

ESTRATÉGIA DE ADAPTAÇÃO AUTOMÁTICA DE MALHAS TRIANGULARES EM MALHAS MISTAS

*Fábio Farias Pereira*¹; *Carlos Ruberto Fragoso Jr.*²; *Walter Collischonn*³ & *Cintia Bertacchi Uvo*⁴

RESUMO --- Malhas computacionais são largamente utilizadas para a solução numérica de problemas na área de Recursos Hídricos, principalmente em modelos hidrodinâmicos e de transporte de massa aplicados à rios, lagos, reservatórios e estuários. Malhas não estruturadas são mais versáteis devido a melhor adaptação em geometrias complexas o que traz vantagens em termos de desempenho computacional, melhor qualidade da solução numérica e maior refinamento em regiões de interesse. Dentre os diversos tipos de malhas não estruturadas usadas em métodos numéricos, aquelas compostas por elementos quadriláteros e triangulares (i.e. malhas mistas) são motivos de interesse nos mais diversos campos da modelagem numérica por apresentarem vasta aplicabilidade em problemas práticos na engenharia. Neste trabalho foi avaliado o desempenho de um algoritmo computacional para adaptação automatizada de malhas não estruturadas triangulares em malhas não estruturadas mistas, formada por quadriláteros e triângulos, com o intuito de aumentar qualidade em termos de ortogonalidade e representação de domínios complexos. A estratégia de adaptação de malhas não estruturadas triangulares foi bem sucedida nos quatro exemplos apresentados neste estudo. As malhas adaptativas reduziram o número de polígonos e aumentaram a qualidade média do domínio.

ABSTRACT --- Computational grids are widely used for the numerical solution in problems concerning water resources mainly in hydrodynamic and mass transport models for rivers, lakes, reservoirs and estuaries. Unstructured grids are flexible due to better adaptation in complex geometries which brings up advantages in terms of computational performance, quality of numerical solution and refinement in regions of interest. Among various types of unstructured grids employed in numerical methods, those composed for quadrilateral and triangular elements (i.e. mixed grids) are interesting in several fields of numerical modeling by presenting broad applicability in practical engineering. In the present study we have evaluated performance of an algorithm for automated transition of the unstructured triangular grids to that of unstructured mixed grids. We intend to increase grid's quality in terms of its orthogonality and representation of the domains. The adaptation strategy of unstructured triangular grids has been successful in the four examples presented in the study. They have reduced the number of polygons and increased the mean quality over the domain.

Palavras-chave: malhas não estruturadas, geração de malhas, malhas mistas.

¹) Doutorando do Instituto de Pesquisas Hidráulicas da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, RS, Rua Alberto Torres, 134, apt° 401, Cidade Baixa, Porto Alegre, RS, 90050-080. e-mail: pereira.farias.f@gmail.com

²) Professor Adjunto do Centro de Tecnologia da Universidade Federal de Alagoas, AL. Campus A.C. Simões BR 101 Norte, Km. 14. Tabuleiro do Martins, 57072-970, Maceió, AL e-mail: crubertofj@hotmail.com

³) Professor Adjunto do Instituto de Pesquisas Hidráulicas da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, RS. Av. Bento Gonçalves, 9500, 91501-970, Caixa Postal 15029, Porto Alegre, RS e-mail: collischonn@iph.ufrgs.br

⁴) Professor Titular do Dpto de Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental da Universidade de Lund, Skane. John Ericssons väg 1, V-huset SE, 223 63, Box 118, Lund, SE e-mail: cintia.uvo@tvrl.lth.se

1 - INTRODUÇÃO

O uso de malhas não estruturadas para discretização de domínios está cada vez mais presente nos métodos numéricos aplicados às engenharias estrutural (Espinha, 2005), geotécnica (Hurtado, 2011), oceânica (Cunha & Rosman, 2005; Zhang et. al., 2004) e de recursos hídricos (Casulli & Walters, 2000; Farias Pereira, 2010). A facilidade de adaptação destas malhas em geometrias complexas, a versatilidade de sua aplicação em diferentes tipos de metodologias (e.g. método dos elementos finitos, método dos elementos de contorno e método dos volumes finitos) e a flexibilidade na elaboração de refinamentos locais em domínios de simulação são importantes características das malhas não estruturadas. Devido a isto, malhas não estruturadas são frequentemente requeridas na modelagem hidrodinâmica e de transporte de massa de sistemas hídricos (Rosauero, 1982; Cheng et. al., 1993; Fragoso Jr, 2009).

Modelos hidrodinâmicos e de transporte de massa bidimensionais são poderosas ferramentas capazes de representar o escoamento e diluição de poluentes em rios, reservatórios e lagos. A eficiência e a estabilidade destes modelos estão diretamente interligadas com o tipo de malha adotada no domínio de simulação do corpo d'água (Casulli & Cattani, 1994). Uma malha não estruturada triangular, por exemplo, representa complexas geometrias (e.g. estreitamento de canais e enseadas) porém pode ser densa, composta por uma grande quantidade de elementos, o que implica em uma limitação no passo de tempo do modelo. Malhas compostas apenas por quadriláteros, por sua vez, representam estreitamentos de corpos d'água, canais e rios sem grandes consequências à densidade da malha. No entanto, este tipo de malha pode apresentar erros na representação do contorno do domínio de simulação quando grandes elementos são adotados. Neste sentido, a adoção de malhas não estruturadas mistas (i.e. malhas compostas por elementos triangulares e quadriláteros) é uma prática que vem sendo aplicada para reduzir a densidade da malha e reduzir erros de difusão numérica (Cheng & Casulli, 2001; Casulli & Zanolli, 2005).

Durante o processo de geração de malhas, um dos passos que mais demandam tempo é a criação de uma discretização apropriada para o domínio de simulação. Em uma aplicação que envolve um domínio complexo, usualmente o tempo gasto na geração da malha é maior que o tempo usado nas análises numéricas (Lee & Hobbs, 1998). Por outro lado, o emprego de malhas adaptativas reduz significativamente o esforço computacional (Lee, 1998).

Muitos algoritmos vem sendo desenvolvidos com o intuito de aumentar a eficiência e automatizar a geração de malhas mistas robustas. Lee (1998) propõe duas aproximações mais efetivas na geração de malhas com altas qualidades: a técnica de refinamento ou de partição estrutural e a técnica de frente avançada (AFT). A técnica de frente avançada consiste na

discretização do domínio começando pelo contorno. Em seguida, os nós e os elementos são gerados um a um de acordo com a necessidade do domínio. O objetivo deste trabalho é utilizar uma estratégia de adaptação de malhas triangulares em malhas mistas, ou seja, um determinado domínio poderá ser discretizado com elementos triangulares, quadriláteros ou com ambos, de acordo com a estratégia sugerida por Lee (1998), baseada na técnica de frente avançada (AFT). Alguns exemplos de malhas serão apresentados para verificar a eficiência e consistência do método.

2 – METODOLOGIA

A metodologia consiste em mesclar dois triângulos vizinhos em um quadrilátero baseando-se na posição dos seus vértices e no valor dos seus ângulos internos (Lee, 1998). Um parâmetro de qualidade é, então, atribuído a cada face da malha triangular. Com base neste parâmetro de qualidade, uma das faces da malha triangular é excluída dando origem a um quadrilátero. Este processo se repetirá até quando a qualidade média das faces da malha ultrapassar um valor pré-definido ou quando a malha for totalmente quadrilátera.

Além disso, a estratégia conta com um ajuste da malha que a evita formação de triângulos obtusos (i.e. triângulos com ângulos internos maiores que 90 graus) aproximando-os à triângulos equiláteros. Nas seções 2.2, 2.3, 2.4 e 2.5 estão descritos os passos desta estratégia de adaptação de uma malha não estruturada triangular em uma malha não estruturada mista.

2.1 Malha Triangular

A geração da malha triangular é feita pela triangulação de Delaunay (Ruppert, 1995). Dada uma série de pontos coplanares, a triangulação de Delaunay é uma série de linhas conectando cada ponto com seus respectivos vizinhos. O resultado é a representação de um domínio por uma série de triângulos onde cada ponto no interior de cada triângulo pertence à circunferência circunscrita pelos seus vértices (Figura 1).

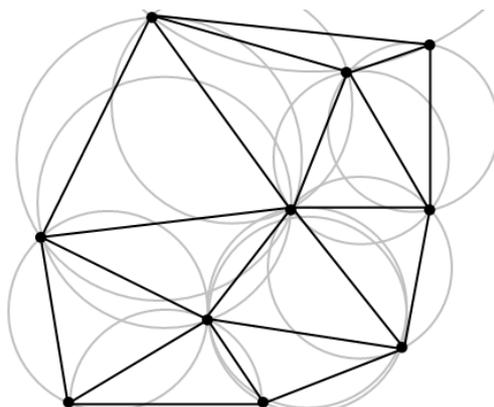


Figura 1 –Triangulação de Delaunay no plano com as circunferências circunscritas. (Fonte: MATLAB User's Manual)

Esta propriedade é muito importante em aplicações onde a ortogonalidade entre os triângulos da malha influencia significativamente a solução numérica, como é o caso de modelos de hidrodinâmicos baseados nos métodos dos volumes finitos (Casulli & Walters, 2000; Zhang et. al., 2004; Farias Pereira, 2010).

2.2 Ajuste da malha

Com a conclusão do processo de triangulação por Delaunay, a qualidade da malha triangular é aperfeiçoada por uma etapa conhecida como ajuste da malha. O processo de ajuste da malha consiste na adequação de triângulos agudos e obtusos para triângulos próximos aos equiláteros usando um ajuste Laplaciano (Figura 2). O ajuste Laplaciano é um processo iterativo que geralmente leva melhorias à qualidade média da malha.

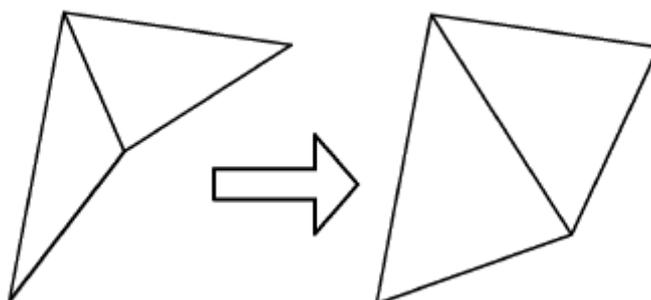


Figura 2 – Ajuste laplaciano em triângulos obtusos.

Nesta etapa, apenas os vértices contidos dentro do domínio da malha são re-posicionados e re-alinhados para corrigir as distorções causadas pelas fusões de triângulos. Os vértices no contorno da malha são mantidos. Maiores detalhes sobre o ajuste de malhas podem ser encontrados em (HANSBO, 1995).

2.3 Avaliação da qualidade das faces

A avaliação da qualidade das faces trata-se do cálculo de um índice β para medir o quanto a face de dois triângulos adjacentes está propícia a formar um novo quadrilátero (Lo, 1989). O índice β está diretamente relacionado com a qualidade α dos quatro triângulos formados pelas diagonais dos triângulos vizinhos a face analisada (Figura 3).

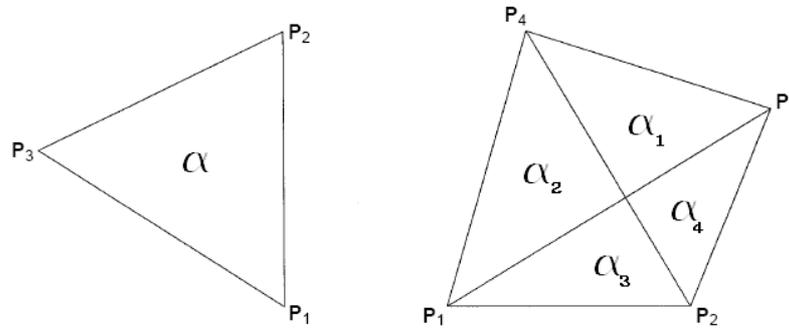


Figura 3 – Elemento triangular e quadrilátero.

O índice de qualidade para cada triângulo α é calculado pela Equação 1. Vale ressaltar que a Equação 1 é válida apenas para triângulos no espaço euclidiano.

$$\alpha = \frac{2\sqrt{3} \cdot \text{Det}(P_2 - P_1, P_3 - P_1)}{P_1P_2 + P_2P_3 + P_1P_3}, \quad (1)$$

sendo P_1P_2, P_2P_3, P_1P_3 , a distância euclidiana dos vértices do triângulo.

Para o quadrilátero mostrado na Figura 3, os quatro valores de α correspondem aos quatro triângulos formados pelos vértices P_1P_3 e P_2P_4 . Rearranjando os valores de α de modo que:

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \alpha_4, \quad (2)$$

A qualidade nas faces β é então definida como:

$$\beta = \frac{\alpha_3\alpha_4}{\alpha_1\alpha_2}, \quad (3)$$

Os índices que medem a qualidade da malha α e β podem variar entre 0 e 1.

2.4 Fusão de triângulos em quadrilátero

O processo de fusão de triângulos é regido por uma análise algébrica e geométrica dos triângulos da malha. O algoritmo de fusão classifica hierarquicamente os triângulos que apresentam maior predisposição à fusão (Figura 4). Isto significa que triângulos com ângulos próximos a 90 graus fundirão com mais facilidade.

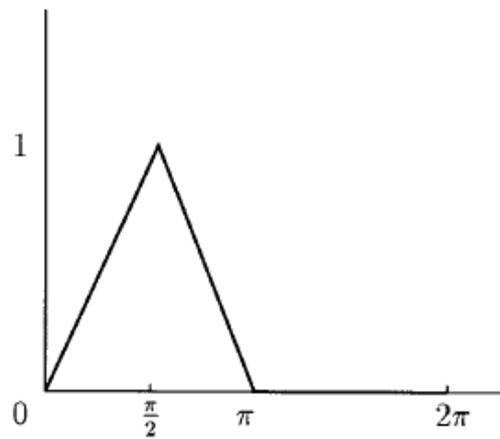


Figura 4 – Qualidade do ângulo.

O algoritmo de fusão consiste na remoção uma a uma das diagonais da malha triangular (Figura 5) de acordo com o valor do índice β . Para valores de β iguais a 1, implica que a remoção da face gerará um quadrilátero perfeito (todos os ângulos com 90°).

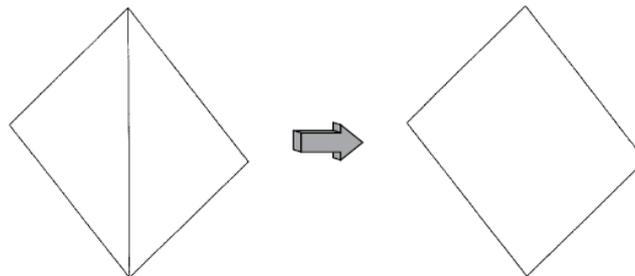


Figura 5 – Fundindo triângulos.

O processo de fusão continuará até que não existam mais triângulos ou quando o valor máximo especificado para β tenha sido atingido. Lee (1998) sugere valores máximos de β iguais a 0.1.

3 – RESULTADOS

Nesta seção são apresentados quatro exemplos de geração de malha não estruturada mista com o intuito de avaliar a performance do método proposto. Os elementos característicos usados no desenvolvimento da malha tratam-se de exemplos pré-existentes no pacote computacional MATLAB. Na Figura 6, diversos estágios do algoritmo de fusão são mostrados para um exemplo acadêmico de uma malha não estruturada triangular aplicada à um domínio circular.

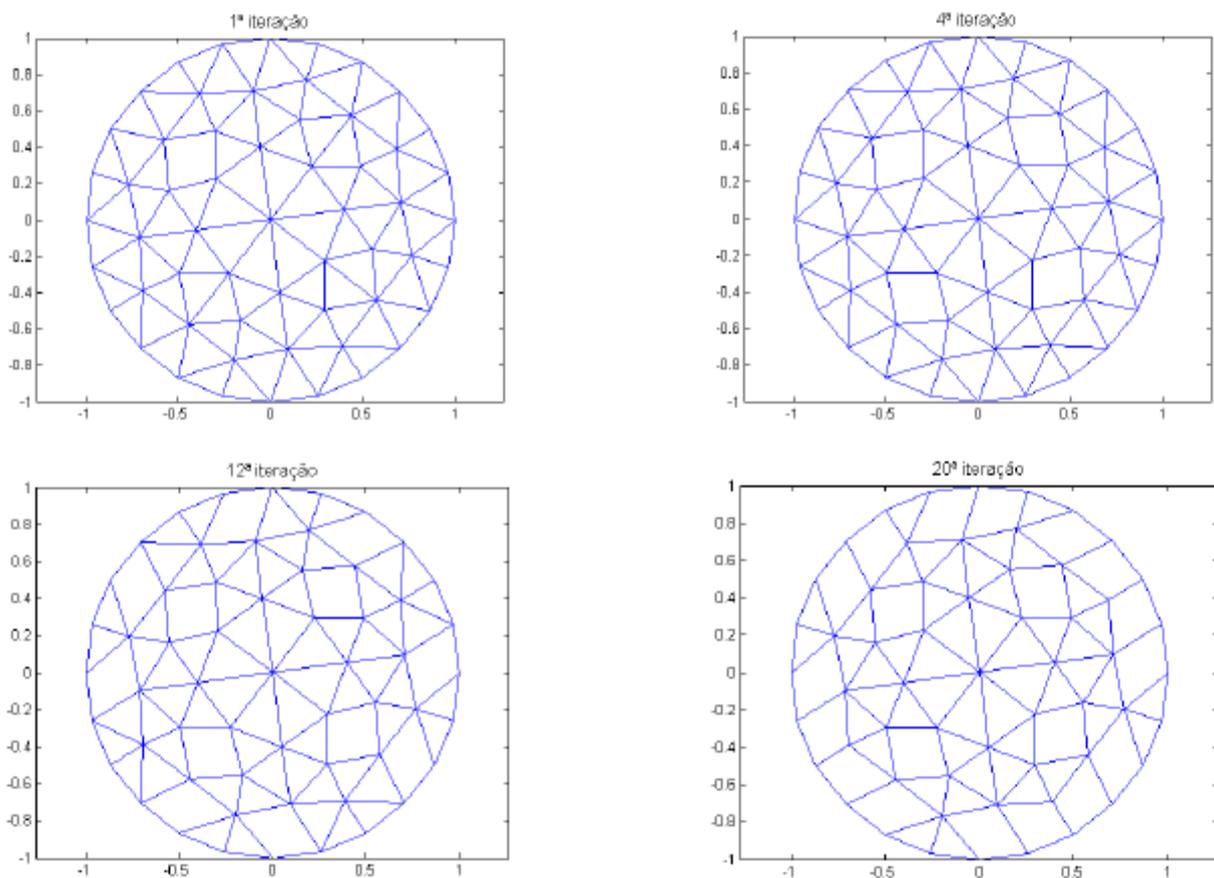


Figura 6 – Exemplo 1 da geração de uma malha mista a partir de uma malha triangular.

Após as primeiras quatro iterações, a fusão de oito triângulos formam quatro quadriláteros regulares com ângulos internos em torno de 90 graus. No entanto, a partir de um determinado número de iterações, constata-se que a mesclagem de triângulos passa a gerar quadriláteros compostos por ângulos agudos e obtusos, promovendo uma redução da qualidade média da malha. A formação de elementos regulares na composição da malha está diretamente relacionada com os índices de qualidade de seus elementos e faces, α e β . Sendo assim, a evolução da qualidade da malha foi acompanhada através do monitoramento da média dos índices de qualidade em cada elemento da malha, α , para cada iteração (Figura 7). O valor de α é considerado em porcentagem. Neste exemplo foram realizadas 24 iterações.

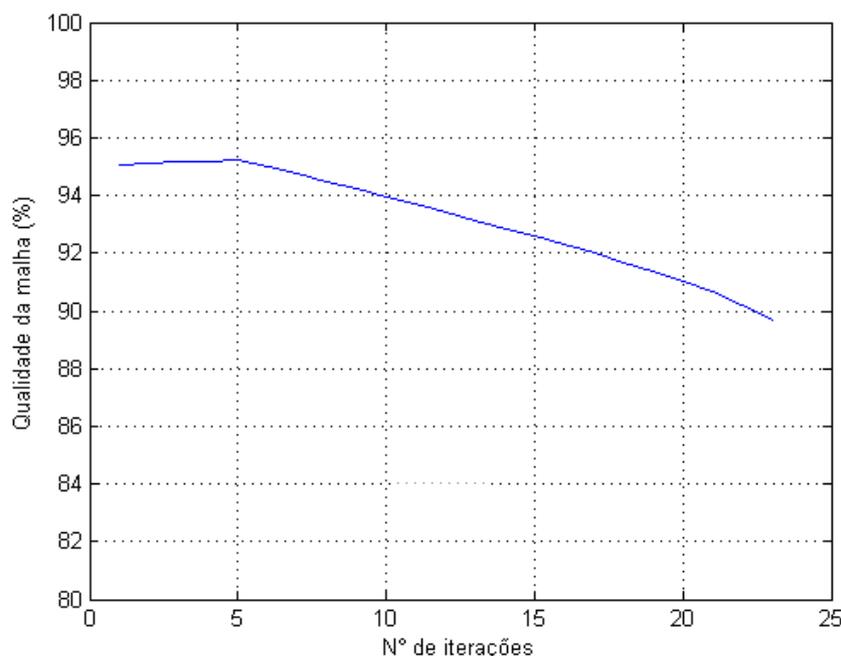


Figura 7 – Evolução da qualidade média da malha com o n° de fusões.

Como já esperado, a qualidade média da malha cresce nas primeiras iterações e, em seguida, decresce indefinidamente. Isto ocorre porque nas primeiras iterações são mesclados aqueles triângulos cujo formato aproxima-se de retângulos ou quadrados, ou seja, quadriláteros aproximadamente regulares. As fusões destes triângulos acarretam no aumento da qualidade média da grade. No entanto, após a quinta fusão, triângulos regulares (i.e. aproximadamente equiláteros) começam a ser fundidos e dão origem a quadriláteros com geometria irregular. O efeito das fusões de triângulos em quadriláteros irregulares é diretamente refletido através da queda da média dos índices de qualidade dos elementos na grade (Figura 7). Desta forma, critérios podem ser definidos para limitar o número de fusões da malha no intuito de otimizar a média dos índices de qualidade de seus elementos.

Nos exemplos subsequentes são adotados dois critérios para limitar o número de fusões dos triângulos das grades. Os critérios baseiam-se no índice de qualidade das faces da grade, β , e no número máximo arbitrário de fusões por grade. Quanto ao critério referente ao índice de qualidade das faces, adotou-se um valor mínimo de β_{\min} igual a 0,7, ou seja, faces com índice de qualidade inferior à β_{\min} são excluídas da grade. O valor de β_{\min} foi adotado baseado no valor proposto por Lee (1998) e adaptado para um valor padrão que produz uma melhor representação do domínio de sistemas aquáticos tais como rios, canais e enseadas. O segundo critério trata-se de um número máximo arbitrário de fusões a partir do qual a qualidade da malha não apresentará grandes melhorias caso o algoritmo continue fundindo triângulos. É o caso quando uma grade é composta por muitas faces com β variando entre 0,6 e 0,7. O número máximo adotado com base em diversos experimentos numéricos no algoritmo de geração de malhas mistas é de 500 fusões por grade.

A seguir são apresentadas três aplicações da estratégia de adaptação de malhas triangulares em malhas mistas. Nas aplicações discutidas neste trabalho, foram usadas grades com diferentes formas, refinamentos e contornos. A primeira aplicação trata-se de uma malha triangular aplicada em um círculo de 1 unidade de diâmetro, similar à aplicação anterior. No entanto, a grade adotada nesta aplicação apresenta um gradiente em sua densidade nas regiões próximas do contorno (Figura 8). As segunda e terceira aplicações são quadrados com lados iguais a 1 unidade e 3 unidades, respectivamente (Figura 9). Dois diferentes tipos de refinamentos foram utilizados para testar a eficiência do método.

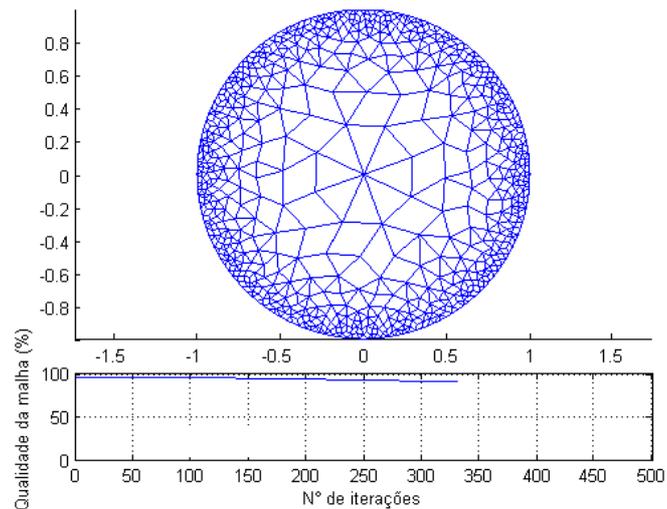


Figura 8 – Exemplo 2 da malha mista final.

No exemplo 2 percebe-se pouca oscilação na qualidade média da malha nas 100 primeiras fusões. Constata-se, no entanto, que a partir de um determinado número de iterações, as fusões reduzem a qualidade da malha.

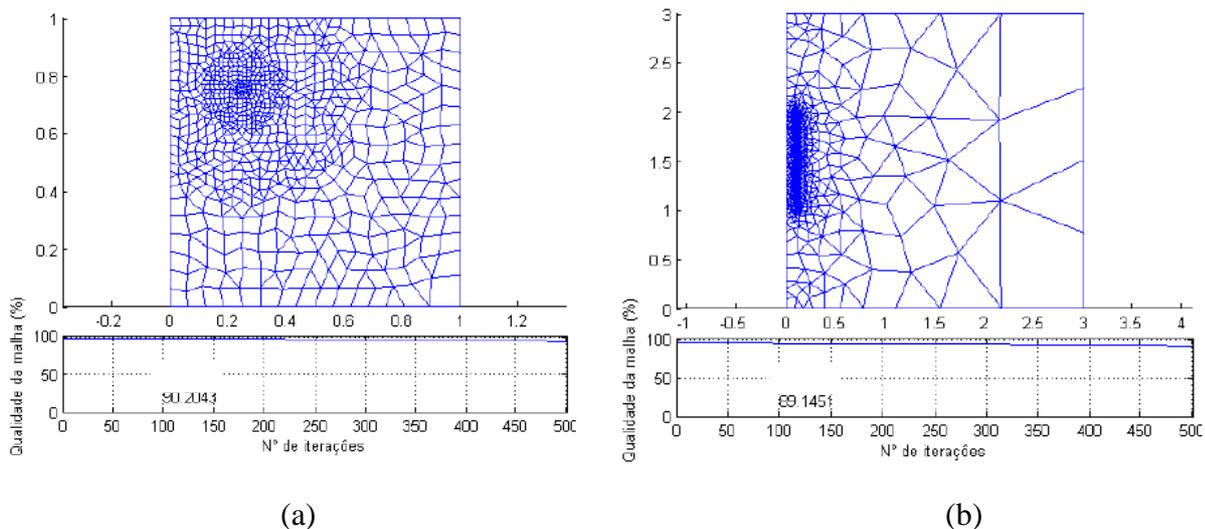


Figura 9 – Exemplos 3 (a) e 4 (b) da malha mista final.

Nos exemplos 3 e 4 o número de iterações máximo foi alcançado, atingindo um dos critérios de parada do algoritmo. Percebe-se que, da mesma forma no exemplo 2, tomando como base a qualidade média da malha, a fusão se torna inviável a partir de um determinado número de iterações.

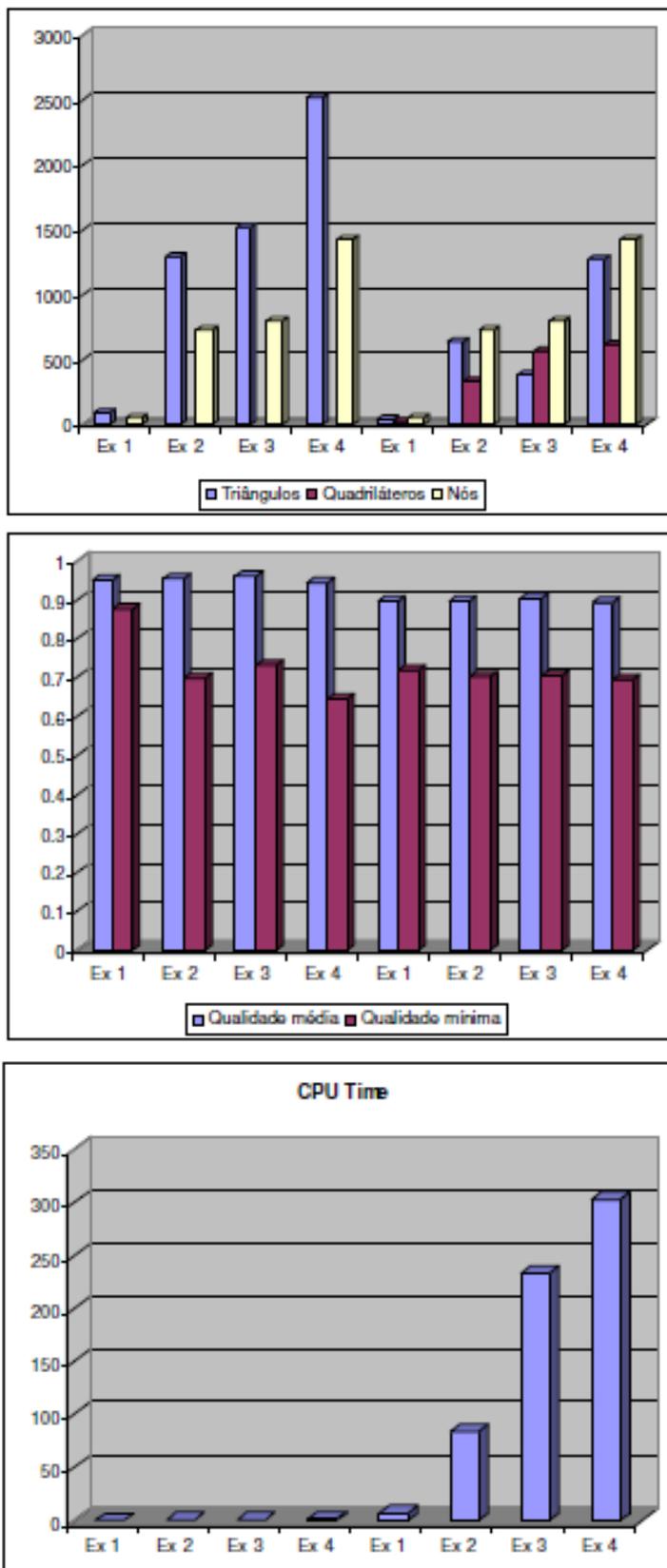


Figura 10 – Características da representação dos 4 exemplos em malhas não estruturadas triangulares e mistas.

A Figura 10 mostra que com uma redução no número de polígonos a malha computacional se torna mais eficiente para a representação dos domínios. No entanto, o tempo de processamento computacional cresce exponencial com o aumento de diagonais da malha. A qualidade média da malha é uma variável a ser analisada separadamente. Embora possa parecer que com o uso de malhas mistas há uma redução na qualidade média da malha, é necessário um estudo de otimização desta variável para definir o número de fusões para otimizar a qualidade da malha.

4 – CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

A técnica de frente avançada (AFT) utilizada para a geração de malhas adaptativas propostas por Lo (1991) é satisfatória para os interesses do presente trabalho. As malhas adaptativas mostraram-se eficientes, reduzindo o número de polígonos e aumentando a qualidade média do domínio ao qual foram submetidas para um número ótimo de iterações para fusão. A qualidade média da malha apresentou pequenas oscilações a medida em que eram realizadas as fusões até que decresciam indefinidamente ao longo das iterações. Isto ocorre pelo fato de que a malha atinge um ponto ótimo de eficiência ao gerar quadriláteros com boa qualidade. A partir desse ponto, a fusão começa a reduzir a qualidade média da malha gerando quadriláteros de baixa qualidade e reduzindo a qualidade total da malha. Uma recomendação para minimizar este problema seria uma possível otimização mono-objetivo da qualidade média da malha e a aplicação de malhas mistas para representar domínios reais.

BIBLIOGRAFIA

- BOROUCAKI, H.; FREY, P. J. (1998). “*Adaptive Triangular-Quadrilateral Mesh Generation*”. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 41, p. 915-934.
- CASULLI, V.; CATTANI, E. (1994). “*Stability, accuracy and efficiency of a semi-implicit method for three-dimensional shallow water flow*”. Computers and Mathematics with Applications, v. 27, p. 99-112.
- CASULLI, V.; WALTERS, R.A. (2000). “*An Unstructured Grid, Three-Dimensional Model Based on the Shallow Water Equations*”. International Journal for Numerical Methods in Fluids, v. 32, p. 331-348.
- CASULLI, V.; ZANOLLI, P. (2005). “*High resolution methods for multidimensional advection–diffusion problems in free-surface hydrodynamics*”. Ocean Modelling, v. 10, p. 137-151.
- CHENG, R. T.; CASULLI, V. (2001). “*Evaluation of the UnTRIM Model for 3-D Tidal Circulation*”. Proceedings of the 7-th International Conference on Estuarine and Coastal Modeling, p. 628-642.

- CHENG, R. T.; CASULLI V. (2001). "Evaluation of the UnTRIM Model for 3-D Tidal Circulation". Proceedings of the 7-th International Conference on Estuarine and Coastal Modeling, Novembro de 2001, p. 628-642.
- CHENG, R.T.; CASULLI, V.; GARTNER, J.W. (1993). "Tidal, Residual, Intertidal Mudflat (TRIM) Model and its Applications to San Francisco Bay. California". Estuarine, Coastal and Shelf Science, v. 36, p. 235-280.
- CUNHA, C.N.; ROSMAN, P.C.C. (2005). *Referência Técnica do SisBAHIA®- Sistema Base de Hidrodinâmica Ambiental*.
- ESPINHA, R. S. L. (2005). "Visualização Volumétrica Interativa de Malhas Não-Estruturadas Utilizando Placas Gráficas Programáveis.". Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil), Programa de Pós-Graduação em Informática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- FARIAS PEREIRA, F. (2010). "Modelo hidrodinâmico e de transporte bidimensional de grade não estruturada para lagos rasos". Dissertação (Mestrado em Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental), Instituto de Pesquisas Hidráulicas, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
- FRAGOSO Jr, C. R. (2009). "Modelagem Tridimensional da Estrutura Trófica em Ecossistemas Aquáticos Continentais Rasos." Tese (Doutorado em Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental), Instituto de Pesquisas Hidráulicas, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
- HURTADO, F. S. V. (2011). "Formulação tridimensional de volumes finitos para simulação de reservatórios de petróleo com malhas não-estruturadas híbridas.". Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica), Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC.
- LEE, C. K. (1998). "Automatic adaptive mesh generation using metric advancing front approach". Engineering Computations, v. 16, p. 230-263.
- LO, S.H. (1989), "Generating quadrilateral elements on plane and over curved surfaces". Comput. Struct., v. 31, p. 421-426.
- LO, S.H. (1991). "Automatic mesh generation and adaptation by using contours". International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 31, p. 689-707.
- ROSAURO, N. M. L. (1982). "A Finite Elements Application to the Study of Seiches and Water Circulation in the Jacuí Delta, Guaíba River and Patos Lagoon". Transfer Report. University of Southampton. Faculty of Engineering and Applied Sciences. Dep of Civil Eng, Sep.
- RUPPERT, J. (1995). "A Delaunay Refinement Algorithm for Quality 2-Dimensional Mesh Generation". Journal of Algorithms, v. 18, p. 548-585
- ZHANG, Y.-L., BAPTISTA, A.M. and MYERS, E.P. (2004) "A cross-scale model for 3D baroclinic circulation in estuary-plume-shelf systems: I. Formulation and skill assessment". Continental Shelf Research, v. 24, p.2187-2214.