direção de  $\mathbf{C}_{u_s}(\mathbf{S}_{u_s})$ , i.e.

$$\mathbf{A}_{u_s}^S = \mathbf{A}^S(\mathbf{U}_{u_s}) = \frac{d}{d\mathbf{U}} \left\{ \mathbf{F}^T \mathbf{S}_{u_s}^T \right\} \quad (11)$$

Devido à hiperbolicidade da equação em estudo, as seguintes transformações são possíveis

$$\mathbf{A} = \mathbf{R} \mathbf{\Lambda} \mathbf{R}^{-1}; \quad |\mathbf{A}| = |\mathbf{R}| |\mathbf{\Lambda}| |\mathbf{R}^{-1}|; \quad \delta \mathbf{W} = \mathbf{R}^{-1} \delta \mathbf{U} \quad (12)$$

onde  $\delta \mathbf{W}$  é o vetor onde os elementos representam as variação das variáveis características,  $\mathbf{R}$  ( $\mathbf{R}^{-1}$ ) são as matrizes nas quais as colunas contêm os autovetores à direita (esquerda) da matriz  $\mathbf{A}^S$  e que são definidas para a direção  $\mathbf{S}$  ( $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$ ) conforme expressões a seguir

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \{0\} & \{1\} & \{1\} \\ \{-\bar{h} S_2\} & \{\bar{u}_1 + \bar{c}_1\} & \{\bar{u}_1 - \bar{c}_1\} \\ \{h S_1\} & \{u_1 + c_1\} & \{u_1 - c_1\} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} \{(u_1 S_2 - \bar{u}_2 S_1)/\bar{h}\} & \{-S_2/h\} & \{S_1/h\} \\ \{(c - \bar{u}_S)/(2\bar{c})\} & \{S_1/(2\bar{c})\} & \{S_2/(2\bar{c})\} \\ \{(c + u_S)/(2\bar{c})\} & \{-S_1/(2\bar{c})\} & \{-S_2/(2\bar{c})\} \end{bmatrix}$$

com  $\bar{c}_1 = \bar{c} S_1$  e  $u_1 = u_S S_1$ ;  $\mathbf{\Lambda}$  é a matriz diagonal que contém os autovalores ( $\lambda$ ) da matriz  $\mathbf{A}^S$ , que são dados através de

$$\lambda_1 = \bar{u}_S; \quad \lambda_2 = \bar{u}_S + \bar{c}; \quad \lambda_3 = \bar{u}_S - \bar{c} \quad (14)$$

Nas equações acima a barra significa que o valor da variável em questão é obtido usando-se a média proposta por Roe, ou seja,

$$\bar{h} = h_l h^*; \quad \bar{u}_1 = [h^*(u_l)_{t_s} + (u_l)_t] / (h^* + 1) \quad (15)$$

que garantem certas propriedades desejáveis para a matriz  $\mathbf{A}^S$  (Roe, 1981). Finalmente,  $h^*$  e  $\bar{c}$  são definidos conforme

$$h^* = \sqrt{h_{t_s} / h_l}; \quad \bar{c} = [g(h_l + h_{t_s})/2]^{1/2} \quad (16)$$

O uso da média aritmética no cálculo de  $\bar{c}$ , na equação (16), é adotado seguindo o trabalho de Glaister (1988), que utiliza o método de Roe de primeira ordem para o estudo do modelo matemático em uma dimensão do escoamento em canais aberto. O método descrito nas equações (10-16) representa um método discreto com ordem de precisão apenas unitária. Duas são as principais possibilidades de estender o mesmo para ordem de precisão maiores que um (Hirsch, 1990), estas alternativas são em geral conhecidas como procedimentos algébricos ou geométricos. No presente trabalho a extensão de segunda ordem do algoritmo é obtida quer utilizando-se o procedimento algébrico através do conceito de LED (Local Extremum Diminishing), Jameson (1993), ou o procedimento geométrico do tipo MUSCL (Monotonic Upstream Centered Schemes for Conservation Laws), Van Leer (1979), que serão brevemente descritos a seguir.

**Procedimento tipo Galerkin LED** - Um algoritmo de alta-resolução baseado nos chamados procedimentos algébricos pode ser construído através da combinação de um fluxo numérico de ordem superior  $\mathbf{F}_{u_s}^{(H)}$  e de um fluxo numérico de ordem inferior  $\mathbf{F}_{u_s}^{(L)}$  de acordo com

$$\mathbf{F}_{u_s} = \mathbf{F}_{u_s}^{(H)} + \underbrace{\mathbf{L}_{u_s}(\mathbf{F}_{u_s}^{(H)} - \mathbf{F}_{u_s}^{(L)})}_{\mathbf{F}_{u_s}^{(L)}} \quad (17)$$

onde a função limitadora não-linear  $\mathbf{L}$  é idealizada de forma a limitar o fluxo anti-difusivo  $\mathbf{A}_{u_s}$  formando o fluxo corretivo  $\mathbf{F}_{u_s}^{(L)}$ . Tomando-se o método de Galerkin, que é de segunda ordem, como  $\mathbf{F}_{u_s}^{(H)}$  e o método de Roe (primeira ordem), como  $\mathbf{F}_{u_s}^{(L)}$ , tem-se o fluxo numérico



$$F_{B_s} = \frac{1}{2} \left\{ F_{B_s}(U_L, U_R) - R_{B_s}^S \left[ \Delta W_{B_s}^S - \Delta \tilde{W}_{B_s}^S \right] \right\} \quad (18)$$

onde a variação das variáveis características, definida na equação (12), é adotada, e quando do uso do chapéu  $\wedge$  sobre  $\Delta W$  significa que as funções limites atuam sobre  $\Delta W$ , isto visando garantir a propriedade de LED. Esta formulação será referida neste trabalho como Galerkin-LED (G-LED).

**Procedimento tipo MUSCL** - Uma segunda metodologia na construção de algoritmos de alta-resolução tem natureza mais geométrica e foi inicialmente proposto por Van Leer (1979) com o seu Monotonic Upstream Centered Schemes for Conservation Laws (MUSCL). O fluxo numérico do esquema tipo MUSCL pode ser definido na forma geral

$$F_{B_s} = F(\hat{U}_{B_s}^L, \hat{U}_{B_s}^R) \quad (19)$$

onde uma reconstrução linear por partes, com a introdução de funções limitadoras não-lineares, é utilizada no cálculo dos valores limitados de  $U$  nas interfaces, ou seja  $\hat{U}_L$  e  $\hat{U}_R$  são dados através de

$$\begin{aligned} \hat{U}_{B_s}^L &= U_L + \frac{1}{2} L_{B_s} (U_L - U_{I_s}, U_{I_s} - U_I) \\ \hat{U}_{B_s}^R &= U_{I_s} - \frac{1}{2} L_{B_s} (U_{I_s} - U_I, U_{I_s} - U_{I_s}) \end{aligned} \quad (20)$$

e os valores  $U_{I_s}, U_I, U_{I_s}$  e  $U_{I_s}$  representam os valores da variável  $U$  no estêncil estendido dado na Figura 1, e que será discutido na próxima seção. Desta forma a formulação dada em (10) pode então ser estendida para ordem superior definindo-se o fluxo numérico

$$F_{B_s} = \frac{1}{2} \left\{ F_{B_s}(\hat{U}_L, \hat{U}_R) - A^S(\hat{U}_L, \hat{U}_R) (\hat{U}_R - \hat{U}_L) \right\} \quad (21)$$

que representa a formulação de Roe aplicada utilizando-se as variáveis  $(\hat{U}_L, \hat{U}_R)$  reconstituídas linearmente na interface (ponto médio dos lados da malha) e após a atuação das funções limitadoras não-lineares.

## IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

As discretizações dos problemas analisados foram obtidas fazendo-se uso de um gerador de malhas baseado na técnica do avanço frontal (Peraire et al, 1987) que permite grande flexibilidade na discretização de geometrias complexas e com densidade de elementos variáveis ao longo do domínio. Com relação às estratégias adotadas para a adaptabilidade das malhas (Peraire, 1986, Morgan et al, 1992 e Lyra, 1994), considerou-se tanto a estratégia de refinamento através da subdivisão dos elementos como o método de redefinição de malhas (ou "remeshing") que faz uso do gerador de malhas mencionado anteriormente para construção das malhas adaptadas. Os indicadores de erro adotados se fundamentam na teoria de interpolação e são utilizados para gerenciar a adaptabilidade de forma automática.

As equações que descrevem o modelo matemático em estudo foram implementadas na forma adimensional. O escoamento fica inteiramente determinado uma vez definida a condição de escoamento inicial (representado com subíndice  $\infty$ ) e do escoamento no contorno do domínio computacional, este último é obtido de acordo com uma análise das variáveis características. É necessário a especificação dos valores de

$$g; \alpha; h_\infty; Fr_\infty = u_\infty / c_\infty$$

$$\left( \text{com } u_\infty = \sqrt{u_j u_j} \right)_\infty \text{ e } c_\infty = \sqrt{g h_\infty} \quad (22)$$

ou seja, da aceleração da gravidade, do ângulo de incidência do campo de velocidade, dos valores da profundidade total e do número de Froude do escoamento inicial, respectivamente.

O ponto crucial na construção de ambas as classes de métodos de ordem dois, apresentadas na seção anterior, consiste na extensão do estêncil utilizado no método de primeira ordem e na manutenção da propriedade de preservação da monotonicidade da solução que é presente



nos esquemas de primeira ordem (Lyra, 1994). Para a aplicação das funções limitadoras, tanto nos procedimentos algébricos como nos geométricos, se faz necessário a construção de um estêncil estendido com quatro pontos. Isto é feito introduzindo-se pontos nodais fictícios alocados ao longo da linha que prolonga o lado em estudo e a uma distância igual ao tamanho deste lado, conforme representado na Figura 1. As estratégias para o cálculo dos valores da variável  $U$  nestes pontos são geralmente baseadas em técnicas de interpolação ou de reconstrução do gradiente da solução (Lyra, 1994). No presente trabalho, os valores de  $U$  nos pontos fictícios são calculados através de uma interpolação linear, i.e. utiliza-se as funções de forma dos elementos finitos que contêm os nós fictícios e a solução nodal para a interpolação.

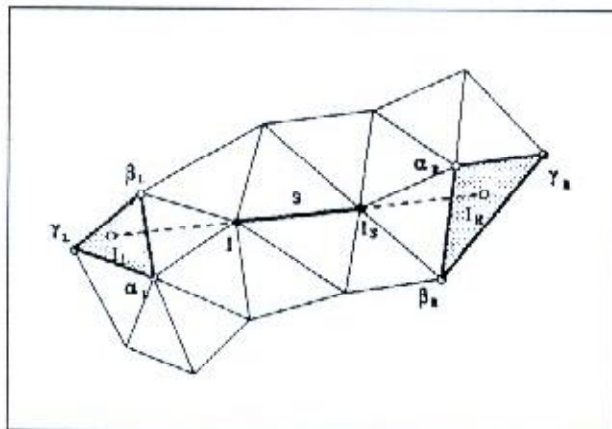


Figura 1. Definição do estêncil estendido necessário para implementação dos procedimentos de alta-resolução.

Inúmeras são as funções limitadoras desenvolvidas por diversos pesquisadores (ver Yee, 1987 ou Hirsch, 1990), estas funções são não-lineares e projetadas para impor restrições nas variações das variáveis dependentes ou das funções de fluxo. As condições gerais que estas funções devem satisfazer para garantia da propriedade de TVD ("Total Variation Diminishing") das formulações são discutidas em detalhe por Sweby (1984), Hirsch (1990) e Lyra (1994).

Dentre as inúmeras funções limitadoras implementadas tem-se, por exemplo,

$$L(a,b) = \text{sign}(a) \max \left[ 0, \min \left( |a|, b \text{ sign}(a) \right) \right] \quad (23)$$

que é denominada de função "minmod" e que retorna o menor valor absoluto entre os parâmetros  $a$  e  $b$  caso ambos tenham o mesmo sinal e o valor zero caso tenham sinais contrários. As funções limitadoras podem ainda ser computadas utilizando-se um estêncil simétrico ou "upwind" (i.e. levando em conta a direção de propagação do escoamento). Nos resultados apresentados neste artigo, quando do uso do método G-LED as funções atuam nas variáveis características e são calculadas de forma simétrica, já quando do uso do procedimento MUSCL os limites são impostos nas variáveis primitivas e com estêncil tipo "upwind".

Utiliza-se um algoritmo para colorir (Formaggia et al, 1988) os lados e faces do contorno da malha de forma tal que se tenha lados e faces do contorno agrupados impedindo a existência de recorrências nas operações efetuadas no interior dos "loops" necessários nas formulações descritas. Com isto é possível a implementação dos algoritmos explorando a potencialidade dos computadores com arquiteturas vetoriais, aumentando-se assim a eficiência computacional nas simulações analisadas.

Maiores detalhes sobre as diversas ferramentas numéricas envolvidas nas metodologias de solução apresentadas, bem como vários aspectos referentes à precisão, robustez, eficiência, versatilidade e aplicabilidade das mesmas, dentro do contexto de escoamentos de fluidos compressíveis, podem ser encontrados no trabalho de Lyra (1994) e nas referências nele citadas.

## APLICAÇÕES

Com exceção da primeira, as aplicações estudadas se baseiam naquelas apresentadas no trabalho de Zienkiewicz e



Ortiz (1995) que pode ser utilizado para efeito de comparações. Há que se destacar que existem pequenas variações na definição dos problemas e nas dimensões e malhas adotadas uma vez que não dispúnhamos de todos os dados necessários para reproduzir fielmente as aplicações fornecidas no referido trabalho. Nestes problemas considerou-se  $h_{\infty} = 1,0$ ,  $g = 10$ ,  $\alpha = 0,0$  e  $Fr = 2,5$  e apenas as soluções no regime permanente são analisadas. Como os escoamentos considerados são supercríticos, à montante (à esquerda),  $h_{\infty}$ ,  $\alpha$  e  $Fr_{\infty}$  são impostas, já no contorno à jusante (direita), as variáveis são determinadas livremente pela solução numérica. Nas paredes do canal a condição de velocidade normal nula, ou deslizamento, é adotada. Voltamos a frisar que um fluido ideal sem viscosidade e sem cisalhamento na parede do canal foi considerado. Estas e diversas outras hipóteses simplificadoras adotadas (por ex. pressão hidrostática, não consideração dos efeitos térmicos, etc.) na determinação do modelo matemático estudado, equações (1-3), não podem ser considerados no estudo mais detalhado do comportamento físico de ressaltos hidráulicos. Os problemas modelo foram escolhidos especificamente visando analisar o comportamento dos algoritmos de solução quando da presença de gradientes altíssimos na solução.

### Ruptura de barragem em canal

O primeiro exemplo consiste de um problema unidimensional, que no presente contexto, simula o rompimento súbito de uma barragem num canal de seção constante, com fluido estacionário, e profundidades diferentes a montante (esquerda) e jusante (direita). Considerou-se um domínio computacional com  $0 \leq x_1 \leq 100$ , com a barragem em  $x_1 = 50$  e condição inicial (em  $t^0$ ):  $u_E = u_D = 0,0$  e  $h_E = 2,0$ ;  $h_D = 1,0$ . Esta condição inicial leva a um escoamento subcrítico com valor teórico de  $Fr_{max} = 0,35$ . Tem-se aqui uma onda positiva de frente abrupta (propagando-se para

jusante) e uma onda negativa de variação gradual (propagando-se para montante). A simulação foi efetuada utilizando-se o método de G-LED e considerando-se uma malha computacional com 101 pontos discretos na direção axial, tanto para o domínio computacional bidimensional (dado na malha da Figura 2) como unidimensional, quando da simulação usando um modelo em uma dimensão.

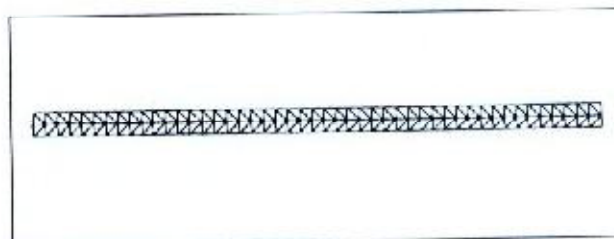


Figura 2. Problema da ruptura de barragem em canal: malha adotada.

Para efeito de comparação as formulações apresentadas foram implementadas para solução do modelo matemático do escoamento em canais, unidimensional, (ou equações de Saint Venant) que considera uma média das variáveis na seção transversal. Na Figura 3 as soluções obtidas, em  $t = 15$ , usando-se os algoritmos que lidam com os modelos uni- e bi-dimensionais são apresentadas em conjunto com a solução teórica ou semi-analítica.

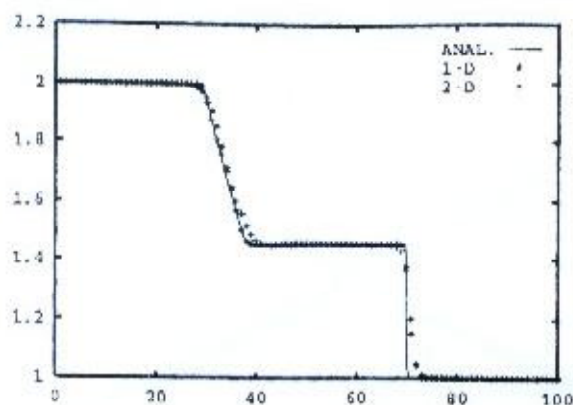
A extensão bidimensional, do método de "upwind" unidimensional, fornece resultados bastante próximos daqueles obtidos com o modelo unidimensional e sem a presença de quaisquer oscilações irreais, sendo portanto bastante encorajadores.

### Canal com estreitamento unilateral

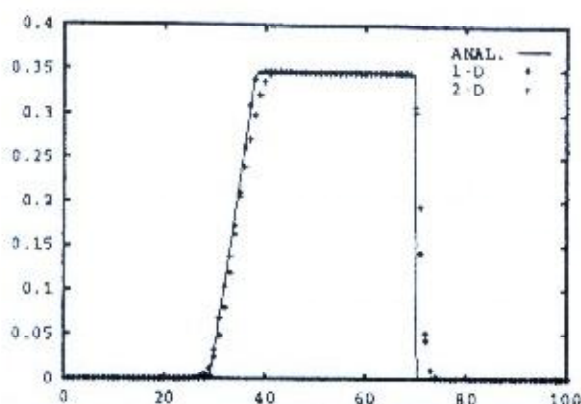
A segunda aplicação consiste de um canal com estreitamento unilateral de  $15^\circ$ . A discretização inicial adotada bem como a malha obtida após três estágios de adaptação, através da subdivisão dos elementos, são apresentadas nas Figuras 4(a) e 4(b). A malha inicial  $M_1$  contém 2043 pontos nodais e 3942



elementos, já a malha adaptada final  $M_3$  contém 3485 pontos nodais e 6804 elementos, sendo os novos elementos automaticamente posicionados nas regiões com altos gradientes, por meio da subdivisão dos elementos originais, o que demonstra a efetividade do procedimento adaptativo adotado.



(a) Profundidade ( $h$ )



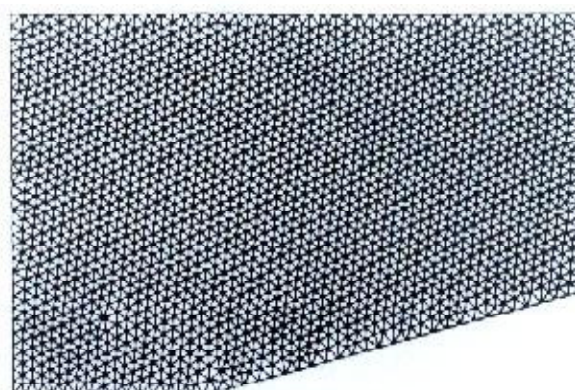
(b) Número de Froude ( $Fr$ )

Figura 3. Problema da ruptura de barragem em canal: resultados obtidos.

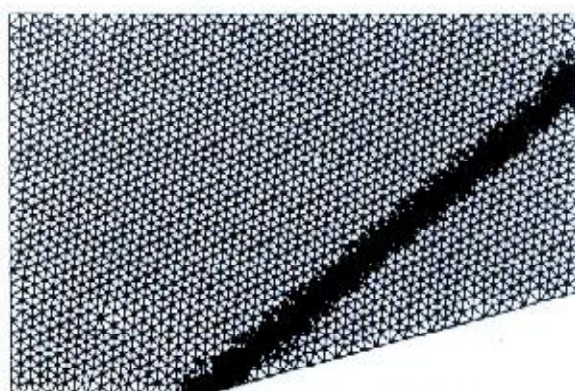
Os resultados em termos das isolinhas da profundidade total para as duas malhas dadas na Figura 4 podem ser vistos nas Figuras 5(a) e 5(b).

Nestes resultados pode-se observar que mesmo para malhas relativamente grosseiras como a da Figuras 5(a) tem-se a captura precisa da descontinuidade, com uma faixa de apenas dois a três elementos para representar a mesma e sem a presença de oscilações espúrias na solução. O refinamento

de malhas permite uma representação ainda mais precisa dos altos gradientes como observado quando se comparam as Figuras 5(a) e 5(b). O ângulo do choque em relação ao eixo horizontal encontrado numericamente é de aproximadamente  $39,75^\circ$ , sendo muito próximo daquele obtido por Zienkiewicz e Ortiz (1995), i.e.  $\approx 39,7^\circ$ , ou daquele determinado teoricamente,  $39,58^\circ$ .



(a) Malha Inicial ( $M_1$ ).



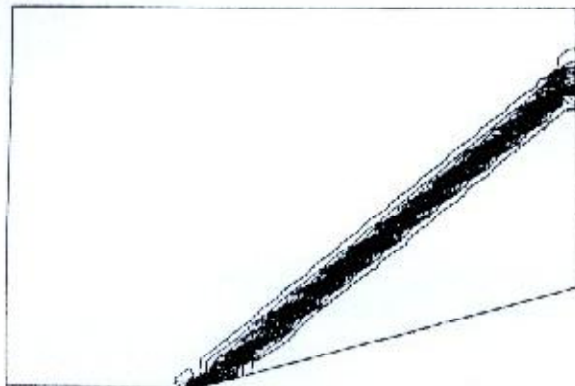
(b) Malha Adaptada ( $M_3$ ).

Figura 4. Canal com estreitamento unilateral: malhas adotadas.

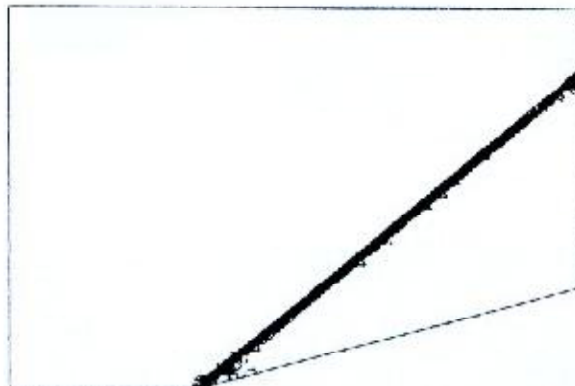
Uma idéia mais precisa da solução obtida pode ser vista nas Figuras 6(a) e 6(b) onde  $h$  e  $Fr$  são traçados ao longo da direção perpendicular ao choque. Nestas figuras comparam-se os resultados obtidos utilizando-se o método G-LED nas malhas  $M_1$  e  $M_3$ , bem como os resultados encontrados usando-se o método tipo MUSCL na malha  $M_3$ . Mais uma vez vale ressaltar a melhoria alcançada com a utilização do refinamento de malhas, bem



como a praticamente inexistência de quaisquer oscilações na solução.



(a) Malha inicial ( $M_1$ ).

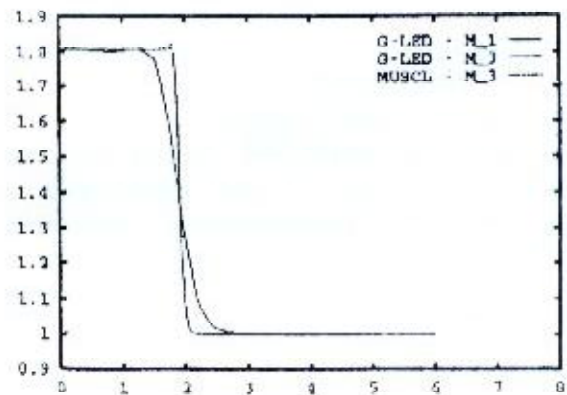


(b) Malha adaptada ( $M_2$ ).

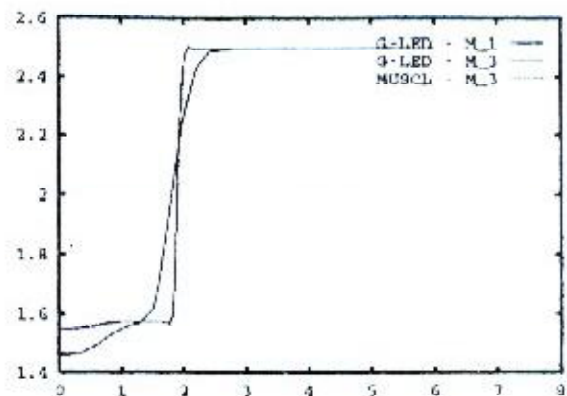
Figura 5. Canal com estreitamento unilateral: isolinhas de profundidade.

### Canal com estreitamento simétrico

No terceiro exemplo utilizam-se os procedimentos apresentados no estudo de ondas cruzadas geradas devido a um estreitamento simétrico de  $5^\circ$  em um canal retangular. A malha regular inicial foi adaptada uma única vez usando-se "remeshing" (ou redefinição de malhas). A malha adaptada ( $M_2$ ) é mostrada na Figura 7(a) e consiste de 4304 pontos nodais e 8452 elementos triangulares com a densidade da malha aumentada automaticamente nas regiões críticas da solução. Os resultados obtidos com o método G-LED são dados na Figura 7(b).



(a) Profundidade ( $h$ ).



(b) Número de Froude ( $Fr$ ).

Figura 6. Canal com estreitamento unilateral: solução 1 ao "Choque".

Os valores encontrados para a profundidade total nas regiões destacadas na Figura 7(b) são apresentados na Tabela 1 juntamente com os resultados numéricos e teóricos fornecidos por Zienkiewicz e Ortiz (1995).

A utilização de mais estágios de refinamento de malha se faz necessário para que os resultados se aproximem ainda mais daqueles previstos teoricamente.

### Canal simétrico com largura variável

Na última aplicação tem-se um canal retangular com uma variação na largura (com ângulo de  $15^\circ$ ) ao longo de um trecho de transição conforme contorno do domínio computacional da Figura 8(a).



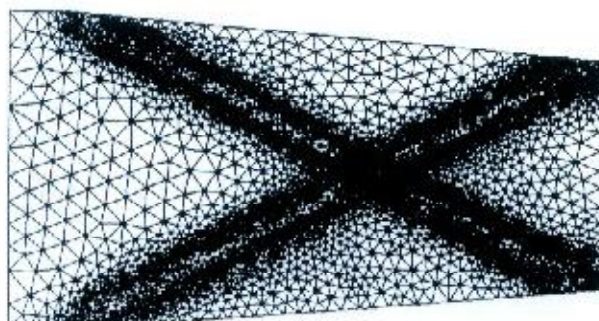
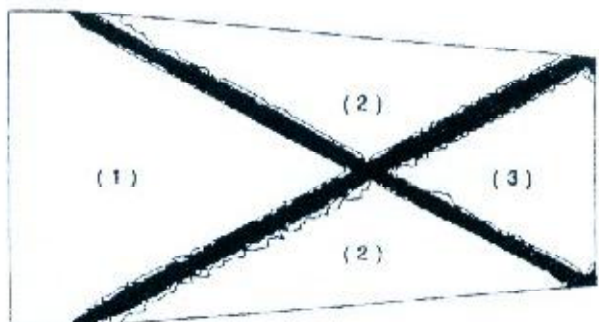
(a) Malha Adaptada ( $M_2$ ).(b) Profundidade  $h$ .

Figura 7. Canal com estreitamento simétrico.

Tabela 1. Profundidade total  $h$  nas regiões indicadas na Figura 7(b).

Região	Teoria	G-TVD	ZIENK/ORTIZ
1	1,00	1,00	1,00
2	1,25	1,24	1,25
3	1,55	1,52	1,54

Neste problema foi utilizada uma malha uniforme com 7831 pontos nodais e 15344 elementos, e não foi efetuado nenhum refinamento na malha. A distribuição das isolinhas da profundidade total, utilizando-se a formulação G-LED, pode ser vista na Figura 8(a), onde observamos a presença de saltos hidráulicos cruzados, bem como da redução gradual da profundidade total nas origens dos alargamentos do canal, com isolinhas em forma de leque. A solução ao longo da parede inferior do canal em termos da profundidade total pode ser vista na Figura 8(b). A utilização de uma das estratégias de refinamento de malhas disponível é recomendada caso se deseje uma maior precisão dos resultados de forma eficiente.

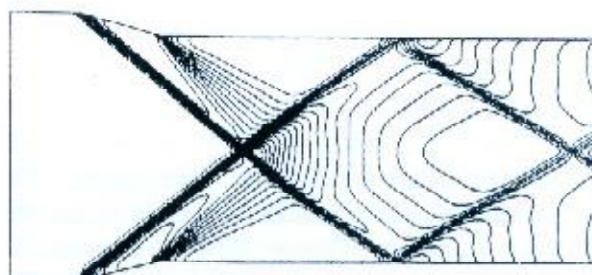
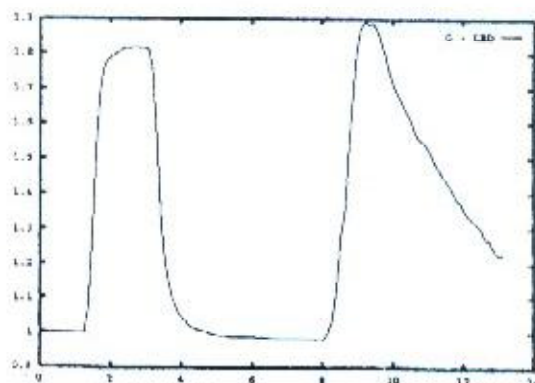
(a) Isolinhas de profundidade  $h$ .(b) Profundidade  $h$  ao longo da parede inferior.

Figura 8. Canal simétrico com largura variável.

## CONCLUSÕES

Neste trabalho, uma extensão possível de duas formulações de alta-resolução para o estudo do escoamento em canais aberto foi descrita nos seus principais detalhes. Estas formulações têm origem nos métodos de captura de choques desenvolvidos em aerodinâmica e são particularmente interessantes no estudo de escoamentos críticos e supercríticos onde a presença de gradientes altíssimos leva a problemas numéricos severos em diversas formulações.

O desempenho dos algoritmos propostos neste trabalho foi avaliado para aplicações de escoamento supercrítico em canais. A utilização de métodos desenvolvidos para lidar com a presença de altos gradientes na solução mostrou-se efetivo com resultados livres de oscilações. A inclusão da adaptabilidade de malhas garante ainda uma otimização do modelo discreto adotado e com



isto uma maior eficiência e precisão dos resultados.

Após as devidas alterações e ajustes, as formulações do tipo proposta por Zienkiewicz e Ortiz (1995) podem ser modificadas para incorporar operadores de captura de descontinuidade do tipo descrito no presente trabalho. Desta forma, espera-se resultados livres de oscilações quando da simulação de escoamentos supercríticos.

A extensão das formulações apresentadas para lidar com modelos mais gerais que regem o escoamento em canais, rios, baías e estuários será a próxima etapa desta pesquisa. A discretização do termo de fonte  $Q$  pode ser efetuada tanto na forma "upwind" como via método de Galerkin e a incorporação do mesmo será detalhada em trabalho subsequente. Em termos da discretização dos termos viscosos  $G'$ , esta pode ser efetuada seguindo procedimento descrito no trabalho de Lyra (1994).

## AGRADECIMENTOS

O autor agradece ao CNPq pelo financiamento da bolsa modalidade Recém-Doutor.

## REFERÊNCIAS

- COURANT, R., FRIEDRICHS, K.O. e LEWY, H. (1928) Über die Partiellen Differenzgleichungen der Mathematischen Physik, *Mathematische Annalen*, V. 100, p. 32-74. Traduzido para o Inglês no *IBM Journal* (1967), p. 215-34.
- FORMAGGIA, L., PERAIRE, J., MORGAN, K. e PEIRÓ, J. (1988) Implementation of a 3-D Explicit Euler Solver on a CRAY Computer, *Proceeding of the 4th Int. Symposium on Science and Engineering on CRAY Supercomputers*, p. 45-65.
- GLAISTER, P. (1988) Approximate Riemann Solutions of the Shallow Water Equations, *J. Hydraulic Res.*, V. 26, p. 293-306.
- HIRSCH, C. (1990) *Numerical Computation of Internal and External Flows*, V. II, Chichester: JohnWiley & Sons.
- JAMESON, A. (1993) Artificial Diffusion, Upwind Biasing, Limiters and Their Effect on Accuracy and Multigrid Convergence in Transonic and Hypersonic Flows, *Technical Report 93-3359, AIAA paper*.
- JOHNSON, C. (1987) *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*, Cambridge University Press.
- KAWAHARA, M., HIROKAZU, H., KHOJI, T. e KAZUO, I. (1982) Selective Lumping Finite Element Method for Shallow Water Flow, *Int. J. Num. Meth. in Fluids*, V. 2, p. 89-112.
- LYRA, P.R.M., MORGAN, K., PERAIRE, J. e PEIRÓ, J. (1994) TVD Algorithms for the Solution of the Compressible Euler Equations on Unstructured Meshes, *Int. J. for Num. Meth. Fluids*, V. 19, p. 827-47.
- LYRA, P.R.M. (1994) *Unstructured Grid Adaptive Algorithms for Fluid Dynamics and Heat Conduction*, PhD thesis, University of Wales - Swansea.
- MORGAN, K., PERAIRE, J. e PEIRÓ, J. (1992) Unstructured Grid Methods for Compressible Flows, *Special Course on Unstructured Grid Methods for Advection Dominated Flows*, AGARD Report 787.
- NAVON, I.M. (1988) A Review of Finite Element Methods for Solving the Shallow Water Equations, *Computer Modelling in Ocean Engineering*, p. 273-78.
- PERAIRE, J., ZIENKIEWICZ, O.C. e MORGAN, K. (1986) Shallow Water Problems: General Explicit Formulation, *Int. J. Num. Meth. in Engng*, V. 22, p. 547-574.
- PERAIRE, J. (1986) *A Finite Element Method for Convection Dominated Flows*, PhD thesis, University of Wales - Swansea.
- PERAIRE, J., VAHDATI, M., MORGAN, K. e ZIENKIEWICZ, O.C. (1987) Adaptive Remeshing for Compressible Flow Computations, *J. Comp. Phys.*, V. 72, p. 449-66.
- ROE, P.L. (1981) Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes, *J. Comp. Phys.*, V. 43, p. 357-72.
- SWEBBY, P.K. (1984) High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws, *SIAM J. Num. Anal.*, V. 21, p. 995-1011.
- VAN LEER, B. (1979) Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme.V: A Second Order Sequel to Godunov's Method, *J. Comp. Phys.*, V.32, p. 101-36.
- YEE, H.C. (1987) Construction of Explicit and Implicit Symmetric TVD Schemes and Their Applications, *J. Comp. Phys.*, V.68, p. 151-79.



ZIENKIEWIZ, O.C. e ORTIZ, P. (1995) A split Characteristic Based Finite Element Model for the Shallow Water Equations, *Int. J. Num. Meth. in Fluids*, V. 20, p.1061-80.

### **High-Resolution Adaptive Algorithms for the Study of Supercritical Flow on Unstructured Grids**

#### **ABSTRACT**

*This paper outlines two different high-resolution methods for the simulation of 2-D open channel flows using unstructured triangular grids. The formulations adopted are especially suitable for the simulation of supercritical flows which include phenomena such as hydraulic jumps. The use of an edge-based data structure for describing the grid allows for the incorporation of high-resolution upwind shock capturing algorithms into a finite element framework. Schemes based upon both LED and MUSCL concepts are described here to deal with shallow water equations. In both approaches, the incorporation of ideas drawn from the theory of characteristics plays a major role in enabling the development of these schemes. Roe's approximate Riemann solver is adopted as the basic building block. The numerical performance of both methods is demonstrated, for a variety of steady-state problems of water flows at supercritical velocities. The importance of incorporating mesh adaptivity is also demonstrated through the examples.*