

## **XIX SIMPÓSIO BRASILEIRO DE RECURSOS HIDRÍCOS**

### **SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ONDAS HIPERBÓLICAS CONTÍNUAS E DESCONTÍNUAS EM HIDRÁULICA**

*André Luiz Andrade Simões;<sup>1</sup> Harry Edmar Schulz<sup>2</sup>, Rodrigo de Melo Porto<sup>3</sup>  
& Antônio Alves Meira Neto<sup>4</sup>*

**Resumo** – Foram desenvolvidos códigos livres para resolução das equações de Saint-Venant e da equação diferencial ordinária que representa a conservação de massa para o escoamento em um reservatório, utilizando-se os métodos numéricos de Lax-Friedrichs, MacCormack e Runge-Kutta de quinta ordem. Os códigos possibilitaram avaliar problemas com soluções suaves e soluções descontínuas. No primeiro caso, estudou-se a propagação de ondas de cheia em canais e bacias de detenção, tendo sido obtidos resultados fisicamente consistentes e excelentes concordâncias entre os resultados calculados com os diferentes esquemas numéricos. Os problemas com soluções fracas, que envolvem a ruptura de barragem e formação de ressalto hidráulico em um canal triangular, corresponderam bem às soluções conhecidas para casos mais simples.

**Abstract** – This work presents free codes developed to solve the Saint-Venant equations and the ordinary differential equation for the mass conservation of flows in reservoirs, using three numerical methods: Lax-Friedrichs, MacCormack and fifth-order Runge-Kutta. These codes allowed to assess two kind of problems, with smooth and with discontinuous solutions. In the first case, we studied the propagation of flood waves in channels and detention basins, obtaining physically consistent results, which present excellent concordance with results calculated using different numerical schemes. The problems with weak solutions, which involve the dam break and the hydraulic jump in a channel with triangular cross section, corresponded well to known solutions for simpler cases.

**Palavras-Chave** – Equações de Saint-Venant, estruturas hidráulicas, ondas.

#### **INTRODUÇÃO E OBJETIVOS**

A turbulência é necessariamente tridimensional e variável. Sendo assim, quando há a intenção de simular escoamentos turbulentos com as equações de Navier-Stokes, deve-se utilizá-las sem quaisquer restrições. Para que tal uso seja legítimo a malha computacional deve ser suficientemente refinada a fim de capturar as menores escalas do escoamento turbulento. Isto só é possível para números de Reynolds baixos, condição que pode ser verificada aproximadamente com os resultados da teoria de Kolmogorov, que permite escrever o número de graus de liberdade de um problema 3D como sendo proporcional ao número de Reynolds (Re) elevado a 9/4. Se for considerado um valor típico,  $Re=10^5$ , por exemplo, a malha computacional deve possuir

---

<sup>1</sup> Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, Av. Trabalhador São-carlense, 400, São Carlos-SP. simoes@sc.usp.br;

<sup>2</sup> Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, Av. Trabalhador São-carlense, 400, São Carlos-SP. heschulz@sc.usp.br;

<sup>3</sup> Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, Av. Trabalhador São-carlense, 400, São Carlos-SP. rodrigo@sc.usp.br;

<sup>4</sup> Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, Av. Trabalhador São-carlense, 400, São Carlos-SP. antoniomeira@gmail.com.

aproximadamente  $10^{11}$  elementos, tornando a simulação impraticável com os recursos computacionais modernos.

Como alternativa para a dificuldade descrita, utiliza-se os modelos de turbulência. Entretanto, para problemas com grandes escalas e que exigem soluções rápidas, tal solução pode ser dispendiosa. Este trabalho tem como objetivo explorar o nível seguinte, que consiste na solução de equações diferenciais parciais (EDPs) hiperbólicas. Inclui-se nos objetivos o desenvolvimento de códigos livres para resolução das equações de Saint-Venant, a simulação de propagação de ondas de cheia em um canal e uma bacia de detenção, a simulação da ruptura de uma barragem e a simulação da formação de um ressalto hidráulico em um canal triangular.

## EQUAÇÕES DE SAINT-VENANT

### *Conservação de massa*

A equação de conservação de massa em sua forma integral euleriana é:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho d\Omega + \iint_S \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS = 0, \quad (1)$$

em que  $t$  = tempo,  $\rho$  = massa específica,  $\Omega$  = volume de controle envolvido por  $S$  e  $\vec{V}$  é o campo de velocidades.

Selecionando um volume de controle em um canal, se forem empregadas as hipóteses de escoamento unidimensional e incompressível, se não houver injeção ou sucção de massa de tal maneira que o volume de controle possua apenas uma entrada (seção 1) e uma saída (seção 2) e se o volume de controle for deformável apenas na superfície livre, a aplicação do teorema de Leibniz em sua forma simplificada conduz ao seguinte resultado:

$$\int_x \frac{\partial A}{\partial t} dx + u_2 A_2 - u_1 A_1 = 0, \quad (2)$$

em que  $A$  é a área da seção transversal e  $u$  a velocidade média. Finalmente, com o teorema do valor médio, obtém-se a equação da continuidade:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(uA)}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

A dedução da equação 3 foi apresentada por Saint-Venant (1871, p.152).

## Conservação de quantidade de movimento

A segunda Lei de Newton para volumes de controle indeformáveis é:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho \vec{V} d\Omega + \iint_S \rho \vec{V} \vec{V} \cdot \vec{n} dS. \quad (4)$$

Utilizando a distribuição de pressões para escoamentos paralelos em canais de grande declividade (Chow, 1959, p.32), as forças nas seções 1 e 2 assumem as seguintes formas:

$$\begin{cases} F1 = A_1 \rho g \bar{h}_1 \cos \alpha, \\ F2 = A_2 \rho g \bar{h}_2 \cos \alpha. \end{cases} \quad (5)$$

Desprezando os efeitos da aceleração de Coriolis, a variação do coeficiente de Boussinesq ao longo do canal e, com as mesmas hipóteses da equação 3, obtém-se:

$$\frac{\partial(uA)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \beta u A u + g A \bar{h} \cos \alpha \right) = g A (I_o - I_f), \quad (6)$$

em que  $\beta$  é o coeficiente de Boussinesq,  $g$  é a aceleração devida à gravidade,  $\bar{h}$  é a distância vertical da superfície livre ao centro de gravidade da seção transversal,  $\alpha$  é o ângulo entre o fundo do canal e a horizontal,  $I_o = -dz/dx$  ( $z$ =cota do fundo) e  $I_f$  é a declividade da linha de energia. O uso das equações de Saint-Venant com  $I_f \neq 0$  normalmente é realizado com equações de resistência desenvolvidas para o regime permanente, como as equações de Darcy-Weisbach e Manning:

$$I_f = f \frac{u |u|}{8gR_h} \text{ (Darcy-Weisbach) ou } I_f = n^2 \frac{u |u|}{R_h^{4/3}} \text{ (Manning)} \quad (7)$$

Nestas equações  $f$  é o fator de resistência de Darcy-Weisbach,  $R_h$  é o raio hidráulico ( $A/P$ ,  $P$  = perímetro molhado) e  $n$  é o coeficiente de rugosidade de Manning. As equações 3 e 6 são as equações de Saint-Venant-1D, assim denominadas em homenagem a Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797-1886), que deduziu a equação 3 e uma equação semelhante à equação 6, publicando-as em 1871. As deduções destas equações podem ser encontradas em Chaudhry (1979, 2008) e Porto (2006).

### Aplicação a canais trapezoidais, retangulares e triangulares

Seja um trapézio isósceles com base menor  $b$  (largura de fundo), base maior  $B$  (largura de topo), altura  $h$  (profundidade do escoamento) e co-tangente do ângulo de suas laterais em relação à horizontal igual a  $Z$ . Para esta forma, pode-se escrever as seguintes grandezas geométricas:

$$A = (b + Zh)h, \quad (8)$$

$$P = b + 2h\sqrt{1+Z^2}, \quad (9)$$

$$\bar{h} = (h^2/6)(3b + 2Zh)/A, \quad (10)$$

$$B = b + 2Zh. \quad (11)$$

Se  $Z = 0$  as equações 8-11 são simplificadas e passam a representar seções retangulares ( $A=bh$ ,  $P=b+2h$ ,  $\bar{h}=h/2$  e  $B=b$ ). Se  $b=0$  (triângulo isósceles),  $A=Zh^2$ ,  $P=2h\sqrt{1+Z^2}$ ,  $\bar{h}=h/3$  e  $B=2Zh$ . As equações 3 e 6 envolvem o cálculo de  $A$ ,  $uA$  e a profundidade do centro de gravidade. Conhecida a área é possível calcular  $h$  sabendo-se que  $h=A/b$  para seções retangulares. Para seções trapezoidais ou triangulares a solução do polinômio resulta em:

$$h = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ZA}}{2Z}. \quad (12)$$

### Regimes de escoamento, condições de contorno e iniciais

O sistema formado pelas equações 3 e 6 pode ser reescrito como uma única equação vetorial:

$$H_t + F_x = S. \quad (13)$$

em que  $H$  é denominado vetor das quantidades conservadas,  $F$  é o vetor fluxo e  $S$  é o vetor com os termos fonte (ver LeVeque, 2002):  $H = [A, uA]^T$ ,  $F = [uA, \beta uAu + gA\bar{h} \cos \alpha]^T$ ,  $S = [0, gA(I_o - I_f)]^T$ .

As equações de Saint-Venant compõem um sistema do tipo hiperbólico e as condições de contorno devem ser consistentes com os sentidos das curvas características, que podem ser determinados conhecendo-se os sinais dos autovalores da matriz Jacobiana do vetor fluxo. O vetor  $F$  pode ser escrito em termos das componentes de  $H$ ,  $H_1$  e  $H_2$ , e de uma função  $\phi(H_1) = A\bar{h}$ :

$$F = [H_2, \beta H_2^2/H_1 + g \cos \alpha \phi(H_1)]^T. \quad (14)$$

A matriz Jacobiana de  $F$  é:

$$\frac{\partial F_i}{\partial H_j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\beta(H_2/H_1)^2 + g \cos \alpha \phi(H_1)_{H_1} & 2H_2/H_1 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Os autovalores de  $15$ ,  $\lambda^{(1)}$  e  $\lambda^{(2)}$ , são determinados resolvendo o seu polinômio característico:

$$\lambda^2 - 2(H_2/H_1)\lambda + \beta(H_2/H_1)^2 - g \cos \alpha \phi(H_1)_{H_1} = 0. \quad (16)$$

Portanto:

$$\lambda^{(1)} = u + \sqrt{u^2 - \beta u^2 + g \cos \alpha \phi(H_1)_{H_1}}, \quad (17)$$

$$\lambda^{(2)} = u - \sqrt{u^2 - \beta u^2 + g \cos \alpha \phi(H_1)_{H_1}}. \quad (18)$$

Se os radicais dos autovalores forem positivos o sistema de equações é hiperbólico. O coeficiente de Boussinesq depende da forma do perfil de velocidades, sendo função da posição e do tempo para o caso mais geral. É usual assumir a simplificação  $\beta = 1$ , exceto em problemas específicos para os quais  $\beta$  é determinado por meio de resultados experimentais ou simulações numéricas. Assumindo  $\beta = \cos \alpha = 1$  e, para uma seção retangular, obtém-se:

$$\begin{cases} \lambda^{(1)} = u + \sqrt{gh}, \\ \lambda^{(2)} = u - \sqrt{gh}. \end{cases} \quad (19)$$

Combinando as equações 10 e 12, pode-se escrever:

$$\phi(H_1) = (8Z^2)^{-1} [b(-b + \sqrt{b^2 + 4ZH_1})^2 + (-b + \sqrt{b^2 + 4ZH_1})^3 / 3]. \quad (20)$$

Derivando a equação anterior em relação a  $H_1$ , o resultado obtido é:

$\phi(H_1)_{H_1} = (8Z\sqrt{b^2 + 4ZH_1})^{-1} [4b(-b + \sqrt{b^2 + 4ZH_1}) + 2(-b + \sqrt{b^2 + 4ZH_1})^2]$ . Simplificando, obtém-se:

$$\phi(H_1)_{H_1} = H_1(\sqrt{b^2 + 4ZH_1})^{-1} \text{ ou } \phi(H_1)_{H_1} = H_m, \quad (21)$$

em que  $H_m = A/B$  (altura hidráulica). Com este resultado e  $\beta=\cos\alpha=1$ , os autovalores definidos pelas equações 17 e 18 assumem as formas conhecidas para as velocidades absolutas das ondas:

$$\lambda^{(1)} = u + \sqrt{gH_m}, \quad (22)$$

$$\lambda^{(2)} = u - \sqrt{gH_m}. \quad (23)$$

Se o escoamento for supercrítico os autovalores são positivos. Nesta situação as variáveis conservadas devem ser impostas por meio de números ou funções na entrada, respeitando o fato das características possuírem inclinações positivas, o que corresponde ao transporte de informações para o domínio. Se o escoamento supercrítico ocorrer na saída, em  $x=L$ , a condição de contorno deve ser calculada com as variáveis  $H_1$  e  $H_2$  nas proximidades de  $L$ . Existem algumas opções, como extrapolações e o uso das equações características. Se o escoamento for subcrítico uma das variáveis deve ser fixada e a outra calculada com valores provenientes do domínio, na vizinhança do contorno. A condição inicial pode variar em função do problema. Uma alternativa é resolver a equação diferencial ordinária (EDO) deduzida das equações 3 e 6 para o regime permanente.

## CONSERVAÇÃO DE MASSA APLICADA A UM RESERVATÓRIO

A equação 1 é válida para um volume de controle fixo e indeformável. O teorema de Leibniz escrito a seguir, possibilita o uso da equação 1 para volumes deformáveis (Bird *et al.*, 2006):

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega(t)} \varphi(\vec{x}, t) d\Omega = \iiint_{\Omega(t)} \frac{\partial}{\partial t} \varphi d\Omega + \iint_S \varphi \vec{V}_s \cdot \vec{n} dS, \quad (24)$$

em que  $\varphi$  é um tensor ( $\rho$  para conservação da massa) e  $\vec{V}_s$  = velocidade da superfície de controle.

O escoamento em um reservatório como uma bacia de detenção normalmente é modelado escolhendo-se um volume de controle com superfícies inferior e laterais coincidentes com o fundo e paredes do reservatório. A superfície de controle superior se desloca junto com a superfície livre e é, por hipótese, uniforme. Assume-se que o líquido é incompressível e que há  $N$  entradas e  $M$  saídas, inicialmente arbitrárias em relação à geometria. Com essas considerações, a combinação das equações 1 e 24 resulta na seguinte equação diferencial ordinária:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \sum_{i=1}^N Q_e^{(i)} - \sum_{k=1}^M Q_s^{(k)}, \quad (25)$$

em que  $Q_e^{(i)}$  é a vazão na entrada  $i$  e  $Q_s^{(k)}$  é a vazão na saída  $k$ .  $Q_e^{(i)}$  normalmente é fixado por meio de hidrogramas em problemas relacionados a bacias de detenção. As vazões  $Q_s^{(k)}$  podem ser representadas por equações derivadas da equação de Bernoulli com coeficientes de correção.

## MÉTODOS NUMÉRICOS E CÓDIGOS DESENVOLVIDOS

### *Métodos numéricos para as EDPs*

Foram utilizados os métodos de Lax-Friedrichs (1954) e de MacCormack (1969) para elaboração dos códigos que resolvem as EDPs. O método de Lax-Friedrichs é de primeira ordem e às vezes é chamado de esquema difusivo de Lax devido à sua característica difusiva para malhas não muito finas. O método de MacCormack é de segunda ordem e introduz oscilações indesejadas quando há soluções fracas. Tais oscilações foram controladas neste trabalho com o uso de uma viscosidade artificial com a forma apresentada por Anderson (1995).

### *Método numérico empregado para solução da EDO*

Foi utilizado o método explícito de Runge-Kutta de quinta ordem de Butcher (1964; 2003, p.92), também apresentado em Chapra e Canale (2006, p.709), para resolver a equação 25. Trata-se de um esquema numérico com seis estágios, condição que eleva o custo computacional de forma considerável em problemas que exigem a solução de sistemas de EDOs com muitas equações. Quando se pretende resolver apenas uma equação, como a equação 25, até mesmo computadores com configurações não muito sofisticadas são suficientes.

### *Outros métodos empregados (sub-rotinas)*

Os códigos escritos neste trabalho funcionam em Matlab®, em Octave (com poucas adaptações) e podem ser facilmente modificados para outras linguagens. Todos podem ser adquiridos gratuitamente em [stoa.usp.br/hidraulica/files/](http://stoa.usp.br/hidraulica/files/). O método de Newton foi programado para resolver a equação de Darcy-Weisbach ou Manning, fornecendo a profundidade do escoamento uniforme. Os hidrogramas afluentes podem ser inseridos como uma matriz com vazões e os tempos. Para que essas informações sejam utilizadas durante as integrações das equações diferenciais realiza-se interpolações que produzem valores para todos os pontos da malha temporal. As funções disponíveis nos *softwares* citados possibilitam a realização de interpolações lineares ou cúbicas com o polinômio de Hermite, por exemplo. Integrações dos hidrogramas para obtenção de volumes são realizadas com a regra do trapézio aplicada aos dados interpolados.

## APLICAÇÕES

### Problema 1 – Propagação de ondas de cheia em canais

#### (i) $H_2(0,t)$ com um máximo

Os códigos desenvolvidos para resolução das equações de Saint-Venant são válidos para canais trapezoidais e, portanto, podem ser estendidos aos canais com seções retangulares e triangulares. Nesta aplicação é simulada a passagem de um onda de cheia em um canal trapezoidal com  $L = 3000$  m (comprimento),  $I_o = 0,0012$ ,  $n = 0,02$ ,  $b = 5$  m e  $Z = 1,5$ . Na entrada os valores de  $H_1$  são calculados com extrapolação de ordem zero e os valores de  $H_2$  são impostos por meio do hidrograma da Tabela 1. Na saída,  $H_1$  é calculado com extrapolação de ordem zero, em seguida, calcula-se  $h(L,t)$  e  $u(L,t)$  com a equação de Manning. Feito isto, calcula-se  $H_2(L,t) = H_1(L,t)u(L,t)$ . As condições iniciais correspondem ao regime uniforme para a primeira vazão do hidrograma.

Tabela 1 –  $H_2(0,t)$ , Problema 1(i).

$H_2$ [m <sup>3</sup> /s]	10	12	18	30	50	36	25	18	10	10
$t$ [s]	0	600	900	1800	2700	3600	4800	5400	6600	12000

A primeira simulação foi realizada com o método de Lax-Friedrichs, com uma malha espacial com espaçamento  $\Delta x = 6,6815$  m, espaçamento da malha temporal  $\Delta t = 1,0$  e  $CFL = 0,9721$  (Courant, Friedrichs e Lewy, 1967). O gráfico da Figura 1a contém o hidrograma original apresentado na Tabela 1 e o hidrograma obtido após a interpolação com o método de Hermite. As Figuras 1b-1d ilustram o comportamento de  $h$ ,  $Q=uA$  e  $u$  em três posições ao longo do canal. O aspecto das relações obtidas é coerente com o esperado. Nota-se que há atenuação dos valores máximos para estas três variáveis e o retorno ao escoamento uniforme para tempos maiores que 140 min, aproximadamente. A Figura 1d mostra que  $u(0,t)$  passa por um ponto de mínimo antes de retornar às condições uniformes. Este resultado respeita a conservação e ocorre porque a vazão decai mais rápido do que a área, que é retardada devido à resistência oferecida ao escoamento. A Figura 1e contém a relação  $Q(h)$  para  $x=L/2$ , e a relação correspondente ao regime uniforme, obtida com a equação de Manning. Devido à ascensão e depleção da onda, ocorrem duas profundidades para uma mesma vazão. Nesta relação não biunívoca em forma de laço a profundidade máxima não corresponde necessariamente à vazão máxima. A Figura 1f mostra a distribuição de profundidades no plano  $x-t$  e a estrutura das curvas características.

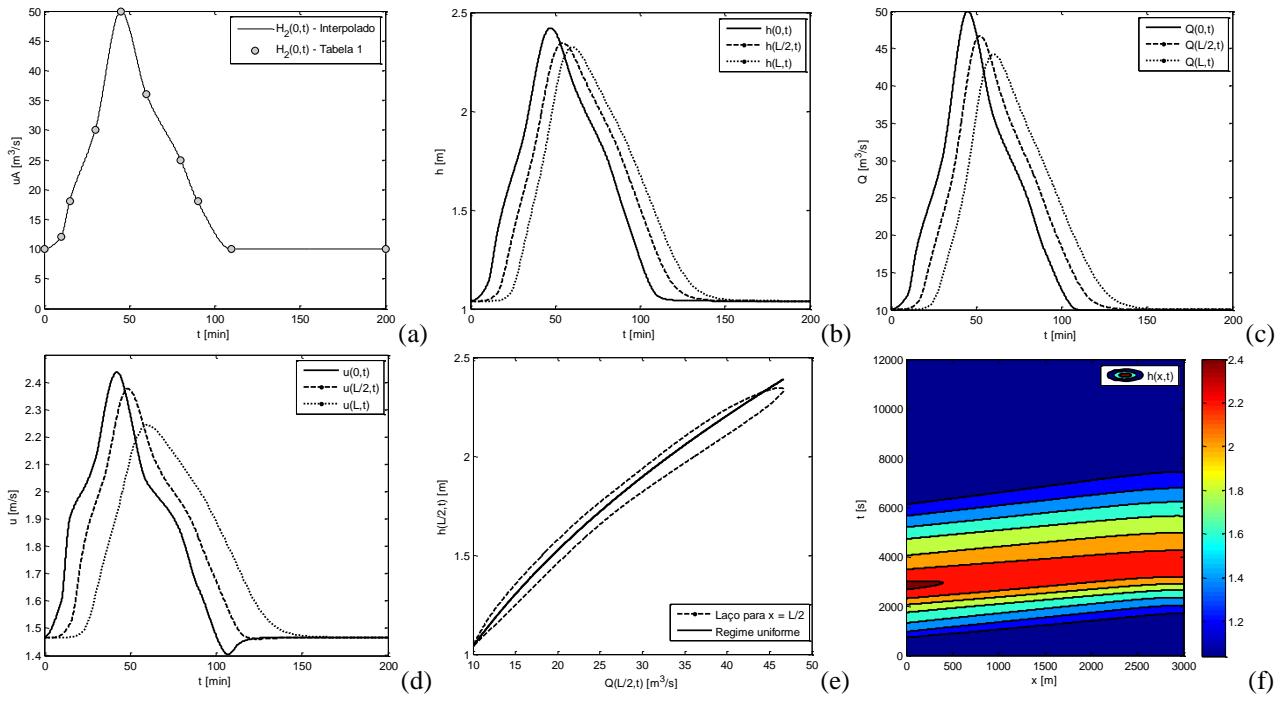
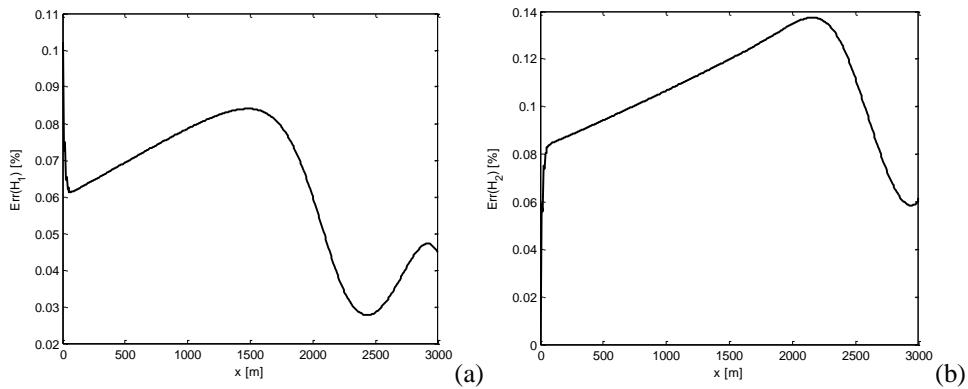


Figura 1 – Soluções obtidas para o Problema 1 com o método de Lax-Friedrichs e o hidrograma da Tabela 1: (a) Hidrogramas original e interpolado; (b, c, d) Profundidades, vazões e velocidades em função do tempo em três seções; (e) Laço formado pela relação  $Q(h)=uA$  em  $x=L/2$ ; (f) Distribuição de profundidades no plano espaço-tempo

#### Comparação entre os resultados calculados com Lax-Friedrichs e MacCormack

Os valores máximos para cada posição foram comparadas através dos desvios relativos, tendo como referência o método de MacCormack. A Figura 2a ilustra a distribuição dos desvios relativos calculados com a área ( $Err(H_1)=100*|A_{LF}-A_{MC}|/A_{MC}$ , em que  $LF=Lax-Friedrichs$  e  $MC=MacCormack$ ). O valor máximo ocorreu em  $x = 6,68$  m e é inferior a 0,11%. A Figura 2b contém a distribuição dos desvios calculados com os valores de  $uA$ . Neste caso o máximo ocorreu com valor inferior a 0,14%, em  $x = 2158$  m. Os desvios calculados a partir das profundidades são apresentados na Figura 2c. Ao comparar os laços em  $x=L/2$ , observou-se que os não há grandes diferenças entre os resultados obtidos com os métodos de primeira e segunda ordem para este problema. A Figura 2d contém uma ampliação junto à posição de máximo e ilustra esta conclusão.



(Figura 2: Continua na página seguinte)

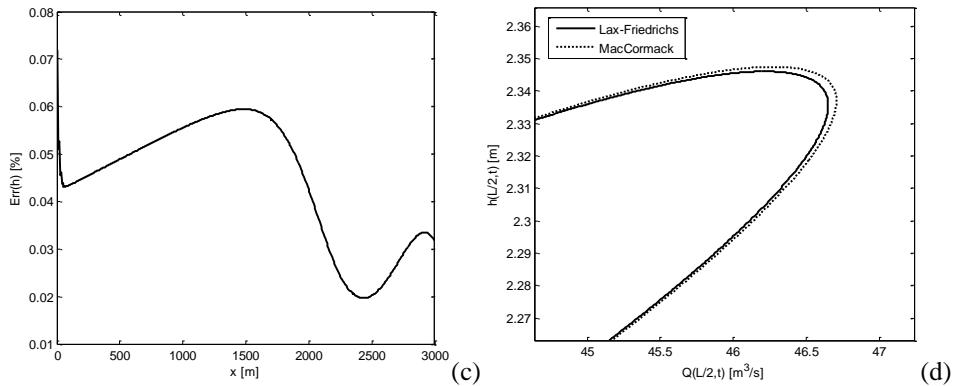


Figura 2 – Comparação entre os resultados obtidos com os métodos de Lax-Friedrichs e MacCormack (valores calculados com as envoltórias de máximos): (a) Desvios calculados com valores das áreas; (b) Desvios calculados com as vazões; (c) Desvios relativos para as profundidades e (d) comparação entre os laços obtidos com os diferentes métodos.

### (ii) $H_2(0,t)$ com três máximos

Esta parte do Problema 1 utiliza dados semelhantes aos da parte (i), exceto pelo hidrograma de entrada, que possui três picos, como pode ser visto na Tabela 2 e Figura 3a. O objetivo deste exemplo é ilustrar que um hidrograma de entrada como este resulta em uma relação  $Q(h)$  com três laços, como apresentado na Figura 3b. Os resultados foram obtidos com o método de Lax-Friedrichs e com uma malha e CFL iguais aos da parte (i).

Tabela 2 –  $H_2(0,t)$ , Problema 1(ii).

$H_2$ [ $m^3/s$ ]	10	12	18	30	50	36	25	18	10	10	20	40
$t$ [s]	30	20	15	10	12	20	30	25	15	10	10	-
$t$ [s]	0	720	900	1500	2160	3000	3600	4200	4500	5400	6000	6600

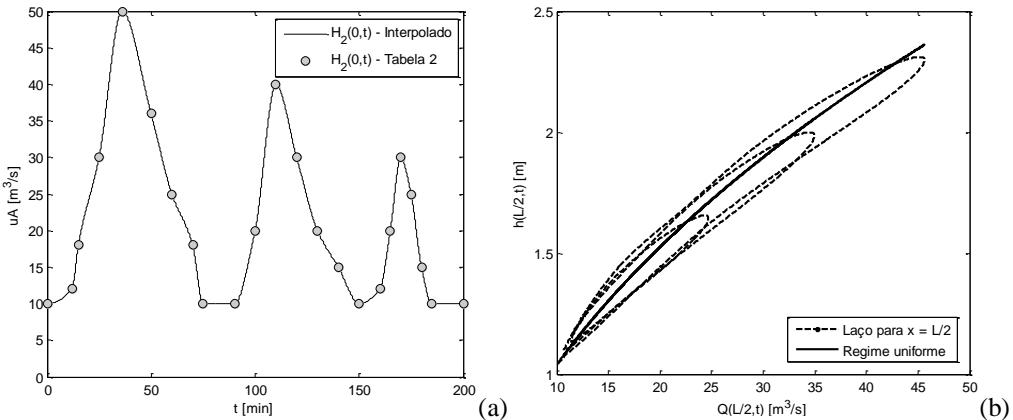


Figura 3 - Resultados referentes à parte (ii) do Problema 1:  
(a) Hidrogramas original e interpolado e (b) três laços formados pela relação  $Q(h)$ .

### Problema 2 – Propagação de ondas em bacias de detenção

Neste exemplo foram comparados os resultados obtidos com a solução das equações de Saint-Venant e com a equação 25, ambas aplicadas a uma bacia de detenção com características parecidas com as da Praça Charles Miller, situada em São Paulo. O hidrograma afluente,

apresentado por Canholi (1995), pode ser visto na Tabela 3 e Figura 4a. Considera-se que a bacia possui paredes verticais e geometria retangular com  $L = 200$  m,  $b = 61,25$  m, área em planta  $A_r = 12250$  m<sup>2</sup>. Como extravasores, a bacia possui um orifício junto ao fundo, representado de forma simplificada pela equação 26, e um vertedor retangular (equação 27). Adicionalmente, considera-se que os coeficientes de vazão são constantes, o que também é uma simplificação para o problema.

$$\begin{cases} Q_o = C_{do} A_o \sqrt{2gh_o}, & \text{se } h_o \leq a_o, \\ Q_o = 0, & \text{se } h_o < a_o, \end{cases} \quad (26)$$

em que  $Q_o$  = vazão escoada pelo orifício,  $C_{do} = 0,65$  (coeficiente de vazão),  $A_o = b_o a_o$  ( $b_o = 1,0$  m e  $a_o = 0,5$  m) e  $h_o$  é a altura desde a superfície livre até o centro de gravidade da área  $A_o$ .

$$\begin{cases} Q_v = \frac{2}{3} C_{dv} \sqrt{2g} L_v h_v^{3/2}, & \text{se } h \geq P, \\ Q_v = 0, & \text{se } h < P, \end{cases} \quad (27)$$

em que  $Q_v$  = vazão escoada pelo vertedor,  $C_{dv} = 0,728$  (coeficiente de vazão),  $L_v = 2,0$  m (largura da soleira) e  $h_v = h - P$ , sendo  $P$  a altura do vertedor, igual a 4,65 m.

Tabela 3 –  $H_2(0,t)$ , Problema 2.

$H_2$ [m <sup>3</sup> /s]	0.00	1.40	4.00	20.07	22.90	43.00	32.55	27.51	20.04
	12.69	11.14	8.65	6.78	5.62	3.96	2.48	1.71	1.16
$t$ [s]	0.00	971.09	1199.25	1786.35	2086.60	2760.00	3420.06	3758.32	4209.82
	4805.74	5043.19	5406.04	5781.63	6012.24	6604.44	7209.66	7807.80	8392.68

Fonte: Adaptado de Canholi (1995)

A solução do problema com as equações de Saint-Venant foi obtida com  $n = 0,02$ ,  $Z = 0$  e  $I_o = 0$ . A condição de contorno na entrada da bacia de detenção é imposta para  $H_2$  (vazão) por meio do hidrograma da Tabela 3 e extrapolada para  $H_1$ , como no Problema 1. Na saída  $H_1$  é extrapolado e  $H_2$  corresponde à soma das vazões  $Q_o$  e  $Q_v$ . A condição inicial é obtida com  $h(x,0) = 0,001$  m, valor necessário para evitar divisões por zero, e  $H_2(x,0)=0$ . Os espaçamentos da malha empregados foram  $\Delta x = 1,005$  m e  $\Delta t = 0,1216$  s, valores que resultaram em  $CFL = 0,952$  para este problema.

Os resultados obtidos com o método de Lax-Friedrichs podem ser vistos na Figura 4b-d. Observou-se que as profundidades em  $x = 0$ ,  $x = L/2$  e  $x = L$  em função do tempo coincidem aproximadamente, exceto para  $t < 26$  s, como destacado nas Figuras 4b e 4c. Percebe-se que os resultados são fisicamente consistentes uma vez que a elevação de  $h$  tem início em seções mais a montante. O valor máximo da profundidade na bacia foi  $\max(h) = 6,252$  m, em  $x = L$  e em  $t =$

4849,5 s (80,82 min). A vazão efluente máxima, igual a  $12,24 \text{ m}^3/\text{s}$ , ocorreu em  $t = 82,84 \text{ min}$  (ver Fig.4d). Ao integrar  $Q(0,t)$  e  $Q(L,t)$  foi possível calcular o volume armazenado, tendo sido obtido  $77205 \text{ m}^3$ . A superfície livre apresentou ondulações moderadas para os instantes iniciais, tendo permanecido aproximadamente horizontal durante as fases de subida e descida. Este comportamento pode ser visto com a animação gerada com o código desenvolvido.

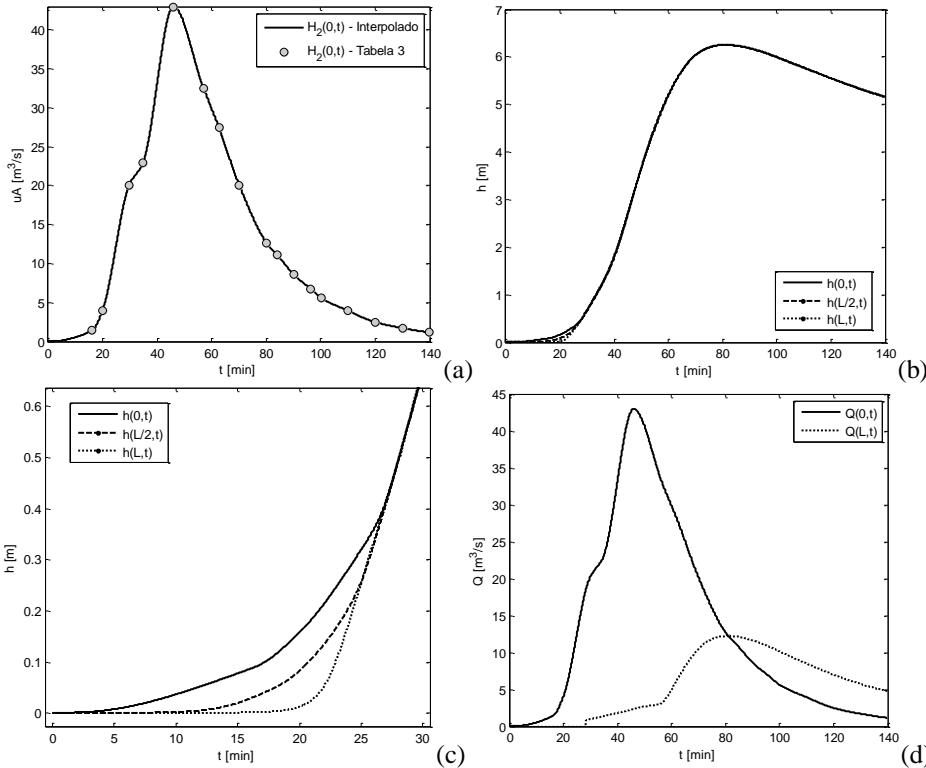


Figura 4 – Resultados obtidos para o Problema 2 com as equações de Saint-Venant e o método de Lax-Friedrichs: (a) Hidrogramas (original e interpolado); (b) Profundidades em função do tempo em três posições; (c) Detalhe extraído da Figura 4b; (d) Vazões afluente e efluente à bacia de detenção.

#### Comparação entre os resultados obtidos com Lax-Friedrichs e MacCormack

Os resultados obtidos com o método de MacCormack foram comparados aos obtidos com o esquema de Lax-Friedrichs utilizando a mesma malha computacional. A profundidade máxima resultou igual a  $6,264 \text{ m}$  ( $\text{Err}[\max(h)] = 0,19\%$ ), tendo ocorrido em  $t = 80,52 \text{ min}$ . A vazão efluente máxima ocorreu em  $t = 80,52 \text{ min}$ , com valor igual a  $12,34 \text{ m}^3/\text{s}$  ( $\text{Err}[\max(Q)] = 0,81\%$ ). O volume calculado com MacCormack foi um pouco menor, igual a  $77032 \text{ m}^3$ , com desvio relativo igual a  $0,22\%$ . Percebe-se que os resultados obtidos com o método de segunda ordem foram muito próximos daqueles obtido com o método de Lax-Friedrichs para a malha empregada.

#### Comparação entre resultados obtidos com as equações de Saint-Venant e a Equação 25

A equação 25 foi resolvida com o método de Runge-Kutta e os resultados obtidos foram comparados com aqueles apresentados anteriormente. A Figura 5a contém a variação da

profundidade ao longo do tempo para posição final da bacia de dissipação. Como pode ser visto por meio do detalhe apresentado na Figura 5b, a solução da EDO faz com que a profundidade cresça desde os primeiros instantes. Isto não ocorre com a solução obtida para Saint-Venant devido ao tempo necessário para que a onda alcance a seção final da bacia de detenção. A partir de  $t = 26,79$  min os desvios relativos (em relação a Runge-Kutta) resultaram inferiores a 1%. A solução da EDO forneceu  $\max(h) = 6,275$  m e um volume máximo igual a  $76864$  m<sup>3</sup>. As vazões efluentes em função do tempo podem ser vistas nas Figuras 5c e 5d. O valor máximo obtido com o método de Runge-Kutta foi  $12,43$  m<sup>3</sup>/s e em  $t = 59,11$  min ocorreu o desvio máximo igual a 4%. Finalmente, menciona-se que os resultados são próximos daqueles previstos pela metodologia de Porto (2002), que corresponde a soluções da equação 25 reescrita com variáveis adimensionais.

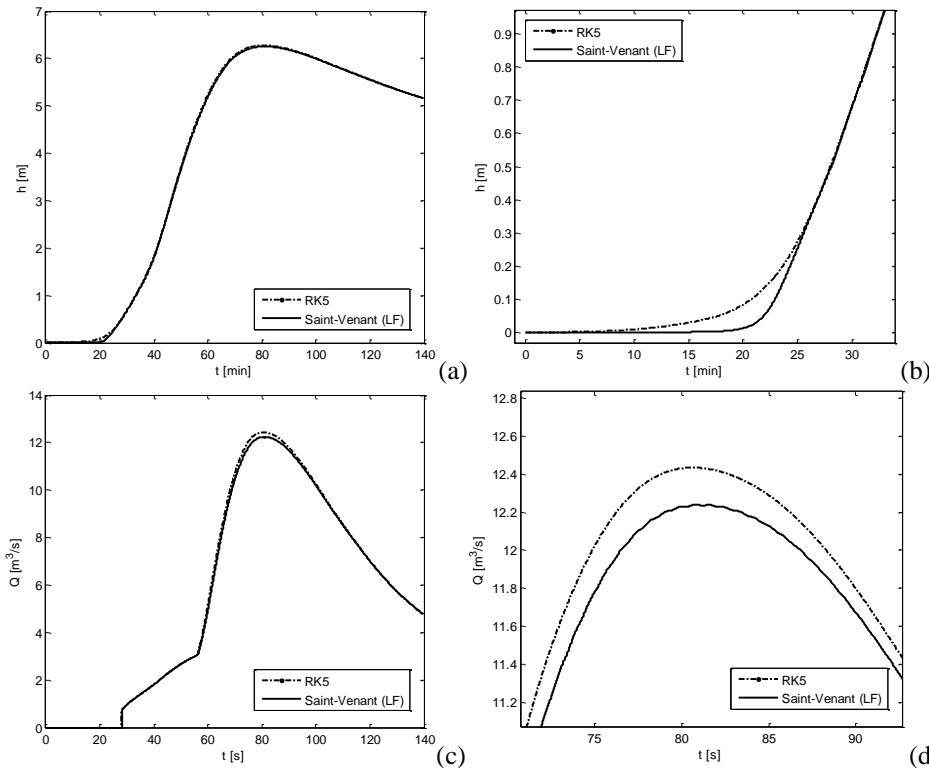


Figura 5 – Comparação entre os resultados obtidos com a EDO e com as EDPs: (a) Variação da profundidade com o tempo para a saída da bacia de detenção; (b) Detalhe da Figura 5a; (c) Vazão em função do tempo obtida para a seção final; (d) Detalhe da Figura 5c. RK5=Runge-Kutta de quinta ordem e LF=Lax-Friedrichs.

### Problema 3 – Problemas com soluções descontínuas

#### (i) Ruptura de barragem

De modo geral, a forma como ocorre a ruptura de uma barragem depende do material que compõem a sua estrutura, da forma da barragem e da causa da falha. Barragens de terra, por exemplo, rompem em um tempo relativamente lento e de forma progressiva em relação a barragens de concreto, como aquelas em forma de arco, por exemplo. Durante o rompimento gradual há a evolução de uma abertura que permite a passagem da água para jusante. O rompimento de grandes

porções de material em poucos instantes é chamado de instantâneo e tem como consequência a formação de uma onda de choque que viaja para jusante e uma onda de rarefação que se propaga para montante, *i.e.*, no sentido do reservatório. Algumas referências sobre o tema são os textos de Fread (1977), Vischer e Hager (1998) e Uemura (2009).

Este exemplo de aplicação resolve o rompimento instantâneo com as equações de Saint-Venant. Considera-se que a barragem é extraída do domínio computacional em  $t=\Delta t$ . Os dados utilizados para a simulação foram:  $b = 90$  m,  $Z = 0,2$ ,  $h_1 = 200$  m,  $h_0 = 10$  m,  $L_1 = 2000$  m,  $L_0 = 4000$  m,  $I_0 = 0$ ,  $n=f=0$ . Nestas definições,  $h_1$  e  $h_0$  são as alturas desde o fundo do canal até a superfície livre do nível estático a montante e a jusante da barragem, respectivamente;  $L_1$  e  $L_0$  são os comprimentos dos trechos a montante e a jusante da barragem, respectivamente. As condições de contorno utilizadas na saída são do tipo “absorventes”, representadas por extrapolações de ordem zero. Com isto espera-se que as ondas atravessem o contorno sem que ocorram reflexões, representando assim uma seção transversal do trecho do canal a jusante da barragem, em  $x=L$ . O contorno a montante da barragem corresponde a uma parede, ou seja,  $uA(0,t) = 0$  e  $A$  é extrapolado, assim como no contorno de jusante por  $H_i(0,t)=H_i(\Delta x,t-1)$ . A condição inicial é:  $A(x,0) = A(h_1)$  se  $0 \leq x \leq L_1$ ,  $A(x,0) = A(h_0)$  se  $L_1 < x \leq (L=L_1+L_0)$  e  $uA(x,0) = 0$ ,  $\forall x$ .

Os resultados obtidos para este problema podem ser representados de diferentes formas. A Figura 6 contém uma seqüência de gráficos que ilustra a evolução da superfície livre. Observa-se a formação de uma descontinuidade e de uma onda negativa. Em função das dimensões adotadas, nota-se que a velocidade da descontinuidade é elevada, próxima de 49 m/s. Empregando a solução analítica de Stoker (1956), válida para um canal retangular, obtém-se 46,78 m/s. Os valores máximos de  $B$  e das vazões ao longo do trecho simulado são apresentados nas Figuras 7a e 7b. Para  $x < L_1$  os valores máximos de  $B$  correspondem aos valores iniciais uma vez que o reservatório é esvaziado. Para  $x > L_1$ , entretanto, esta largura assume valores maiores que  $B(x,0)=94$  m devido à passagem da onda. Os máximos obtidos para  $H_2$ , como pode ser visto na Figura 7b, são extremamente elevados, porém compatíveis com as dimensões características do problema. A última imagem ilustra a estrutura da solução para  $h$  nos primeiros instantes.

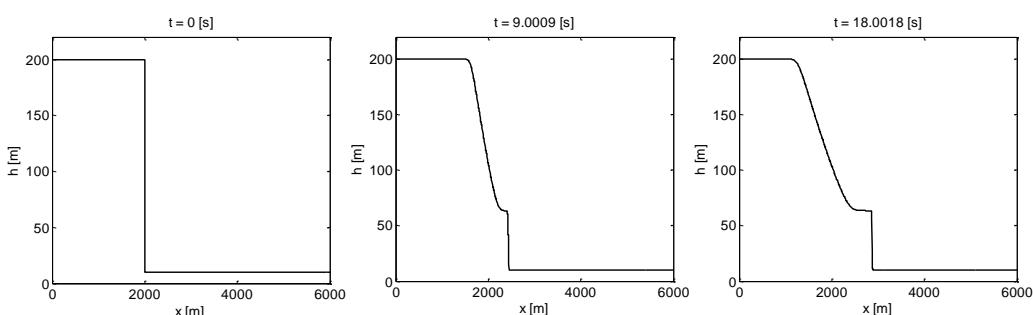


Figura 6: continua na próxima página.

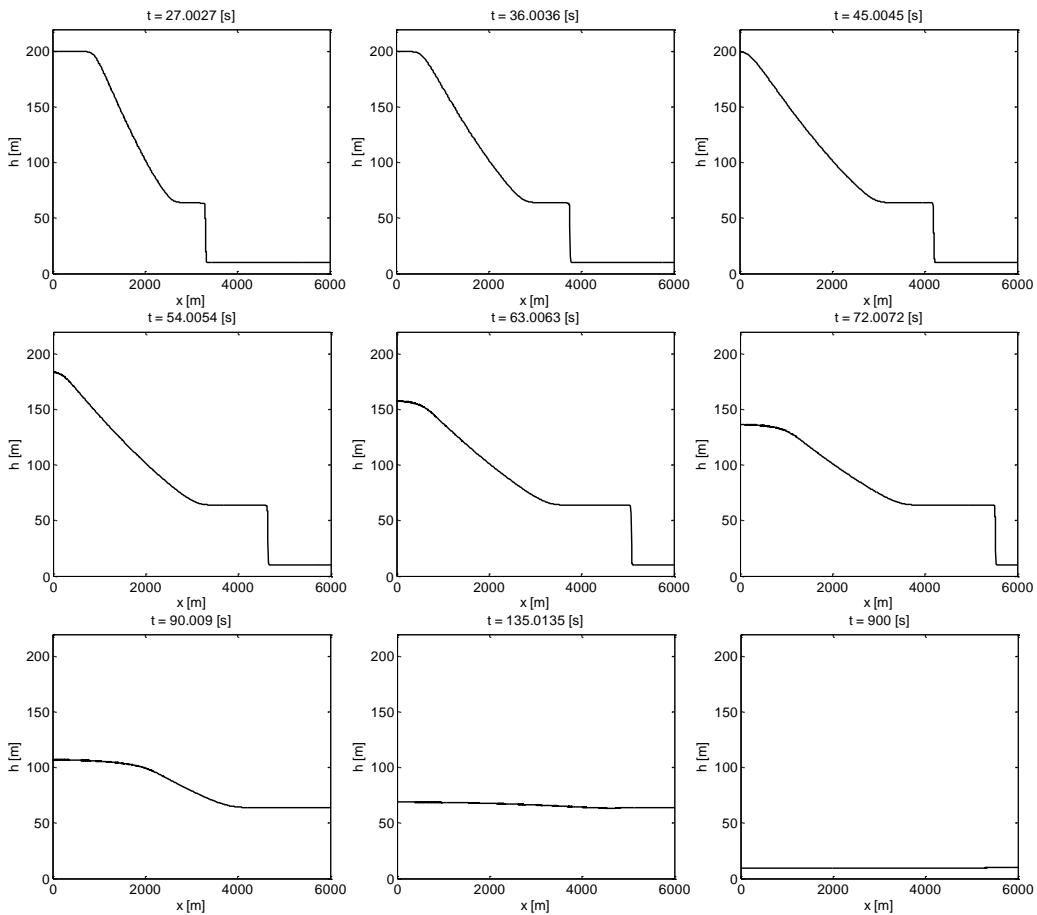


Figura 6 – Evolução da superfície livre para o Problema 3 (ruptura de barragem): Método de Lax-Friedrichs,  $\Delta x = 6,006$  m;  $\Delta t = 0,09$  s;  $\max(\text{CFL}) = 0,9887$ ; instante final = 900 s.

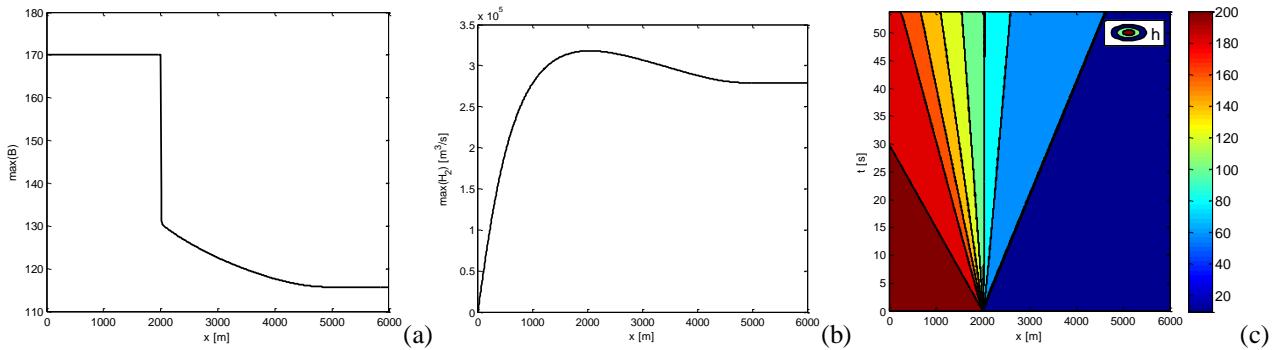


Figura 7 – Máximos ao longo de x e solução no plano x-t: (a) Largura de topo, B; (b) vazões e (c) solução no plano espaço-tempo para as profundidades e t entre 0 e 53,9 s.

#### Comparação entre os resultados obtidos com Lax-Friedrichs e MacCormack

Foram obtidos resultados com o método de MacCormack e Lax-Friedrichs para uma malha com  $\Delta x = 6,006$  m;  $\text{CFL} = 0,97$ ,  $\Delta t = 0,0736$  s (MacCormack),  $\Delta t = 0,0883$  s (Lax-Friedrichs). Os demais dados são os mesmos já apresentados para este problema, exceto pelo tempo total, igual a 530 s. O uso da viscosidade artificial foi necessário para reduzir oscilações espúrias. O fator de ponderação empregado foi igual a 0,3 (ver Anderson, 1995). As vazões máximas obtidas com ambos os métodos são apresentadas na Figura 8a. Nota-se que os maiores desvios ocorreram a partir de  $x = 3832$  m. Os valores máximos de  $h$ , apresentados na Figura 8b, apresentaram diferenças

maiores em  $x = 2000$  m, como ilustrado pelo detalhe da Figura 8c. Os desvios máximos ocorreram nesta posição, como pode ser visto na Figura 8d. As diferenças observadas se devem à ocorrência de dispersões e difusões numéricas originadas na descontinuidade.

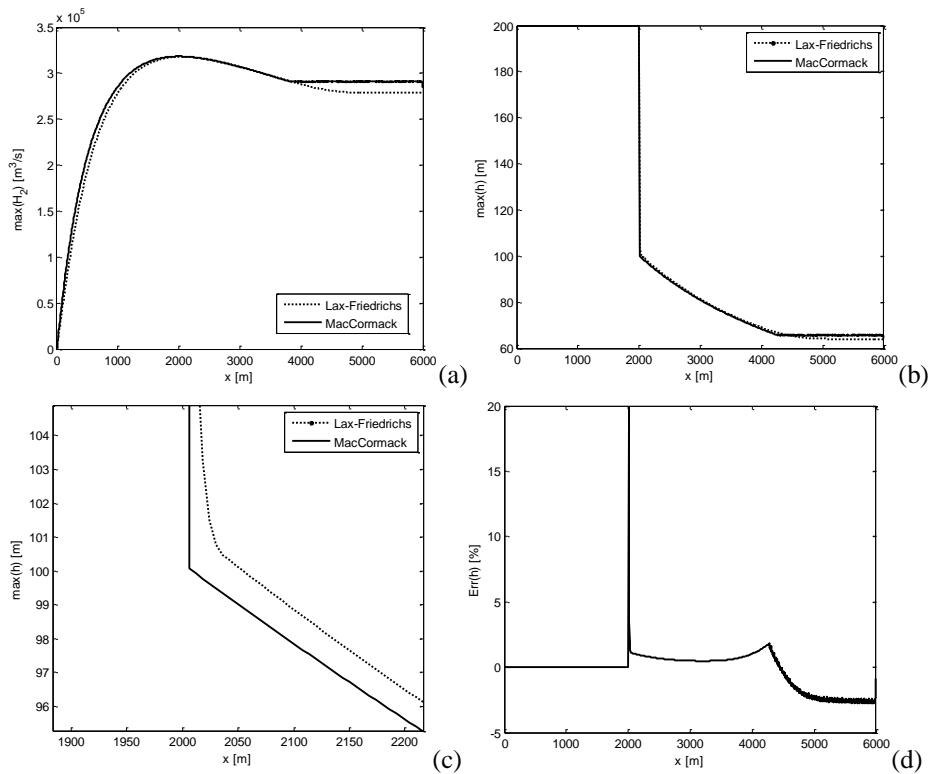


Figura 8 – Comparações entre Lax-Friedrichs e MacCormack: (a) Valores máximos obtidos para a vazão; (b) Profundidades máximas; (c) Detalhe da Figura 8c; (d) Desvios calculados com as profundidades.

### (ii) Formação de um ressalto hidráulico

As hipóteses atreladas às equações de Saint-Venant não permitem que ela represente adequadamente o ressalto hidráulico. Entretanto, assim como no problema de ruptura de barragens, ela possui soluções, no sentido fraco, que indicam a ocorrência do ressalto por meio de uma descontinuidade entre os escoamentos supercrítico e subcrítico. Neste exemplo foi utilizado um canal triangular ( $b = 0$ ) horizontal com  $L=10$  m e  $Z=2$ . Adotou-se  $f=0,04$  e  $t=200$  s. A condição inicial do problema é  $H_1(x,0)=0,02$   $\text{m}^2$  ( $h(x,0)=0,10$  m) e  $H_2(x,0)=0,05$   $\text{m}^3/\text{s}$ . Na entrada do canal impõe-se os valores  $H_1(0,t)=0,02$   $\text{m}^2$  e  $H_2(0,t)=0,05$   $\text{m}^3/\text{s}$ , uma vez que o escoamento é supercrítico, com número de Froude igual a 3,57. A condição de contorno na saída depende dos sinais dos autovalores (eq. 22 e 23). Se o escoamento for supercrítico o código escolhe a opção de extrapolar as variáveis  $H_1$  e  $H_2$ . Se o segundo autovalor for negativo há duas opções: (a) extrapolar  $H_2$  e fixar  $H_1$  ou (b) extrapolar a  $H_1$  e fixar  $H_2 = 0,05$   $\text{m}^3/\text{s}$ , como adotado neste exemplo.

Os resultados obtidos podem ser vistos na Figura 9, que ilustra a evolução de  $h(x,t)$ . A profundidade uniforme inicial foi rapidamente substituída por uma curva  $H_3$  (ver Chow, 1959;

Porto, 2006), que é a forma esperada para o perfil da superfície livre. Entretanto, devido à resistência imposta ao escoamento, tal perfil não pode persistir sobre a distância considerada, estabelecendo-se um choque. Quando o ressalto surge como solução do problema o sinal de  $\lambda^{(2)}$  passa a ser negativo e as condições de contorno são alteradas pelo código. Nota-se que no instante final há, além da curva H3, uma curva H2 a jusante da descontinuidade.

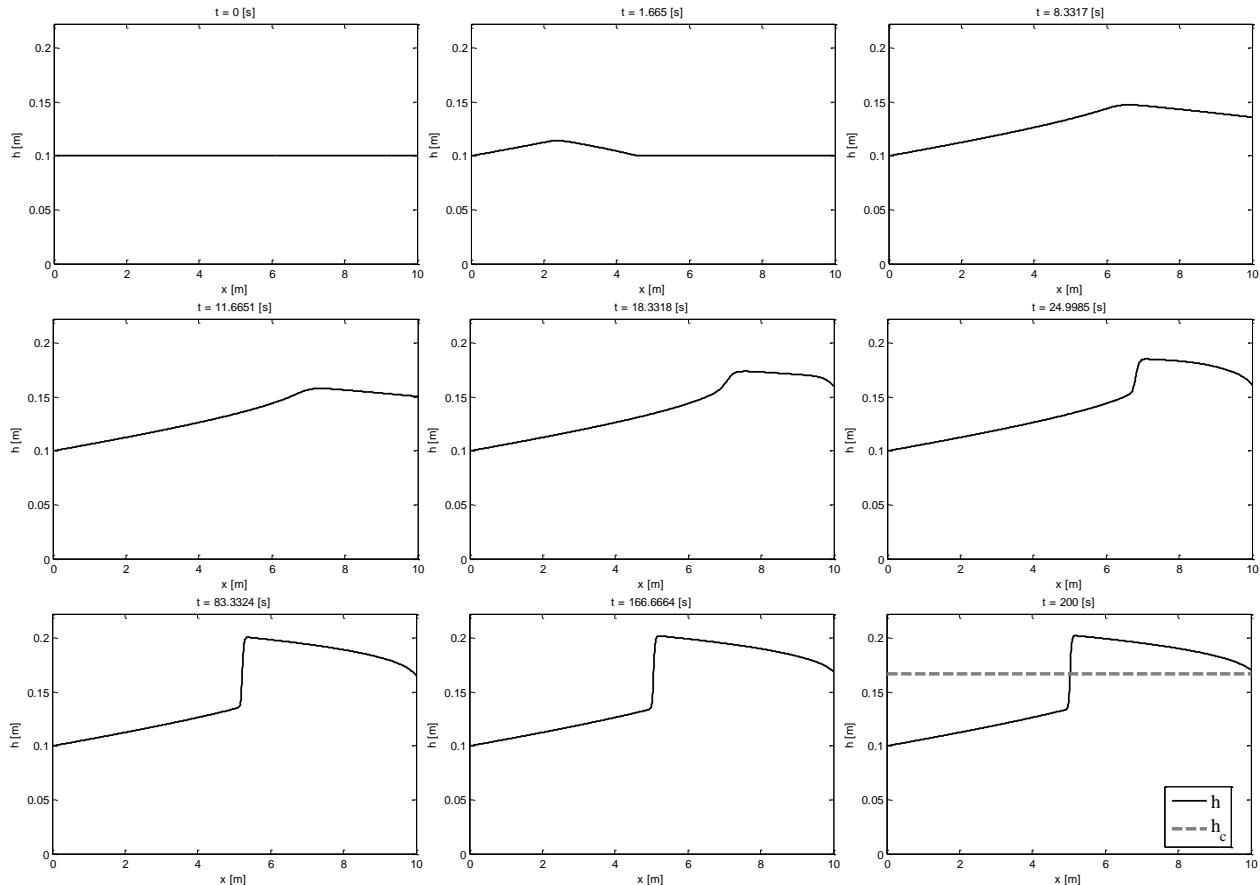


Figura 9 – Ressalto hidráulico calculado com o método de Lax-Friedrichs.  
Dados:  $\Delta x = 0,0056$  m,  $\Delta t = 0,0017$  s, CFL = 0,96,  $h_c = 0,1667$  m (altura crítica).

## CONCLUSÕES

O propósito deste artigo foi apresentar e discutir problemas hiperbólicos relacionados à hidráulica e mecânica dos fluidos. Foram apresentadas as equações de Saint-Venant escritas na forma conservativa, assim como aspectos sobre a aplicação destas equações a geometrias trapezoidais, retangulares e triangulares, incluindo a determinação dos autovalores da matriz Jacobiana do vetor fluxo. Também foi apresentada a equação diferencial ordinária de conservação de massa que normalmente é utilizada em projetos de bacias de detenção.

Os códigos escritos para este trabalho resolvem o sistema de EDPs com os métodos de Lax-Friedrichs e MacCormack. Adotou-se a seguinte divisão para os problemas estudados: 1) Problemas com soluções suaves e 2) Problemas com soluções descontínuas. O primeiro problema, relativo à

propagação de uma onda de cheia em um canal, foi resolvido tendo sido obtidos resultados fisicamente consistentes, como a atenuação dos picos das variáveis ao longo do canal e a formação de uma relação não biunívoca entre vazão e profundidade. No mesmo problema foi testado um hidrograma afluente com três máximos, tendo sido obtidos os três laços esperados. Os resultados calculados com os métodos de Lax-Friedrichs e MacCormack apresentaram desvios inferiores a 0,20%. O Problema 2 incluiu a EDO 25, resolvida com o método de Runge-Kutta de quinta ordem. Ao comparar os resultados com aqueles obtidos com o sistema hiperbólico, concluiu-se que os valores característicos (profundidade máxima, vazão efluente máxima, etc.) são próximos. As diferenças observadas entre as profundidades em três posições ao longo da bacia são consistentes, pois correspondem à propagação da onda em seu interior. Ainda sobre esta aplicação, a comparação entre os métodos de primeira e segunda ordens indicou desvios relativos inferiores a 1%.

O Problema 3 faz parte do grupo com soluções descontínuas. Simulou-se a ruptura instantânea de uma barragem de grandes dimensões em um canal trapeziforme. A estrutura obtida para a solução é a esperada, prevista analiticamente para um canal retangular. O desvio máximo obtido com ambos os esquemas numéricos ocorreu na posição da descontinuidade. O Problema 4, também pertencente ao grupo com soluções descontínuas, ilustrou a formação “natural” de um ressalto hidráulico em um canal triangular, ou seja, a formação sem a imposição de uma profundidade subcrítica a jusante, mas sim por meio da ocorrência da descontinuidade a partir de um perfil H3. Com o código proposto para este problema foi possível demonstrar a imposição adequada das condições de contorno em função dos sinais dos autovalores calculados nos contornos. Observou-se a formação de curvas H3 e H2 antes e depois da descontinuidade, como previsto pela EDO deduzida a partir das equações de Saint-Venant para o regime permanente.

## AGRADECIMENTOS

Ao CNPq(141078/2009-0), CAPES e FAPESP.

## BIBLIOGRAFIA

ANDERSON-JR., J.D. (1995). *Computational fluid dynamics: the basics with applications*. McGraw-Hill.

BARRÉ DE SAINT-VENANT, A.J.C. (1871). Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues de rivières et à l'introduction des marées dans leur lit. Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences: Paris, France. Séance 17 July, 73, 147-154 (in French).

BIRD, R.B.; STEWART, W.E.; LIGHTFOOT, E.N. (2006). *Transport phenomena*. John Wiley & Sons, Inc., 2nd ed., 905 pp.

BUTCHER, J.C. (1964). On Runge-Kutta methods of high order. *J.Austral. Math. Soc.* 4, p.179-194.

BUTCHER, J.C. (2003). *Numerical methods for ordinary differential equations*. John Wiley e Sons, 482 p.

CANHOLI, A.P. (1995). Soluções estruturais não convencionais em drenagem urbana, São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 185p. Tese de Doutoramento. Departamento de engenharia Hidráulica.

CHAPRA, S.C.; CANALE, R.P. (2006). *Numerical methods for engineers*. McGraw-Hill, 5<sup>th</sup> ed., 926 p.

CHAUDHRY, M.H. (1979). *Applied hydraulic transient*. Litton Educational Publishing, Inc., 503 p., 1979.

CHAUDHRY, M.H. (2008). *Open-Channel flow*. 2<sup>th</sup> ed., Springer, 523 p.

CHOW, V.T. (1959). *Open-channel hydraulics*. Reprint of the 1959 Edition, McGraw Hill Book Company, Inc. The Blackburn Press, Caldwell, New Jersey, 2009, 680 p.

COURANT, R.; FRIEDRICHS, K.; LEWY, H. (1967). On the partial difference equations of mathematical physics. IBM Journal, pp. 215–234, English translation of the 1928 German original.

FREAD, D.L. (1977). The development and testing of a dam-break flood forecasting model. In: Proceedings, Dam-Break Flood Modeling Workshop, U.S. Water Resour. Counc., Washington, D.C., p.164-197.

LAX, P.D. (1954). Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. *Comm. Pure Appl. Math.*, 7, 159–193.

LEVEQUE, R.J. (2002). *Finite volume methods for hyperbolic problems*. Cambridge Texts.

MACCORMACK, R.W. (1969). The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering. AIAA paper 69-354.

PORTE, R.M. (2002). Metodologia de cálculo para procedimentos preliminares em bacias de detenção. São Carlos. 81 p. Tese de Livre Docência – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

PORTE, R.M. (2006). *Hidráulica básica*. EESC/USP, 540 p.

STOKER, J.J. (1956). *Water waves: the mathematical theory with applications*. Interscience Publishers, New York.

UEMURA, S. (2009). Instrumentos de avaliação e gestão de impactos gerados por rupturas de barragens. Dissertação (Mestrado), Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

VISCHER, D.L.; HAGER, W.H. (1998). *Dam hydraulics*. Wiley Series in Water Resources Engineering, 316 p.