

Investigação Sobre as Propriedades da Relação Entre Volumes Raros e Extremos de Precipitação e de Cheia, sob Certas Condições Distributivas

Mauro Naghettini

Universidade Federal de Minas Gerais

naghet@netuno.lcc.ufmg.br

Nebai Tavares Gontijo

Empresa de Transportes e Trânsito de Belo Horizonte

nebai@pbh.gov.br

Maria Manuela Portela

Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa

mps@civil.ist.utl.pt

Recebido: 06/05/11 - revisado: 29/08/11 - aceito: 19/04/12

RESUMO

A constatação de que os dados pluviométricos são geralmente mais abundantes e mais facilmente regionalizáveis do que os pluviométricos tem motivado os hidrólogos a conceberem métodos que buscam incluir a informação hidrometeorológica na análise de frequência de cheias. Alguns desses métodos, particularmente aqueles derivados do método francês GRADEX, envolvem premissas relativas à relação entre volumes de chuvas e de cheias extremas, sob certas restrições distributivas. De modo particular, para distribuições de probabilidade de alturas de chuva com cauda superior exponencial, é possível deduzir a forma e a escala da correspondente distribuição dos volumes de cheias, a partir de certas hipóteses sobre as propriedades básicas da relação de dependência entre essas variáveis, sob condições raras e/ou extremas. Este artigo enfoca um modelo matemático paramétrico da relação entre os volumes de chuvas e de cheias raras e/ou extremas, sob a premissa de caudas superiores exponenciais. O modelo foi objeto de análise e em seguida ajustado a eventos hipotéticos raros e extremos obtidos por simulação hidrológica de longas séries sintéticas de chuva e evaporação para a bacia do rio Indaiá, localizada no estado de Minas Gerais. O artigo também contém uma análise de sensibilidade dos parâmetros do modelo, em busca de uma melhor compreensão dos eventos de cheia sob condições raras e extremas. Tendo como base eventos hipotéticos, porém plausíveis, a estratégia de modelagem mostrou-se adequada, flexível e produziu resultados interessantes, os quais permitiram obter elementos para extrair conclusões a respeito das posições relativas das caudas superiores das distribuições de probabilidades de volumes de chuvas e de cheias.

Palavras-chave: Eventos hidrológicos extremos. Análise de frequência de cheias. Relação entre volumes de precipitações e de enchentes.

INTRODUÇÃO

O fato das séries de registros de precipitação serem geralmente mais longas, mais numerosas e mais facilmente regionalizáveis do que as de vazão, tem motivado o desenvolvimento de métodos para incorporar a informação hidrometeorológica na análise de frequência de cheias. De modo particular, os métodos descritos por Guillot e Duband (1967), Naghettini et al. (1996) e Fernandes e Naghettini (2008) envolvem certas premissas sobre a relação entre volumes de precipitação e de escoamento sob

condições extremas, que são essenciais à transferência da informação hidrometeorológica para as curvas de frequência de cheias. Os argumentos lógicos, comuns aos métodos mencionados, pressupõem a restrição de que a distribuição de probabilidades dos volumes de precipitação, para uma dada duração, apresente, mesmo que de modo assintótico, uma cauda superior do tipo exponencial, e foram introduzidos por Guillot e Duband (1967), como parte do chamado método GRADEX ("gradiente de valores extremos") para análise de frequência de cheias.

Os objetivos deste artigo são: (a) apresentar uma revisão sobre os fundamentos e os argumentos mais importantes dos métodos do tipo GRADEX; (b) descrever um modelo matemático para a relação entre volumes extremos de precipitação e de cheia (às vezes aqui referido também como o volume ou a lâmina de escoamento) sob a restrição distributiva comum aos métodos do tipo GRADEX; (c) ajustá-lo a um conjunto numeroso de eventos extremos hipotéticos em uma bacia hidrográfica, obtidos por meio de simulação hidrológica contínua de longas séries sintéticas de precipitação e evaporação diárias; (d) realizar uma análise de sensibilidade dos parâmetros do modelo matemático da variação conjunta de volumes extremos de precipitação e escoamento, além de discutir os resultados obtidos; e (e) extrair conclusões quanto às propriedades fundamentais do referido modelo, sob as condições particulares deste estudo.

Este artigo está organizado em seis seções adicionais a esta introdução. A primeira delas aborda os principais fundamentos e argumentos dos métodos do tipo GRADEX, com a devida formalização matemática necessária para o desenvolvimento das seções seguintes. Apresenta-se, em seguida, a formulação propriamente dita do modelo matemático entre volumes extremos de precipitação e escoamento, ambos calculados para uma mesma duração, aqui pré-especificada como a média dos tempos de base de hidrogramas observados. Na seção seguinte, faz-se a descrição do experimento de simulação hidrológica contínua de longas séries sintéticas de precipitação diária na bacia do rio Indaiá, localizada no estado de Minas Gerais, seguida do ajuste e aplicação do modelo matemático entre volumes extremos de precipitação e de escoamento de duração especificada. Em seguida, faz-se uma análise de sensibilidade dos parâmetros do modelo matemático, sucedida pela discussão dos resultados obtidos. A seção final apresenta as principais conclusões desta investigação.

Fundamentos do método gradex

O método GRADEX - "GRADiente de valores EXTremos" – foi desenvolvido por engenheiros da companhia francesa de energia "Electricité de France" e foi primeiramente descrito por Guillot e Duband (1967). O objetivo central do método é o de utilizar os dados pluviométricos locais ou regionais para extrapolar a distribuição de frequências dos volumes de cheia, calculados para uma duração pré-especificada, tendo como base duas premissas fundamentais. A primeira refere-se ao comporta-

mento da relação entre os volumes de chuva e de cheia (ou de escoamento, ou ainda de escoamento total, incluindo as componentes superficial, sub-superficial e subterrânea), ambos tomados em uma mesma duração, igual ao tempo de base médio dos hidrogramas observados, à medida que a retenção de umidade na bacia atinge níveis próximos à saturação. Sob tais condições, admite-se que qualquer incremento no volume de precipitação tende a produzir igual incremento no volume de escoamento. A segunda premissa diz respeito à cauda superior da distribuição de volumes de precipitação P , de duração especificada como o tempo de base médio dos hidrogramas observados, que se supõe ser uma função exponencial decrescente dada pela equação (1).

$$1 - F(p) = \exp\left(-\frac{p - K}{a}\right) \quad (1)$$

na qual, as constantes positivas K e a denotam os parâmetros de posição e escala, respectivamente. Esses parâmetros podem ser, por exemplo, os que definem uma distribuição de probabilidades com cauda superior do tipo exponencial, tais como ajustados a uma amostra de volumes de chuva máximos anuais, de duração especificada. A combinação dessas duas premissas faz com que a cauda superior da distribuição dos volumes de cheia, ou volumes de escoamento total de duração igual ao tempo de base médio dos hidrogramas observados, também seja do tipo exponencial, com o mesmo parâmetro de escala a (o parâmetro GRADEX) ajustado para a cauda superior dos volumes de precipitação. Os parágrafos que se seguem apresentam os detalhes e as provas matemáticas das principais asserções enunciadas.

Denote-se por p_i o volume de precipitação máxima anual em mm, acumulado durante uma certa duração d , sobre uma dada bacia, associada a um i -ésimo evento extraído do conjunto de registros pluviométricos. A duração d deve ser um número inteiro de dias (ou de horas) suficientemente longo para permitir a individualização dos episódios chuva-vazão, cujos volumes guardam dependência entre si. Embora outras especificações sejam possíveis, a duração d foi aqui fixada como o tempo de base médio estimado a partir de hidrogramas observados na bacia em estudo. Suponha-se que x_i represente o volume de cheia (ou de escoamento), acumulado durante a mesma duração d , decorrente do evento p_i . Note-se que, embora a duração d seja idêntica para p_i e x_i , não há forçosamente a completa coincidência temporal para o cálculo de ambos os volumes, uma vez que há que se admitir a defasagem

entre os episódios de estímulo e resposta da bacia em estudo. Suponha-se ainda que os pares (p_i, x_i) sejam expressos nas mesmas unidades, por exemplo, mm ou $(m^3/s) \cdot dia$. Sob tais condições, a variável R , cuja i -ésima ocorrência é dada por $r_i = (p_i - x_i)$, representa o volume que resta para a saturação completa da bacia ou, em termos mais concisos, o ‘déficit de saturação’ (ou de escoamento). A Figura 1 apresenta um gráfico esquemático entre realizações hipotéticas das variáveis X e P ; os pares (p_i, x_i) localizam-se todos abaixo da linha bissetriz $x=p$, com a eventual exceção de alguns eventos associados ao escoamento resultante da fusão de neve acumulada, quando pertinente.

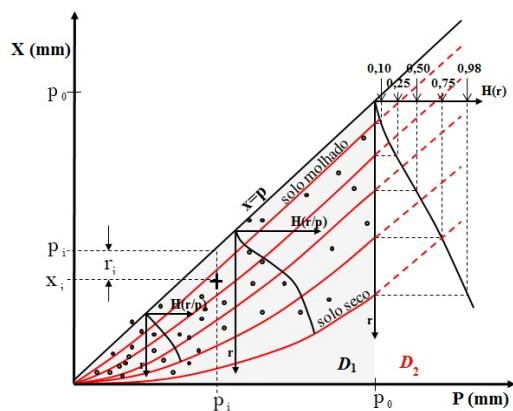


Figura 1 – Esquema da relação hipotética entre volumes de precipitação (P) e de escoamento total (X), sob as premissas do método GRADEX.

Os valores de R são dependentes de muitos fatores que se inter-relacionam, tais como as condições antecedentes de umidade do solo, o armazenamento de água sub-superficial e a distribuição espaço-temporal da precipitação sobre a bacia. Sob a ótica do método GRADEX, R é considerada uma variável aleatória com uma função de distribuição de probabilidades, condicionadas a P , e caracterizada na Figura 1 por curvas de quantis hipotéticas. A primeira premissa do método GRADEX estabelece que as curvas que associam os volumes de cheia aos de precipitação tenderão a ser assintoticamente paralelas à bissetriz $x=p$, à medida que o volume de precipitação, ao longo da duração d , se aproxime de um valor suficientemente grande que supere as capacidades máximas de absorção e de armazenamento de água, existentes naquele instante, na bacia em estudo. A posição relativa de cada assíntota depende das condições iniciais prevalentes na bacia.

Assim, a depender do valor da variável R , as curvas tornar-se-ão paralelas a $x=p$ tanto mais rapidamente quanto mais próximas da saturação forem aquelas condições. Desse modo, a função de probabilidades acumuladas de R , condicionadas a P , tenderá a ter forma e variância quase invariantes e, portanto, uma dependência cada vez menor da precipitação, para valores de P que se avizinharem ou superarem um limiar suficientemente elevado p_0 .

Na Figura 1, o plano definido pelos pontos (p_i, x_i) pode ser separado em dois domínios:

- D_1 , definido pelos pontos $p < p_0$ e $x \leq p$, no qual a distribuição de probabilidades de R é condicionada a P ; e
- D_2 , região do plano, definida pelos pontos $p \geq p_0$ e $x \leq p$, onde todas as curvas que associam X e P são paralelas à bissetriz $x=p$.

Suponha-se que $f(p)$, $g(x)$ e $h(r)$ representem as funções densidades de probabilidades de P , X e R , respectivamente. A densidade de X pode ser escrita como

$$g(x) = \int_0^{\infty} f(x+r)h_{R|X+R}(r)dr \quad (2)$$

na qual $h_{R|X+R}(r)$ denota a função densidade de probabilidade de R condicionada à precipitação P , expressa como $P=(X+R)$, de modo que a integração da função conjunta $f(x+r)h_{R|X+R}$, ao longo de todo o domínio de R , resulte na densidade marginal $g(x)$. No domínio D_2 , uma vez admitida como verdadeira a hipótese de que a distribuição de R não mais depende de P , a densidade condicional $h_{R|X+R}(r)$ torna-se a distribuição marginal $h(r)$ e a equação (2) pode ser reescrita como

$$g(x) = \int_0^{\infty} f(x+r)h(r)dr \quad (3)$$

A segunda premissa do método GRADEX refere-se à cauda superior da distribuição de probabilidades acumuladas $F(p)$, a qual se admite tender assintoticamente para uma cauda exponencial, ou seja,

$$1 - F(x+r) \xrightarrow{x+r \rightarrow \infty} \exp\left(-\frac{x+r-K}{a}\right), \quad a > 0 \quad (4)$$

na qual, o parâmetro de posição K é positivo e o parâmetro de escala a é referido como o parâmetro GRADEX da precipitação. Nesses termos, a densidade $f(p)$ torna-se

$$f(x+r) = \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{x+r-K}{a}\right) = f(x) \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \quad (5)$$

para $x+r>p_0$. Substituindo esta expressão na equação (3), segue-se que, no domínio D_2 ,

$$g(x) = f(x) \int_0^D \exp\left(-\frac{r}{a}\right) h(r) dr \quad (6)$$

O limite superior de integração da equação (6), denotado por D , impõe a realidade de um valor finito para o máximo déficit de saturação. Nessa equação, porque r e a são positivos, a integral definida é uma constante também positiva e inferior a 1. Admitindo-se, por simplicidade matemática, que essa constante possa ser igualada a $\exp(-r_0/a)$, segue-se que, para valores suficientemente elevados x^* ,

$$g(x^*) = f(x^* + r_0) = f(p^*) \quad (7)$$

Portanto, no domínio D_2 , a função densidade de probabilidade $g(x^*)$ pode ser deduzida de $f(p^*)$ por uma simples translação da quantidade r_0 ao longo do eixo de X e P , o que também é válido para as distribuições acumuladas $G(x^*)$ e $F(p^*)$. Em outros termos, pode-se afirmar que a x^* , e também a $p^*=x^*+r_0$, estará associada a mesma probabilidade de excedência ou o mesmo período de retorno. Ainda neste contexto, ressalta-se que, na equação (6), a integral definida representa a esperança matemática de $\exp(-r/a)$, ou seja, $E[\exp(-r/a)]$. Logo, pode-se escrever

$$r_0 = -\text{aln}\left\{E\left[\exp\left(-\frac{r}{a}\right)\right]\right\} \quad (8)$$

Em aplicações práticas do método GRADEX para análise de frequência de cheias, Guillot e Du-band (1967) sugerem utilizar a distribuição empírica dos volumes de cheia máximos anuais observados até o período de retorno entre 10 e 20 anos, para bacias relativamente impermeáveis, e até o período de retorno de 50 anos, para bacias com capacidade de infiltração mais elevada. A partir desse ponto, as distribuições acumuladas dos volumes de cheia e dos

volumes de chuva estarão separadas por uma distância fixa r_0 , medida no eixo de X e P . De modo equivalente, no domínio D_2 , as duas distribuições grafar-se-ão em papel de probabilidade exponencial, ou mesmo em papel de probabilidade de Gumbel, como semi-retas, ambas com inclinação igual ao parâmetro GRADEX, a , dos volumes de chuva e separadas pela distância r_0 , para um mesmo período de retorno.

Um maior aprofundamento acerca da distância de translação r_0 não prescinde da especificação da distribuição de probabilidades de R . Por ser muito flexível quanto à forma e por ser capaz de sintetizar o comportamento probabilístico de variáveis aleatórias não negativas e assimétricas, a distribuição Gama apresenta-se como uma possível candidata ao modelo paramétrico para a distribuição de R . Neste contexto, propõe-se que a função de distribuição de probabilidades acumuladas de R seja expressa por

$$H(r) = \frac{\Gamma_i(r/\theta, k)}{\Gamma(k)}, \quad r \geq 0; k, \theta > 0 \quad (9)$$

com densidade dada por

$$h(r) = \frac{r^{k-1} \exp(-r/\theta)}{\theta^k \Gamma(k)} \quad (10)$$

onde θ e k denotam os parâmetros de escala e forma, respectivamente, Γ_i representa a função Gama incompleta e Γ simboliza a função Gama completa.

Outros modelos probabilísticos potencialmente adequados para a distribuição de R são os de Weibull e Log-Normal, ambos também descritos por dois parâmetros e com características semelhantes às da distribuição Gama. Observe-se, porém, que os três modelos candidatos são ilimitados à direita, o que não se coaduna com a realidade do máximo valor D para o déficit de saturação. Entretanto, para os três modelos candidatos, essa incongruência pode ser facilmente contornada pela especificação de um quantil D suficientemente elevado de modo, por exemplo, que $P(R>D)=0,001$. Tomando-se, como exemplo, a distribuição Gama com parâmetros $k=20$ e $\theta=5\text{mm}$, plausíveis para uma possível amplitude de variação de R , a quantidade D seria igual a 184 mm, tal que $P(R>184)=0,001$, e, portanto, apenas 1,84 vezes o valor esperado $E(r)=100 \text{ mm}$. A simulação de um amplo conjunto de eventos (p_i, x_i) para a bacia do rio Indaiá, a ser descrita em seção específica deste artigo, cria os elementos necessários à dis-

criminação entre os modelos candidatos, quanto aos aspectos de forma e aderência.

Com qualquer das formas distributivas de R, aqui propostas, a equação (8) pode ser re-escrita como

$$r_0 = -\text{aln} \left[\int_0^{\infty} \exp \left(-\frac{r}{a} \right) h(r) dr \right] \approx -a \ln \left[\int_0^D \exp \left(-\frac{r}{a} \right) h(r) dr \right] \quad (11)$$

Portanto, uma vez conhecidos o GRADEX, a, da precipitação e os parâmetros da densidade $h(r)$, qualquer que seja o modelo candidato, a distância de translação r_0 pode ser estimada pela solução da equação (11), fazendo-se a integração numérica até um limite superior suficientemente elevado.

Para se ter uma idéia da magnitude da distância de translação r_0 , faz-se aqui um breve exercício a partir de valores típicos para os parâmetros a, k e θ , supondo-se válida a hipótese de que $h(r)$ seja uma densidade Gama. Supondo fixos os valores $a=10$ mm e $\theta=5$ mm, e fazendo $k=10$, ou $k=15$, ou $k=20$, verifica-se que o valor esperado de R, ou seja $E(R)$, é igual a 50 mm, ou 75 mm, ou 100 mm, respectivamente, ao passo que os valores correspondentes da distância de translação, r_0 , são 40,5 mm, ou 60,8 mm, ou 81,1 mm. Supondo fixos, desta feita, os valores $a=10$ mm e $k=20$ mm, e fazendo $\theta=5$ mm, ou $\theta=7,5$ mm, ou $\theta=10$ mm, verifica-se que $E(R)$ é igual a 100 mm, ou 150 mm, ou 200 mm, respectivamente, e que as correspondentes distâncias de translação são 81,1 mm, ou 111 mm, ou 139 mm. Alterando apenas o parâmetro GRADEX para $a=10$ mm, ou $a=12,5$ mm, ou $a=15$ mm, enquanto $\theta=5$ mm e $k=20$, os valores esperados se mantêm em 100 mm, enquanto as respectivas distâncias de translação passam a ser 81,1 mm, ou 86,3 mm, ou 89,3 mm. Verifica-se assim que a distância de translação, em geral, é inferior ao valor médio do déficit de saturação e compreendida entre os quantis da cauda inferior e do segundo quartil de $H(r)$, a depender de seus parâmetros k e θ . Estes parecem exercer uma influência sobre r_0 mais importante do que as provocadas por variações marginais do parâmetro GRADEX. Maiores detalhes a respeito da variação conjunta de r_0 , a, k e θ serão evidenciados ao final da seção referente à análise de sensibilidade e discussão de resultados, a ser posteriormente apresentada neste artigo.

A validade da equação (7) depende da premissa de que $[1-F(p)]$ converge assintoticamente para uma função decrescente exponencial e não apenas da hipótese de que R e P sejam independentes para $p>p_0$. A prova matemática (CENTRE TECHNIQUE DE GÉNIE RURAL, DES EAUX ET DES FORÊTS, 1972), inicia-se com a igualdade entre as expressões (3) e (7),

$$f(x + r_0) = \int_0^{\infty} f(x + r) h(r) dr \quad (12)$$

Em seguida, denotando $(x+r_0)$ por τ , substituindo-o na equação (12) e rearranjando-a, segue-se que

$$\int_0^{\infty} \frac{f(\tau + r - r_0)}{f(\tau)} h(r) dr = 1 \quad (13)$$

Diferenciando o integrando em relação a τ ,

$$\int_0^{\infty} \frac{d}{d\tau} \left[\frac{f(\tau + r - r_0)}{f(\tau)} \right] h(r) dr = 0 \quad (14)$$

Para que a equação (14) seja satisfeita, é necessário que o quociente $f(\tau+r-r_0)/f(\tau)$ seja constante em relação a τ . As únicas funções que possuem essa propriedade são aquelas da forma $A \exp(B\tau)$, onde A e B são constantes. Em decorrência, f e g devem ser funções exponenciais da forma enunciada. Entre as funções de distribuição de probabilidades que exibem caudas superiores exponenciais ou assintoticamente exponenciais estão a Normal, a Gama e a de Gumbel, além, evidentemente, da própria distribuição exponencial.

Modelo para a relação entre volumes extremos de precipitação e de cheia, com distribuições de cauda superior exponencial

A relação entre volumes de precipitação e de cheias é aqui modelada pela função paramétrica proposta por Guillot (1993), dada por

$$X = P - R \left[(1-w) \tanh \left(\frac{P}{R} \right) + w \tanh \left(\frac{P}{D} \right) \right], \quad 0 \leq w \leq 0,4 \quad (15)$$

na qual, D é o máximo déficit de saturação, como anteriormente definido no contexto da equação (6), e w é um parâmetro positivo de ponderação dos

termos entre colchetes, tomado, em geral, como inferior a 0,4. Os termos entre colchetes referem-se às razões ponderadas entre os volumes de chuva e os estados atual e potencial do déficit de saturação, tais como modificados pela tangente hiperbólica para garantir coerência matemática à medida que R oscila entre zero e D .

No contexto da equação (15), os valores de R são extraídos da distribuição $H(r)$, a qual, rigorosamente, no domínio D_1 é condicionada a P . Entretanto, tal rigor não seria possível mesmo em se tratando de um conjunto hipotético de pares simulados (p_i, x_i) e, portanto, não serviria aos propósitos deste artigo de explorar as relações entre as variáveis P e X , sob condições extremas. Assim, em termos práticos, admite-se aqui que a distribuição $H(r)$ possa ser considerada como única, de variância constante e independente de P , ao longo de todo o domínio de variação de R . Sob tal premissa, a forma do modelo expresso pela equação (15) é aquela já ilustrada no gráfico esquemático da Figura 1.

Se a solução da equação (15), em P , for designada por $p(x, r)$, então, a expressão da distribuição de probabilidades dos volumes de cheia pode ser escrita como

$$G(x) = \int_{H=0}^{H=1} F[p(x, r)] dH \quad (16)$$

Conforme menção anterior, para elevados períodos de retorno T e sob as premissas distributivas já enunciadas, a função de quantis $G^{-1}(T)$, dos volumes de cheia, grafa-se em papel de probabilidade exponencial como uma reta paralela à função $F^{-1}(T)$ dos volumes de chuva, separadas no eixo das ordenadas pela distância de translação r_0 . A Figura 2 apresenta um exemplo hipotético de como os parâmetros da distribuição $H(r)$, admitida como Gamma(k, θ), podem afetar as posições relativas de $G^{-1}(T)$ e $F^{-1}(T)$: a distância de translação r_0 aumenta com valores crescentes de k e θ . Por outro lado, como exemplificado na Figura 3, o parâmetro w , de ponderação dos termos entre colchetes da equação (15), controla o tempo de retorno além do qual $G^{-1}(T)$ e $F^{-1}(T)$ tornam-se paralelas: baixos valores de w resultam em paralelismo a partir de baixos tempos de retorno e vice-versa. Descreve-se a seguir uma aplicação do modelo dado pela equação (15) à bacia do rio Indaiá em Porto Indaiá, localizada no estado de Minas Gerais.

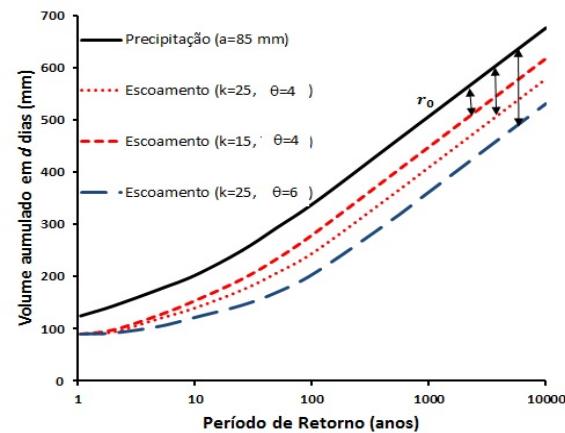


Figura 2 – Exemplo hipotético ilustrando a influência dos parâmetros de $H(r)$ sobre as posições relativas das funções de quantis de volumes de precipitação e de cheias.

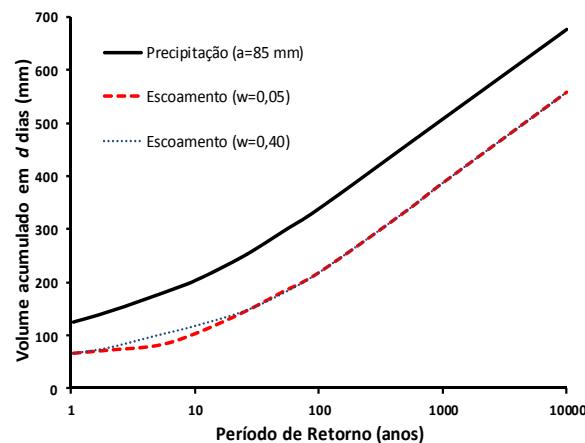


Figura 3 – Exemplo hipotético ilustrando a influência do parâmetro w sobre as posições relativas das funções de quantis de volumes de precipitação e de cheias.

Relação entre volumes de chuva e de cheia para o rio Indaiá

A bacia do rio Indaiá localiza-se inteiramente no estado de Minas Gerais, entre as coordenadas geográficas aproximadas de $18^{\circ}25'$ e $19^{\circ}50'$ de latitude sul e $45^{\circ}30'$ e $46^{\circ}10'$ de longitude oeste. Tributário pela margem esquerda do rio São Francisco, o rio Indaiá nasce no município de Córrego Danta, à altitude de 1.170 metros, mantém a direção sudoeste-nordeste ao longo de seu curso total de 226 km, até desaguar no reservatório de Três Marias, a uma altitude de 568 metros, conforme ilustrado pela Figura 4. A estação fluviométrica aqui utilizada foi a

de Porto Indaiá (40963000), operada pela Companhia Energética de Minas Gerais (CEMIG), com coordenadas 18°40' de latitude sul e 45°34' de longitude oeste, e área de drenagem de 2.260 km². Foram empregadas no presente estudo as vazões naturais médias diárias observadas em Porto Indaiá, durante o período de abril de 1977 a abril de 2004, correspondente, portanto, a 28 anos de registros contínuos.

As alturas médias de precipitação sobre a bacia foram calculadas a partir das estações pluviométricas de Fazenda São Félix (1845002), Lagoa do Gouveia (1845004), Tiros (1845014), Barra do Funchal (1945002), Matutina (1945013), Abaeté (1945035), Tapiraí (1946000) e São Gotardo (1946009), por meio dos polígonos de Thiessen; os coeficientes de ponderação para as estações foram 0,028, 0,238, 0,094, 0,153, 0,128, 0,275, 0,073 e 0,012 respectivamente. A evapotranspiração potencial diária da bacia do rio Indaiá foi estimada a partir de correção, por meio de fator constante e igual a 0,75, dos dados de tanque evaporimétrico classe A da estação de Porto Pará (1945017), localizada em região próxima à bacia.

A caracterização do hidrograma-histograma típico foi realizada a partir do estudo de 20 ocorrências observadas na bacia do rio Indaiá em Porto Indaiá, as quais conduziram ao tempo de base médio de 8 dias, com tempo de pico estimado em 2 dias e tempo de recessão em 6 dias. Assim, o volume total de cheia foi obtido pela soma das vazões dos dois dias anteriores à ocorrência da vazão diária máxima e dos seis dias posteriores, sendo em seguida transformada em desflúvio ou lâmina de escoamento sobre a área de 2.260 km². Por sua vez, o volume de precipitação associado a uma certa cheia foi estimado pela soma das alturas diárias de precipitação média na bacia correspondentes aos 6 dias que antecederam a vazão diária máxima e aos 2 dias que a sucederam, incluindo eventuais dias não chuvosos. A individualização dos eventos conforme descrita reflete o comportamento médio aproximado dos 20 eventos de referência, não obstante a parcela de subjetividade que está sempre presente em simplificações dessa natureza.

Com o fim de extrapolar a relação entre os volumes de precipitação e de cheia, ambos de duração igual a 8 dias, para além das pouco numerosas ocorrências extraídas das séries flúvio-pluviométricas da bacia do rio Indaiá, fez-se necessário conceber um esquema de geração de longas séries sintéticas de precipitação, evaporação e vazão média, em intervalos diárias, conforme ilustrado no fluxograma da Figura 5. Note-se, nesta figura, que a série sintéti-

ca de evapotranspiração potencial diária foi obtida por correção da série sintética de alturas evaporimétricas diárias, por meio de um fator constante e igual a 0,75, em conformidade a idêntica operação anteriormente realizada para os dados observados. Esse esquema de geração de séries sintéticas para a bacia do rio Indaiá foi implementado por Gontijo (2007), no âmbito de uma dissertação de mestrado cujo tema central era o estudo das relações de frequência entre chuvas e cheias. No quadro do presente estudo, as séries de precipitação e evaporação diária foram produtos de simulação estocástica e empregadas como insumos a um modelo conceitual de simulação chuva-vazão, com parâmetros já calibrados, de modo a produzir uma longa série contínua de vazões médias diárias, plausíveis do ponto de vista hidrológico. Descrevem-se a seguir os métodos empregados em cada etapa do esquema de geração de séries sintéticas delineado na Figura 5.

O modelo usado para a geração estocástica da série sintética de alturas diárias de precipitação foi o proposto por Boughton e Hill (1997), com modificações introduzidas por Lima (2004), cuja base é uma cadeia de Markov de primeira ordem, com um número variável de estados definidos por valores limiares de altura diária de chuva incluindo o estado ‘não chuvoso’. As probabilidades de mudança de um estado a outro são dadas por 12 matrizes de probabilidades de transição, correspondentes aos 12 meses do ano. O último estado de cada matriz é definido inferiormente por um limiar suficientemente alto e, superiormente, pelo infinito. Nesse último estado, grosso modo correspondente à cauda superior da distribuição de probabilidades das alturas diárias máximas de precipitação, foram empregadas as distribuições generalizadas de Pareto e Gama de dois parâmetros. A modelação probabilística das precipitações do último estado por essas duas distribuições resultou de modificação introduzida por Lima (2004) à formulação original de Boughton e Hill (1997). Ao leitor interessado em detalhes da geração estocástica de séries sintéticas de precipitação diária, sugere-se a consulta a Boughton e Hill (1997) e Lima (2004).

O modelo estocástico de chuvas teve suas principais características calibradas, incluindo o número de estados das cadeias de Markov, suas respectivas frequências e os parâmetros das distribuições Gama e Pareto, a partir da série de alturas médias de precipitação sobre a bacia do rio Indaiá, obtida pela ponderação dos registros observados nos diferentes postos pluviométricos, entre os anos civis de 1975 a 2002. Em seguida à calibração, o modelo foi empregado para gerar uma série contínua de

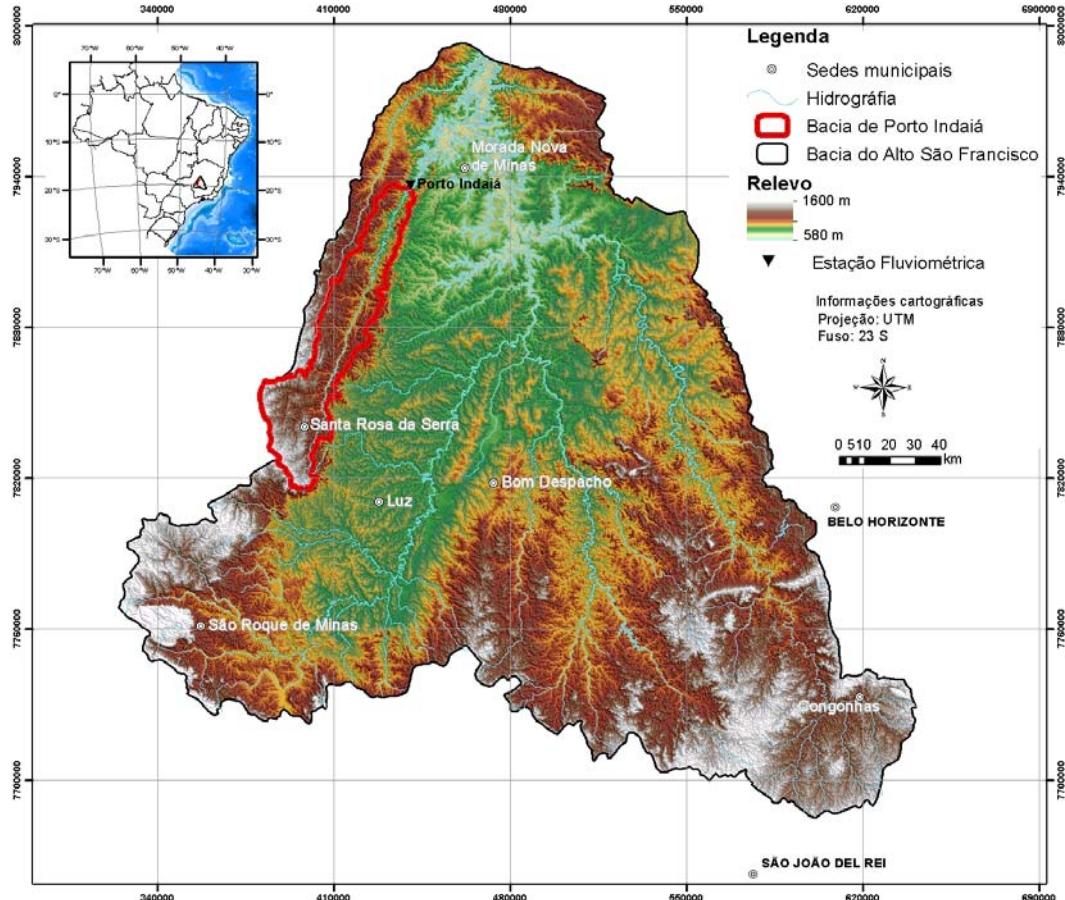


Figura 4 – Localização, hidrografia e relevo da bacia do rio São Francisco a montante da barragem de Três Marias, com destaque para a sub-bacia do rio Indaiá. Os pontos e textos em cor branca identificam os principais municípios da região.

10.000 anos de alturas diárias de precipitação sobre a bacia do rio Indaiá. A Tabela 1 apresenta um sumário das principais estatísticas descritivas das séries sintética e observada. De modo geral, vê-se que o modelo foi capaz de reproduzir as características essenciais da série observada, ao mesmo tempo em que permitiu a geração de eventos máximos muito superiores aos máximos observados, consistentemente com a proposta de estudo de cheias raras, aqui descrita.

No esquema de simulação de séries de vazões diárias a partir de séries longas de precipitação, a evapotranspiração potencial diária foi estimada a partir de correção da evaporação de superfície líquida, por um fator constante, conforme menção

anterior. A série sintética de 10.000 alturas diárias de evaporação foi gerada por meio de um modelo autoregressivo de primeira ordem, condicionado aos estados ‘chuvisco’ ou ‘não chuvoso’, com sazonabilidade mensal e agregação de valores nos intervalos mensal e anual, de modo a preservar as estatísticas observadas correspondentes, nomeadamente os momentos de primeira e segunda ordem, de acordo com a proposta original de Srikanthan e Zhou (2003). Esse modelo de geração estocástica de evaporação diária está contido no software Stochastic Climate Library, versão 2.0b (SCL), elaborado por Catchment Modeling Toolkit, e disponível mediante acesso à URL (www.toolkit.net.au/cgi-bin/WebObjects/toolkit). O modelo foi calibrado

para os dados de tanque evaporimétrico, disponíveis na estação de Porto Pará. A comparação das estatísticas descritivas das séries observada e simulada revelou um ótimo ajuste, com preservação dos momentos de primeira e segunda ordem, tanto em intervalo mensal como anual. Ao leitor interessado em detalhes da geração estocástica de variáveis climáticas, sugere-se consultar Srikanthan e Zhou (2003).

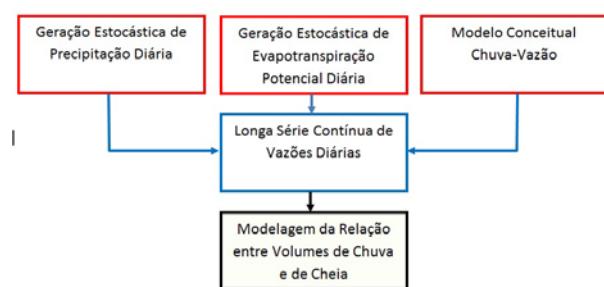


Figura 5 - Esquema das simulações estocástica e determinística para geração de uma longa série continua de vazões médias diárias para o rio Indaiá em Porto Indaiá.

Tabela 1 - Estatísticas descritivas das séries sintética e observada de chuvas diárias (Indaiá)

Mês	Precipitação		Precipitação		
	Histórica (mm)	Simulada (mm)	Mês	Histórica (mm)	Simulada (mm)
Janeiro	360	351	Julho	10	10
Fevereiro	199	200	Agosto	19	20
Marco	216	214	Setembro	63	64
Abri	97	97	Outubro	152	150
Maio	45	47	Novembro	240	239
Junho	25	26	Dezembro	319	314
Média anual (mm)		1.532	1.521		
Desvio-padrão anual (mm)		212,2	204,9		
Máxima diária (mm)		108	249		

Na etapa de simulação determinística chuva-vazão, empregou-se, aqui, o modelo hidrológico “Rio Grande”, cujas concepção e formulação encontram-se descritas em Queiroga et al. (2005). Trata-se de um modelo do tipo chuva-vazão determinístico, conceitual, semi-distribuído e contínuo, com passo de tempo diário. Para os objetivos do presente trabalho, foi empregada a versão concentrada RGa do modelo “Rio Grande”, a qual está disponível em www.ehr.ufmg.br/downloads.php. Esta versão do modelo compõe-se dos módulos de produção e de concentração. O módulo de produção refere à formação do deflúvio específico na bacia, a partir da chuva bruta, levando em conta a umidade armazenada no solo e as perdas por infiltração e evapo-

transpiração ocorridas no intervalo da simulação, e baseia-se integralmente na formulação do balanço de umidade do modelo chinês Xinanjiang, introduzido por Zhao et al. (1980). Uma vez calculados os deflúvios específicos ao longo dos intervalos de simulação, faz-se a concentração destes no exutório da bacia por meio de função de transferência, cuja base é o conhecido hidrograma unitário sintético de Clark. Sugere-se ao leitor a consulta dos trabalhos citados, em busca de maiores detalhes sobre a estrutura do modelo “Rio Grande”.

Os parâmetros do modelo “Rio Grande” foram calibrados para a bacia do rio Indaiá em Porto Indaiá, considerando o período de disponibilidade dos dados pluvio-flúvio-evaporimétricos de 01/10/1978 a 30/09/1984. Para esse período, o coeficiente de Nash-Sutcliffe foi de 0,7484, o erro percentual entre os volumes simulados e observados foi de -1,112, a diferença relativa média entre as descargas simuladas e observadas foi de 0,23, enquanto as vazões médias simulada e observada foram, respectivamente, iguais a 53,93 e 54,53 m³/s. A análise de resíduos, ao longo do período de calibração e da amplitude das descargas, demonstrou a inexistência de viés de simulação, e que as vazões máximas observadas e os períodos de recessão dos hidrogramas foram corretamente simulados, com satisfatória reprodução da cronologia dos eventos. Para as fases subsequentes desta pesquisa, é forçoso admitir que os parâmetros assim calibrados não variem no tempo, em decorrência de eventuais alterações climáticas ou de uso do solo na bacia.

Nesse quadro, as séries sintéticas pluvio-evaporimétricas constituiram insumos para o modelo “Rio Grande”, com seus parâmetros já calibrados, para produzirem uma série de 10.000 anos de vazões médias diárias na seção transversal do rio Indaiá em Porto Indaiá, da qual extraíram-se os pares (p_i, x_i), quais sejam, os volumes acumulados em uma duração $d=8$ dias associados à vazão de ponta máxima anual. Doravante, será sempre esta a forma empregada para selecionar os eventos (p_i, x_i) necessários às análises subsequentes. Embora reservas possam ser guardadas em relação à capacidade dos modelos empregados em simular eventos extremos, tendo em conta que tiveram seus parâmetros calibrados para condições não extremas, a qualidade dos resultados de calibração e a estrutura conceitual do modelo “Rio Grande”, com razoável grau de realismo hidrológico, são fatores que permitem apontar a plausibilidade dos eventos hidrológicos simulados.

Com o intuito de analisar as relações entre as alturas de precipitação e os volumes de cheia utilizando a equação (15), fez-se necessário primeiro

averiguar a validade da premissa de que a cauda superior da distribuição dos volumes de precipitação, acumulados em 8 dias, tem decaimento exponencial. Essa averiguação pôde ser feita com o auxílio da função de excedência média condicional (EMC), denotada por $M(u)$, cuja definição, segundo Bryson (1974), é dada por

$$M(u) = E(Y_i - u / Y_i > u) \quad (17)$$

A função EMC pode ser estimada pela média das diferenças entre os máximos anuais de uma variável Y e um valor limiar variável u (*threshold*), desde que o máximo exceda o limiar, para valores crescentes de u . O teorema de Pickands (1975) estabelece três tipos de cauda distributiva superior, ou seja $[1-F_Y(y)]$, de acordo com o comportamento da função EMC. São eles:

- distribuição ilimitada com cauda polinomial, se a função EMC apresentar crescimento aproximadamente linear para valores elevados de u ;
- distribuição ilimitada com cauda superior exponencial, se a função EMC apresentar-se constante para valores elevados de u ;
- distribuição limitada na direção dos máximos, se a função EMC decrescer de modo aproximadamente linear para valores elevados de u .

As Figuras 6-a e 6-b apresentam, respectivamente, as funções EMC para os volumes de precipitação acumulados em 8 dias contíguos e para os volumes de cheia correspondentes, tais como extraídos das séries sintéticas de 10.000 anos de alturas diárias de chuva e vazões diárias simuladas para a bacia do rio Indaiá, do modo descrito em parágrafo anterior. Em ambos os casos, as funções EMC indicam caudas superiores exponenciais. É interessante notar que esse indício não decorre do processo empregado na geração das séries sintéticas, pois o último estado da cadeia de Markov, correspondente às maiores alturas diárias de chuva, foi objeto de modelagem probabilística pela distribuição generalizada de Pareto, com parâmetro de forma negativo e, portanto, com cauda superior polinomial, mais pesada do que a exponencial.

A bacia do rio Indaiá em Porto Indaiá, no contexto apresentado, tem os requisitos necessários à aplicação dos métodos do tipo GRADEX, de modo

geral, e, em particular, do modelo matemático para a relação entre os volumes de precipitação e de cheia, ambos para $d=8$ dias, expresso pela equação (15).

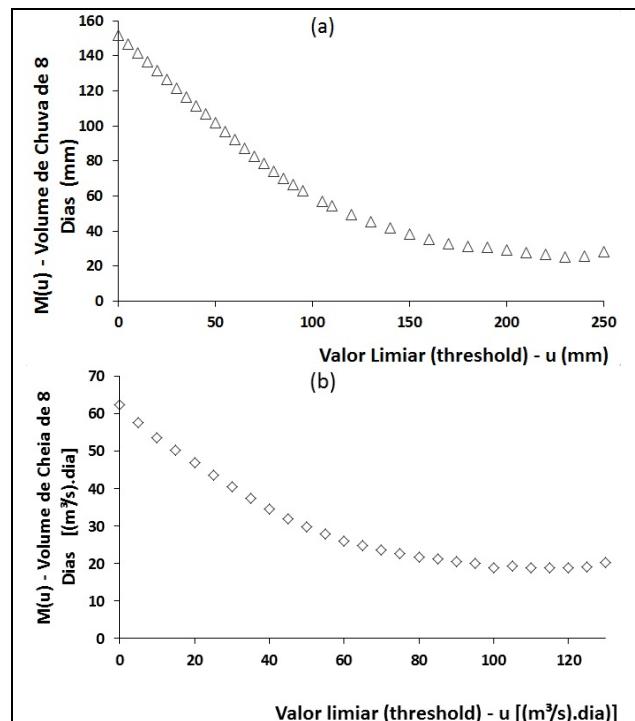


Figura 6 – Rio Indaiá em Porto Indaiá: (a) função EMC estimada para os volumes de precipitação de $d=8$ dias e (b) função EMC estimada para os volumes de cheia de $d=8$ dias.

A Figura 7 ilustra as distribuições de probabilidade empírica dos 10.000 volumes de precipitação e de cheia, ambos de duração 8 dias e expressos em mm, associados à vazão diária máxima anual de cada um dos 10.000 anos das séries sintéticas de alturas diárias de chuva e vazões médias diárias, simuladas para a bacia do rio Indaiá em Porto Indaiá, conforme descrito. Na Figura 7, vê-se que os ramos superiores de ambas as distribuições apresentam-se aproximadamente paralelos e separados por uma distância, constante em torno de 135 mm. O parâmetro de escala da cauda superior da distribuição dos volumes de precipitação, ou seja, o parâmetro GRADEX, foi estimado a partir dos quantis sintéticos em $\hat{a} = 33,22$ mm. É este o quadro que antecede à modelagem da relação entre volumes de precipitação e de cheia, para a bacia do rio Indaiá, por meio da equação (15).

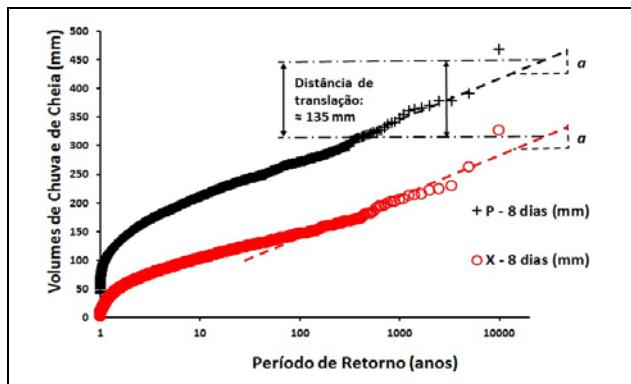


Figura 7 – Distribuições empíricas dos volumes de precipitação e de cheia (escoamento), de duração 8 dias, associados às vazões diárias máximas anuais simuladas para o rio Indaiá.

Os 10.000 valores sintéticos $r_i = (p_i \cdot x_i)$ estão compreendidos entre 14 mm e 269 mm e são crescentes com os volumes de precipitação, conforme ilustra a Figura 8. Vê-se também nessa figura que a variância de R parece aumentar com valores crescentes de P , o que mostra a dependência da distribuição $H(r/p)$ da precipitação. Apesar de constatar essa dependência, não seria factível prescrever distribuições condicionadas $H(r/p)$ ao longo da variação de R , pelo menos dentro dos contornos do esquema de geração de séries sintéticas aqui descrito. Assim, no que se refere à modelagem da relação entre X e P , optou-se pela estratégia de ajustar uma única distribuição incondicional $H(r)$ para toda a amplitude de variação de R , enquanto que, para verificar a distância de translação r_0 , a escolha foi pelo ajuste de uma distribuição de probabilidades apenas para os valores de R associados às precipitações maiores do que 250 mm, de períodos de retorno maiores ou iguais a 50 anos, aqui consideradas como raras ou extremas.

Conforme menção anterior, os modelos Gama, Weibull e Log-Normal, todos de dois parâmetros, foram os candidatos a sintetizar $H(r)$ para todo o domínio de R . Com exceção do segundo, os modelos passaram nos testes de aderência de Anderson-Darling (ANDERSON e DARLING, 1954) a um nível de significância de 5%. Os modelos Gama e Log-Normal apresentaram boa aderência aos 10.000 valores r_i , com alguma vantagem para o primeiro, principalmente em sua cauda inferior. A Figura 9 apresenta o histograma dos valores r_i , sobreposto à densidade Gama de parâmetros de forma $k=17,29$ e de escala $\theta=6,113$ mm, conforme estimados pelo método dos momentos. O valor máximo entre os déficits de saturação extraídos da série sintética, a

saber 269 mm, corresponde, segundo a distribuição Gama ajustada, à probabilidade de não-excedência de 0,9998. Por essa razão, pode-se estimar o parâmetro D , do modelo dado pela equação (15), em $\hat{D} = 269$ mm.

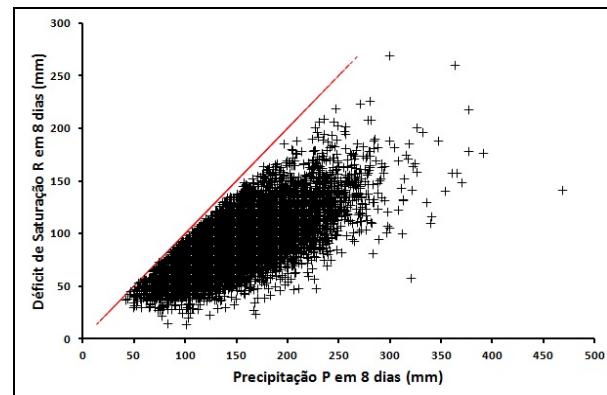


Figura 8 – Rio Indaiá em Porto Indaiá: dispersão dos pares $\{p_i, r_i\}$ extraídos das séries sintéticas e semi-reta $x=$.

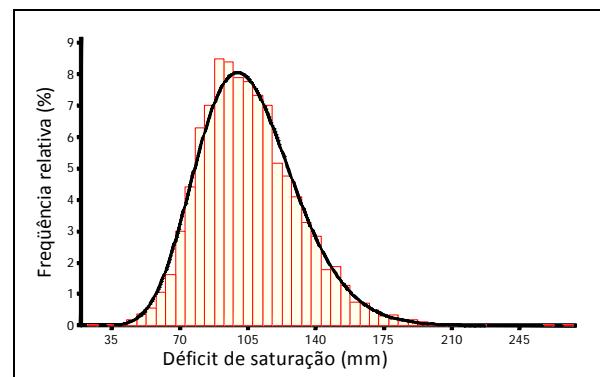


Figura 9 - Rio Indaiá em Porto Indaiá: histograma dos 10.000 r_i extraídos das séries sintéticas e densidade Gama com $k=17,29$ e $\theta=6,113$.

Ainda no contexto do modelo para a relação entre P e X , dado pela equação (15), o parâmetro w controla o ponto de início do paralelismo assintótico entre $F^{-1}(T)$ e $G^{-1}(T)$, em papel de probabilidade exponencial. Se por um lado, os solos da bacia do rio Indaiá apresentam permeabilidade média moderada, o que implicaria que $F^{-1}(T)$ e $G^{-1}(T)$ possam iniciar o seu paralelismo a partir de períodos de retorno em torno de 20 anos, por outro, a Figura 7 parece indicar o contrário, começando em períodos de retorno mais elevados. Tendo em conta tais aparentes inconsistências e buscando ponderá-las, relativamente ao seu intervalo usual de $0 \leq w \leq 0,4$, optou-se aqui pela estimativa $\hat{w} = 0,30$.

Finalmente, a relação entre alturas de chuva e lâminas de escoamento total de cheias, de 8 dias de duração, estimada para o Rio Indaiá é dada por

$$X = P - R \left[0,70 \tanh\left(\frac{P}{R}\right) + 0,30 \tanh\left(\frac{P}{269}\right) \right] \quad (18)$$

na qual os quantis R são calculados de acordo com suas probabilidades de não-excedência, pela inversa da distribuição Gama de parâmetros $k=17,29$ e $\theta=6,113$. A Figura 10 ilustra a relação expressa pela Equação (18), para diferentes quantis de R e valores simulados de chuva e lâmina de escoamento para a bacia do rio Indaiá. Verifica-se pelos pares (p_i, x_i) grafados na Figura 10 que, por exemplo, a ocorrência de uma precipitação de 300 mm em 8 dias pode causar cheias variadas, cujos volumes de 8 dias podem se estender desde escassos 25 mm até quase 200 mm, a depender das condições que antecedem o evento pluvial e diversos outros fatores, a síntese dos quais é proporcionada pela variável R .

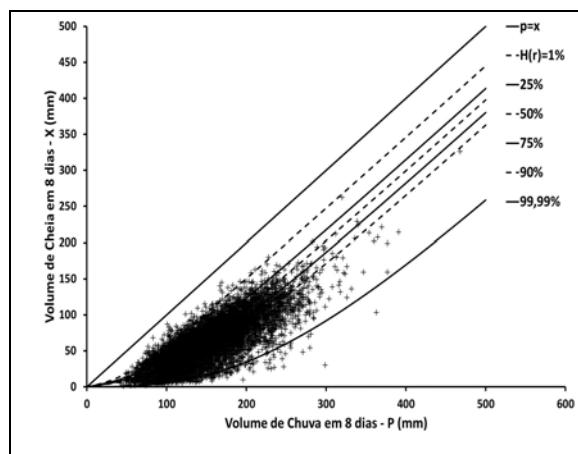


Figura 10 – Rio Indaiá em Porto Indaiá: modelo da relação entre volumes de chuva e de cheia, para $d=8$ dias, superposto aos pares $\{p_i, x_i\}$ extraídos das séries sintéticas, para diferentes valores de $H(r)$.

A Figura 10 permite também verificar que o experimento de geração de longas séries pluvio-flúvio-evaporimétricas proporcionou a simulação de eventos em um amplo espectro do domínio das variáveis P e X , os quais se conformam razoavelmente aos contornos e amplitudes do modelo dado pela Equação (18), a despeito das diversas distribuições condicionadas de R terem sido aproximadas por um único modelo Gama. Por outro lado, o experimento se mostrou incapaz de simular um conjunto mais numeroso de eventos extremos, o que pode ser ex-

plicado talvez (i) pelo tamanho ainda insuficiente das séries sintéticas; e/ou (ii) pelo desempenho inadequado dos modelos de geração e simulação na representação de eventos de magnitudes muito superiores às daqueles usados para calibrá-los. Não obstante essa insuficiência é possível empregar modelos, tal como o expresso pela equação (18), juntamente com seus parâmetros e relações implícitas, para melhor compreender a dependência entre os episódios de chuvas e a formação de cheias na bacia do rio Indaiá e em outras bacias, de modo geral.

Análise de sensibilidade

O modelo da relação entre volumes de chuva e de cheia é muito sensível a alterações dos parâmetros k e θ , com importante influência sobre a distância entre as curvas de quantis e a linha $x=p$. Num gráfico $F(p)$ e $G(x)$ versus p e x , isso equivale a dizer que os parâmetros controlam a distância que separa a cauda superior das duas distribuições. Para $\theta=6$ mm, $a=33,22$ mm e $w=0,3$ mantidos constantes, e D tal que $H(D)=0,9998$, os valores do parâmetro k foram fixados em 10, 15 e 20, e as alterações, registradas no modelo ajustado para a bacia do rio Indaiá, encontram-se ilustradas nas Figuras 11-a, 11-b e 11c, respectivamente. As distâncias que separam as curvas de quantis da linha $x=p$ variam consideravelmente com as alterações nos valores de k , particularmente na cauda inferior de $H(r)$. Ainda para a situação descrita, com os valores do parâmetro k iguais a 10, 15 e 20, as distâncias de translação r_0 são muito afetadas e passam a ser iguais a 55,2 mm, 82,7 mm e 110 mm, respectivamente. Observa-se também que à medida que k aumenta, crescem as distâncias entre as curvas correspondentes a diferentes $H(r)$ e, portanto, aumenta a variância dos déficits de saturação R . A propósito, sabe-se que a média e a variância de uma distribuição Gama, com parâmetros k e θ , são iguais a $k\theta$ e $k\theta^2$, respectivamente.

As Figuras 12-a, 12-b e 12-c ilustram o comportamento do modelo para os valores $\theta=2$ mm, $\theta=4$ mm e $\theta=8$ mm, respectivamente, mantidos constantes os parâmetros $k=15$, $a=33,22$ mm e $w=0,30$, de modo que D seja estimado por um valor tal que $H(D)=0,9998$. Verifica-se nessas figuras que o modelo da relação entre volumes de chuva e de cheia é fortemente afetado por variações importantes do parâmetro de escala θ , aumentando enormemente a variância do déficit de saturação, uma vez que, para a distribuição Gama, $\text{Var}(r)=k\theta^2$. De forma ainda mais intensa do que para o parâmetro k , variações marginais de θ provocam sensíveis alterações nas

distâncias que separam as curvas de quantis entre si e entre essas mesmas curvas e a linha $x=p$, especialmente na cauda inferior de $H(r)$. As distâncias de translação r_0 passam a ter os valores 29,1 mm, 56,6 mm e 108 mm, correspondentes respectivamente às alterações paramétricas $\theta=2$ mm, $\theta=4$ mm e $\theta=8$ mm, uma vez mantidos constantes os outros parâmetros. Percebe-se a forte influência que o parâmetro θ exerce sobre a estimativa da distância de translação, tendo em vista que provoca sensíveis modificações entre a cauda inferior e a parte central da distribuição $H(r)$, região da qual r_0 é extraído.

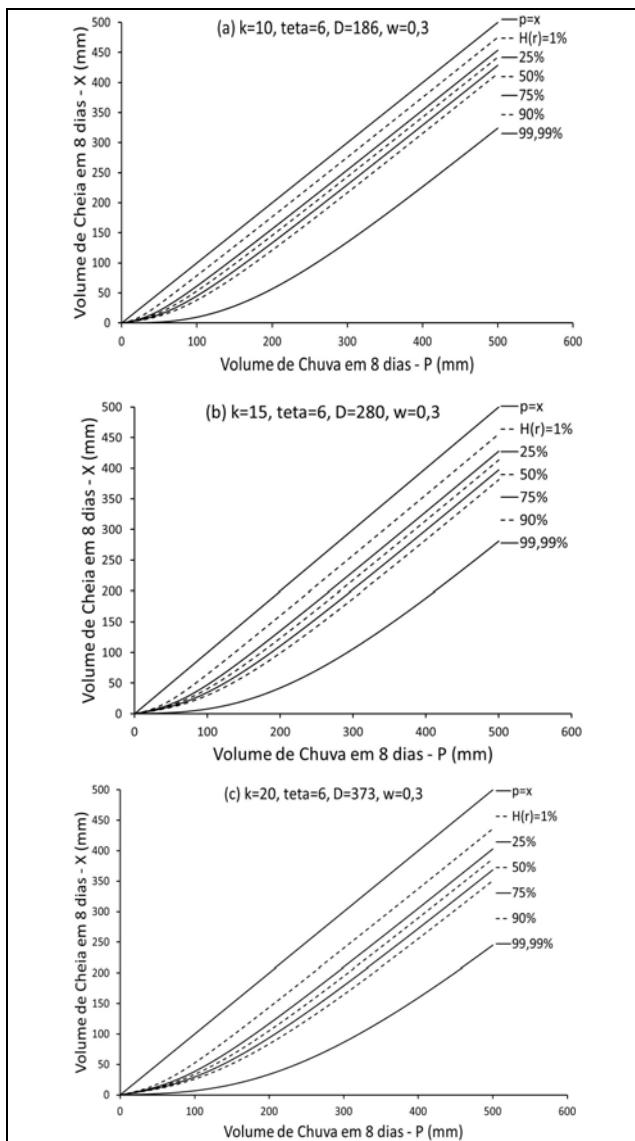


Figura 11 – Rio Indaiá em Porto Indaiá – Sensibilidade da relação entre volumes de chuva e de cheias a variações marginais do parâmetro k : (a) $k=10$; (b) $k=15$; e (c) $k=20$, para diferentes valores de $H(r)$.

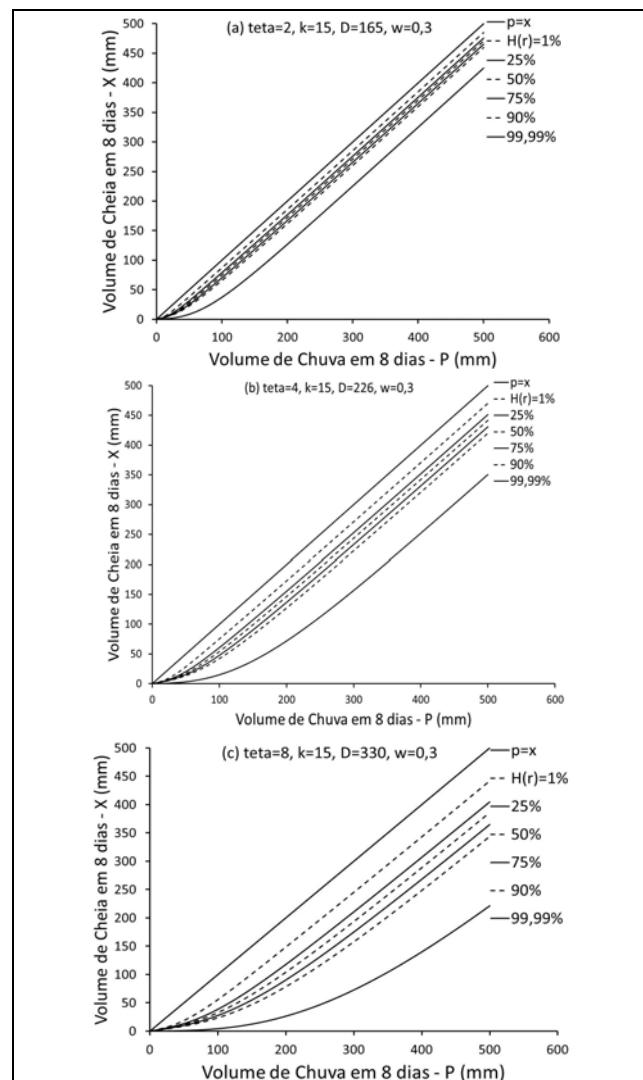


Figura 12 - Rio Indaiá em Porto Indaiá –Sensibilidade da relação entre volumes de chuva e de cheias a variações marginais do parâmetro θ : (a) $\theta=2$; (b) $\theta=4$; e (c) $\theta=8$, para diferentes valores de $H(r)$.

Contrariamente aos parâmetros k e θ , o modelo não é muito sensível ao parâmetro w . Este parâmetro controla o ponto a partir do qual que as curvas de quantis tendem a ficar paralelas à linha $x=p$. Os efeitos da mudança dos valores de w na relação entre a chuva e a lâmina de escoamento, estimada para a bacia do rio Indaiá, são mostrados nas Figuras 13-a a 13-c, em correspondência às especificações $w=0,1$, $w=0,2$, e $w=0,4$, enquanto os outros parâmetros permaneceram constantes ($k=15$, $a=33,22$ e $\theta=6$). A distância de translação r_0 não varia com w , pois deste não depende.

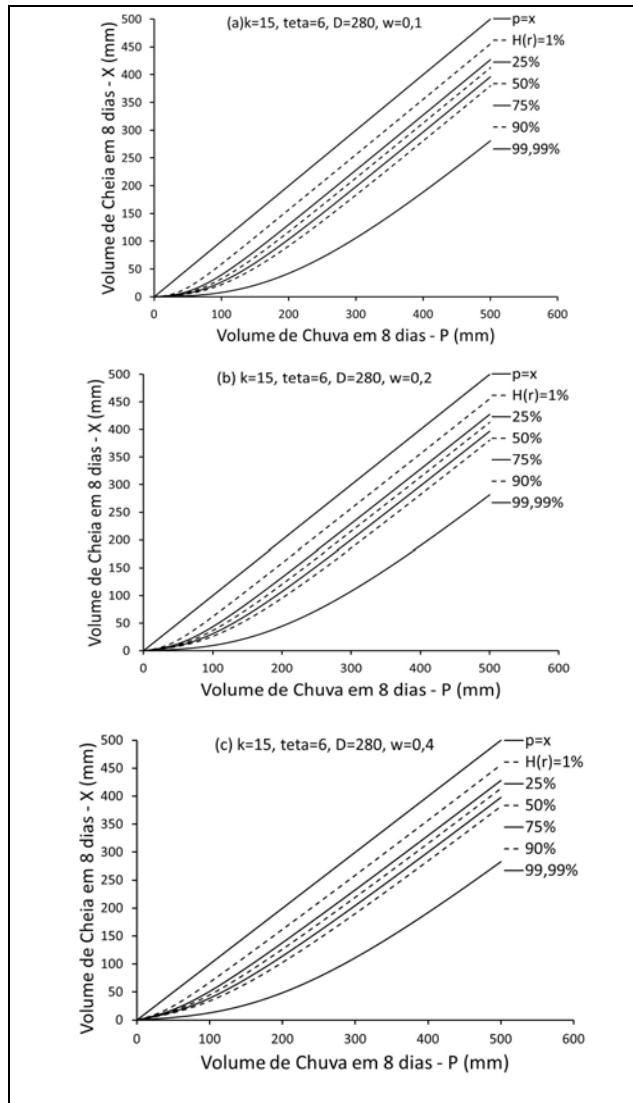


Figura 13 - Rio Indaiá em Porto Indaiá – Sensibilidade da relação entre volumes de chuva e de cheias a variações marginais do parâmetro w : (a) $w=0,1$; (b) $w=0,2$; e (c) $w=0,4$, para diferentes valores de $H(r)$.

DISCUSSÃO DE RESULTADOS

Conforme menção anterior, para verificar a distância de translação r_0 a partir do modelo entre P e X , fizeram-se os ajustes das distribuições Gama, Weibull e Log-Normal apenas aos valores de R , em número de 221, associados às precipitações maiores do que 250 mm, de períodos de retorno maiores ou iguais a 50 anos, aqui consideradas como raras ou extremas. A distribuição Gama, com parâmetros agora estimados em $k=25,3445$ e $\theta=5,7426$, nova-

mente se mostrou mais aderente aos valores extraídos das séries sintéticas, conforme ilustra a Figura 14. De acordo com as premissas do método GRADEX, essa distribuição não deverá se alterar para períodos de retorno superiores a 50 anos. Sob tais condições e com o parâmetro GRADEX $\hat{a}=33,22$ mm, a integração numérica da Equação (11) resulta em $r_0=134$ mm e, portanto, em perfeito acordo com o valor obtido na Figura 7. Verifica-se aqui que, segundo a distribuição Gama ajustada, a distância de translação $r_0=134$ mm tem probabilidade de não-excedência igual a 36,9%, sendo inferior à média de 146 mm e à mediana de 144 mm, localizando-se, portanto, entre o primeiro e segundo quartis, conforme esperado. Para este novo conjunto paramétrico, a estimativa do máximo déficit de saturação, tal que $H(270)=0,9998$, é $\hat{D}=270$ mm.

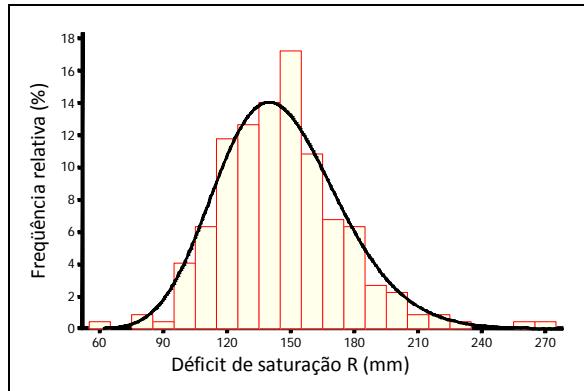


Figura 14 – Rio Indaiá em Porto Indaiá – Distribuição Gama ajustada aos 221 valores de R associados a chuvas superiores a 250 mm.

O modelo da relação entre volumes de precipitação e de cheias, ajustado para a bacia do rio Indaiá com a distribuição Gama da Figura 14, oferece a oportunidade de verificação de uma premissa muito frequente em projetos de engenharia, qual seja, a de igualdade dos tempos de retorno associados a quantis característicos de ambas variáveis. Para analisar tal premissa, concebeu-se a seguinte sequência de procedimentos: (i) com base na curva de freqüência dos volumes de chuva da Figura 7, fixa-se um tempo de retorno T_1 e extraí-se o quantil de precipitação p_1 correspondente; (ii) escolhem-se valores do déficit de saturação R , ao longo da amplitude desta variável, como por exemplo, $r=10, 50, 100, 134, 200$, e 270 mm; (iii) para cada valor especificado de R , emprega-se o modelo dado pela Equação (15), com $w=0,30$ e $\hat{D}=270$ mm, para calcular o

volume de cheia x correspondente; (iv) usa-se a curva de frequência dos volumes de cheia da Figura 7, para estimar o tempo de retorno associado ao quantil calculado no item anterior; e (v) repete-se a sequência para sucessivos novos valores de tempo de retorno.

A Figura 15 apresenta os resultados do experimento descrito no parágrafo anterior. Verifica-se a grande variação dos tempos de retorno associados aos volumes de cheia, à medida que o déficit de saturação R desloca-se de sua extrema cauda inferior ($r=10$ mm, com probabilidade de não excedência, $H(10)$, inferior a 0,001%) até a cauda superior ($r=270$ mm, com $H(270)=0,9998$). Vê-se, por exemplo, que um volume de precipitação de tempo de retorno $T=1.000$ anos pode provocar, para os valores de r adotados, um volume de cheia cujo tempo de retorno pode variar entre 135 anos, quando o déficit de saturação está próximo ao seu limite superior, ou seja, $r=270$ mm, até 35.000 anos, quando praticamente não há déficit de saturação, ou seja, $r=10$ mm. De fato, a hipótese de iguais tempos de retorno entre volumes de chuva e de cheias é válida apenas quando o déficit de saturação R é igual ou está próximo da distância de translação r_0 , ou seja, quando $r=134$ mm, que corresponde a uma probabilidade de não excedência $H(134)=0,3656$.

Embora a estratégia empregada para simular precipitações e cheias raras e extremas tenha produzido um grande número de eventos de magnitude muito superior às das maiores observações, ela se mostrou insuficiente para caracterizar com maior detalhe os ramos superiores das distribuições de probabilidades, assim como do modelo entre precipitações e cheias. No que concerne a esse ponto em particular, acredita-se, primeiramente, que o experimento teria sido mais efetivo se as séries sintéticas tivessem sido mais longas. Em segundo lugar, também pode-se especular que, como a calibração de parâmetros se deu em condições ordinárias, de maior frequência, uma alternativa possível poderia incluir a introdução de perturbações controladas nos principais parâmetros dos modelos envolvidos, de modo a contemplar eventuais alterações hidroclimáticas e/ou hidrológicas sob condições raras e extremas.

A presente investigação se deu sob a premissa de que a distribuição dos volumes de chuva tem cauda superior exponencial, o que representa uma restrição ao emprego da estratégia de modelação aqui descrita, em particular, e aos métodos do tipo GRADEX, em geral. Uma alternativa ao emprego de uma única distribuição com cauda superior exponencial pode ser aquela apresentada por Fernandes

e Naghettini (2008), na qual os autores preconizam o uso de mistura de distribuições, tal como o modelo TCEV (Two-Component Extreme Value), cuja cauda superior é exponencial. Tal alternativa poderia contemplar aqueles casos nos quais as precipitações e as cheias raras e extremas têm um comportamento probabilístico distinto daquele apresentado pelos eventos mais frequentes.

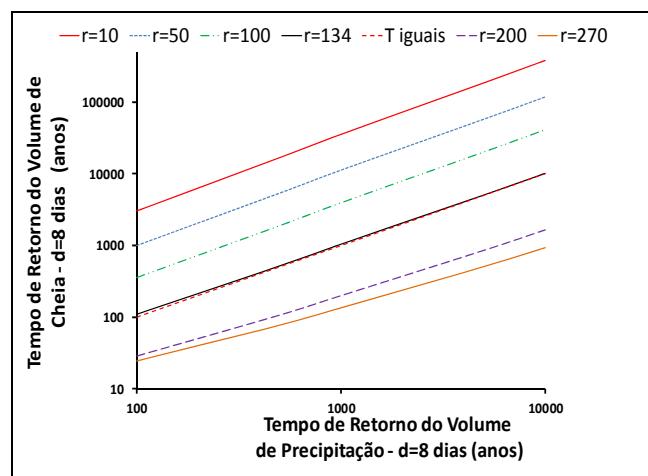


Figura 15 – Rio Indaiá em Porto Indaiá: relação entre tempos de retorno dos volumes de chuva e de cheia, para diferentes valores do déficit de saturação.

CONCLUSÕES

Este artigo apresentou (i) os fundamentos dos métodos do tipo GRADEX para a estimação de curvas de frequência de cheias e (ii) a formulação e a aplicação à bacia do Rio Indaiá, em Minas Gerais, de um modelo matemático para a relação entre volumes de precipitação, p_i , e de escoamento, x_i , associados a eventos raros e extremos. Essas ocorrências foram obtidas a partir de longas séries sintéticas de precipitação, evaporação e vazão, em intervalo diário. A abordagem permitiu a construção de um amplo conjunto de pares (p_i, x_i) , dentro do domínio de variação das variáveis P e X, a partir do qual foi possível estudar algumas propriedades da relação entre volumes de precipitação e de cheias de baixa frequência, sob a condição de distribuições de probabilidade com caudas superiores exponenciais.

O modelo descrito neste artigo e a análise de sensibilidade de seus parâmetros permitiram melhor compreender a distribuição de probabilidades $H(r)$ dos déficits de saturação e sua relação com a distância de translação r_0 . Viu-se que o modelo

probabilístico Gama parece ser adequado ao padrão de variação de R e que os seus parâmetros k , de forma, e, principalmente, θ , de escala, têm forte efeito sobre r_0 , pois afetam diretamente a região entre a cauda inferior e parte central da distribuição de R , de onde r_0 é extraído. De fato, a distância de translação r_0 é um valor esperado de uma função de R , que pode ser expresso indiretamente em termos dos parâmetros k e θ , e diretamente em função do parâmetro GRADEX das chuvas, conforme a equação (11). Demonstrou-se aqui que, em oposição a algumas descrições do método GRADEX, a distância de translação r_0 corresponde a um quantil de R inferior à retenção média ou mediana e, de fato, sintetiza a condição de retenção de umidade na bacia tal que uma precipitação de tempo de retorno T produzirá uma cheia cujo volume está associado ao mesmo tempo de retorno T , de modo que as considerações de risco hidrológico possam ser aplicadas tanto à causa quanto à consequência de um certo episódio.

No tocante às bacias com escasso monitoramento fluviométrico, pode-se vislumbrar alguns desdobramentos práticos dos métodos aqui apresentados. Primeiramente, as estações pluviométricas, quase sempre mais numerosas e com mais tempo de operação, podem fornecer, mediante inferências locais ou regionais, uma estimativa confiável do parâmetro de escala, a , das chuvas, para certa duração previamente especificada. De posse do parâmetro GRADEX, conhece-se, portanto, a cauda superior da distribuição de chuvas, ou seja, a semi-retaparadigma, em papel de probabilidade exponencial, a partir da qual se busca uma paralela, dela distante da quantidade r_0 . Ora, se a distância de translação r_0 é completamente definida pela Equação (11), a partir do conhecimento de k e θ , além da estimativa do GRADEX, é preciso ainda alguma estratégia para obter as estimativas dos parâmetros de $H(r)$ e, em última instância, da distribuição dos volumes de cheia.

Em síntese, três percursos poderiam ser vislumbrados. O primeiro, mais simples e expedito, poderia ser a modelagem de $H(r)$ por uma distribuição Gama a partir apenas dos registros fluviométricos existentes, com possível adaptação da seleção dos eventos para o modo de séries de duração parcial (ou POT, do inglês Peaks over Thresholds), podendo assim permitir o aumento dos tamanhos das amostras e a priorização dos eventos de maior magnitude. Neste contexto, é possível também considerar uma eventual majoração das estimativas dos parâmetros k e θ , para assegurar a maior variância

associada aos eventos extremos. A magnitude de tal majoração pode advir de estudos correlatos efetuados em bacias próximas, de características hidrológicas semelhantes. O segundo percurso poderia empregar a transposição para a bacia em estudo de um grande número de intensas tormentas observadas em uma ampla região que seja considerada semelhante do ponto de vista meteorológico, seguida de simulação hidrológica, sob diferentes condições antecedentes de umidade do solo, de modo a permitir a obtenção de ocorrências (p_i, x_i, r_i) raras e extremas e assim estimar a correspondente distribuição $H(r)$ no domínio D_2 . Finalmente, a terceira via, mais exigente, poderia fazer uso das técnicas de regionalização hidrológica para modelar a distribuição incondicional $H(r)$ em vários sítios com grande disponibilidade de informações fluviométricas e, em seguida, explicar a variação de seus parâmetros a partir de características geomorfo-climáticas. No contexto desta recomendação, seria conveniente que a inferência regional da distribuição incondicional $H(r)$ tivesse como base as chamadas estatísticas de ordem, quais sejam, os 20 ou 30% maiores valores amostrais de cada sítio.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Brasil (CNPq) pelo financiamento desta pesquisa por meio do Processo nº 201526/2010-7 (PDE). Os autores também agradecem aos dois revisores anônimos por seus comentários e valiosas sugestões.

REFERÊNCIAS

- ANDERSON, T. W.; DARLING, D. A. A test of goodness of fit. *Journal of the American Statistical Association*, v. 49, p. 765-769, 1954.
- BOUGHTON, W. C.; P. HILL, P. A design flood estimation procedure using data generation and a daily water balance model. Cooperative Research Centre for Catchment Hydrology Report 97(8). Canberra: CRCCH, 1997, 48 p.
- BRYSON, M. C. Heavy-tailed distributions: properties and tests. *Technometrics*, v. 16, n.1, p. 61-67, 1974.

CENTRE TECHNIQUE DE GÉNIE RURAL, DES EAUX ET DES FORÊTS. L'application de la méthode du Gradex à l'estimation des crues de faible fréquence. Paris: Ministère de l'Agriculture, 1972.

FERNANDES, W.; NAGHETTINI M. Integrated frequency analysis of extreme flood peaks and flood volumes using the regionalized quantiles of rainfall depths as auxiliary variables. *Journal of Hydrologic Engineering*, v. 13, n. 3, p. 171-179, 2008

GUILLOT, P.; DUBAND D. *La méthode du GRADEX pour le calcul de la probabilité des crues à partir des pluies*. In *INTERNATIONAL ASSOCIATION OF HYDROLOGICAL SCIENCES* (Pub). *Floods and their Computation* – IAHS Publication 84. London: IAHS, p. 560-569, 1967.

GUILLOT, P. *The arguments of the GRADEX method: a logical support to assess extreme floods*. In *INTERNATIONAL ASSOCIATION OF HYDROLOGICAL SCIENCES* (Pub). *Extreme Hydrological Events: Precipitation, Floods, and Droughts* - IAHS Publication 213. London: IAHS, p. 287-298, 1993.

GONTIJO, N. T. *Avaliação das relações de frequência entre precipitações e enchentes raras por meio de séries sintéticas e simulação hidrológica*. 2007. 155 f. Dissertação (Mestrado em Saneamento, Meio Ambiente e Recursos Hídricos) – Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2007.

LIMA, A. A. *Metodologia integrada para determinação da enchece de projeto de estruturas hidráulicas por meio de séries sintéticas de precipitação e modelos chuva-vazão*. 2004. 316 f. Dissertação (Mestrado em Saneamento, Meio Ambiente e Recursos Hídricos) – Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte. 2004.

NAGHETTINI, M.; POTTER, K. W.; ILLANGASEKARE, T. Estimating the upper-tail of flood-peak frequency distributions using hydrometeorological information. *Water Resources Research*, v. 32, n. 6, p. 1729-1740, 1996.

PICKANDS, J. Statistical inference using extreme order statistics. *The Annals of Statistics*, v. 3, p. 119-131, 1975.

QUEIROGA, Y. G.; NAGHETTINI, M.; NASCIMENTO, N. Avaliação de um método de assimi-

lação de erros nas previsões de vazões de curto prazo afluentes ao reservatório da UHE Camargos. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, v. 10, n. 3, p. 63-74, 2005.

SRIKANTHAN, R.; ZHOU, S. *Stochastic Generation of Climate Data*. Cooperative Research Centre for Catchment Hydrology Report 3(12). Canberra: CRCCH, 2003, 70 p.

ZHAO, R. J.; ZHUANG, Y. L.; FANG, L. R.; ZHANG, Q. S. The Xinanjiang model. In: *INTERNATIONAL ASSOCIATION OF HYDROLOGICAL SCIENCES* (Pub). *Hydrological Forecasting* – IAHS Publication 129, p. 351-356, 1980.

Investigation on the Properties of the Relationship Between Rare and Extreme Rainfall and Flood Volumes, Under Some Distributional Restrictions

ABSTRACT

The fact that rainfall data are usually more abundant and more readily regionalized than streamflow data has motivated hydrologists to conceive methods that incorporate the hydrometeorological information into flood frequency analysis. Some of them, particularly those derived from the French GRADEX method, involve assumptions on the relationship between extreme rainfall and flood volumes and on their probability distributions. In particular, for rainfall probability distributions exhibiting exponential-like upper tails, it is possible to derive the shape and scale of the probability distribution of flood volumes by hypothesizing the basic properties of such a relationship. This paper focuses on a parametric mathematical model for the relationship between rare and extreme rainfall and flood volumes under exponentially-tailed distributions. The model was fitted to rare and extreme events as derived from the hydrological simulation of long stochastically-generated synthetic series of rainfall and evaporation for the Indaiá river basin, located in south-central Brazil. In addition, the paper provides a sensitivity analysis of the model parameters. Analysis of the results provides grounds to draw conclusions regarding the relative positions of the upper tails of the probability distributions of rainfall and flood volumes.

Key-words: *Extreme hydrological events, flood frequency analysis, relationship between rainfall and flood volumes*